

Questo documento riporta commenti, approfondimenti o metodi di soluzione alternativi per alcuni esercizi dell'esame. Ovviamente alcuni esercizi potevano essere risolti utilizzando metodi ancora diversi. I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

**Esercizio 2(a)** I calcoli utilizzati nella seconda parte permettono di rispondere anche a questo quesito. Nella parametrizzazione data nelle soluzioni i punti del segmento di estremi  $A$  e  $B$  corrispondono a valori del parametro compreso tra 0 e 1: poiché l'intersezione tra la retta  $r$  e il piano  $\pi$  si ottiene per il valore 3 del parametro, ciò significa che tale intersezione non appartiene al segmento.

**Esercizio 2(b)** La retta  $r$  può essere parametrizzata anche in modi diversi: ovviamente in tal caso i punti della semiretta di origine  $A$  e contenente  $B$  corrispondono a valori differenti del parametro. Ad esempio se parametrizziamo la retta  $r$  così:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

vediamo che  $A$  si ottiene per  $t = -1$  e  $B$  si ottiene per  $t = 0$ . Dunque i punti della semiretta di origine  $A$  e contenente  $B$  sono quelli corrispondenti ai valori del parametro  $t$  maggiori di  $-1$ .

**Esercizio 3(c)** Dato un vettore  $\mathbf{u}$ , i vettori che hanno la stessa immagine di  $\mathbf{u}$  tramite  $f$  sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma  $\mathbf{u} + \mathbf{t}$  per qualche vettore  $\mathbf{t}$  in  $\ker f$ . Poiché sappiamo dal punto (a) che il nucleo di  $f$  ha dimensione 1 e contiene, quindi, infiniti vettori, dato un qualsiasi vettore  $\mathbf{u}$ , esistono infiniti vettori che hanno la stessa immagine di  $\mathbf{u}$  tramite  $f$ . Poiché è richiesto di trovare tre vettori aventi la stessa immagine non nulla, basta allora scegliere un qualsiasi vettore  $\mathbf{u}$  tale che  $f(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$  cioè tale che  $\mathbf{u} \notin \ker f$ . Poiché  $\ker f$  è formato dai multipli di  $(-1, 1, -1, 1)$ , scegliamo, ad esempio,  $\mathbf{u} := (1, 0, 0, 0)$ . Sommiamo a questo vettore due distinti vettori non nulli del nucleo di  $f$  e otteniamo, ad esempio, i vettori  $(1, 0, 0, 0) + (-1, 1, -1, 1) = (0, 1, -1, 1)$  e  $(1, 0, 0, 0) + (1, -1, 1, -1) = (2, -1, 1, -1)$ .

**Esercizio 4(b)** Se non avessimo calcolato preventivamente la dimensione della somma utilizzando la formula di Grassmann, avremmo potuto considerare la matrice le cui colonne sono date dalle componenti rispetto alla base canonica dei generatori della somma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolando poi il rango di questa matrice con uno dei metodi usuali (il risultato sarà chiaramente 3) è facile poi determinare una base per  $E + F$ .

**Esercizio 5(b)** L'equazione dell'asse di un segmento può anche essere determinata tenendo conto del fatto che è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi. Ad esempio un punto  $P := (x, y)$  appartiene all'asse del segmento  $AC$  se e solo se la distanza di  $P$  da  $A$  è uguale alla distanza di  $P$  da  $C$ , cioè se  $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = (x - 1)^2 + (y - 6)^2$ . Espandendo questa uguaglianza troviamo  $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 12y + 36$  da cui si ottiene  $12x - 4y - 28 = 0$  equivalente all'equazione  $3x - y - 7 = 0$  trovata con altro metodo.

**Esercizio 5(c)** Per trovare l'equazione della circonferenza senza determinare esplicitamente il centro e il raggio si può considerare l'equazione cartesiana della generica circonferenza  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . Imponendo il passaggio per  $A$ ,  $B$  e  $C$  otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 65 + 7a + 4b + c = 0 \\ 85 + 7a - 6b + c = 0 \\ 37 + a + 6b + c = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione  $a = -4$ ,  $b = 2$ ,  $c = -45$  dà l'equazione cercata.