Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(a-b)

I.D.E.A. Diversi studenti per imporre la condizione di allineamento o di complanarità dei punti hanno considerato la matrice le cui colonne non erano data dalla differenza delle coordinate dei punti ma direttamente dalle coordinate dei punti, ad esempio la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Questa matrice, tuttavia non ci dice nulla sull'allineamento dei punti $A := (1, 1, 0, 0)$, $B := (2, 1, 1, 1)$ e $C := (1, k, 0, 1)$.

Esercizio 1(b)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno considerato correttamente le matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, e poi per calcolarne il rango hanno preso in esame solo alcuni dei minori di ordine 3, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$. La matrice in questione ha tuttavia 4 minori di ordine 3: quelli che si ottengono prendendo tutte le colonne e 3 righe su 4 (ovvero scartando una riga in tutti e 4 i modi possibili. Ricordiamo che non è necessario che le righe utilizzate per formare un minore siano consecutive.

In questo esercizio, come più in generale quando si calcolano ranghi di matrici, è possibile non calcolare tutti i determinanti dei minori di un certo ordine se si considerano gli orlati di un minore invertibile.

Esercizio 2(a)

I.D.E.A. Molti studenti hanno erroneamente affermato che un sistema ha una ed una sola soluzione se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite. Questa condizione non è sufficiente. Si deve anche imporre che il determinate della matrice dei coefficienti sia non nullo. Inoltre, non necessariamente il numero delle equazioni deve essere uguale al numero delle incognite. Per esempio il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

ha evidentemente una sola soluzione.

Esercizio 2(b)

I.D.E.A. Molti studenti hanno risposto erroneamente che, poiché dal punto precedente sappiamo che non ci sono valori del parametro per cui il sistema ha un'unica soluzione, allora il sistema ha infinite soluzioni per ogni valore del parametro. Questo non è sufficiente: potrebbe infatti accadere che il sistema non abbia alcuna soluzione.

Esercizio 3(b)

I.D.E.A. Moltissimi studenti hanno fatto degli errori nel calcolo del rango della matrice associata all'omomorfismo e quindi hanno trovato una dimensione dell'immagine di f errata. Quando poi hanno calcolato la dimensione del nucleo, non hanno osservato che la somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine era diversa da 3.

Esercizio 3(c)

I.D.E.A. Moltissimi studenti, per determinare una base di E, supplementare di $f(\mathbb{R}^3)$ in uno spazio di dimensione 4 hanno scelto due vettori linearmente indipendenti, senza porre alcuna altra condizione. Questo non basta: bisogna infatti scegliere due vettori che uniti a due vettori di una base di $f(\mathbb{R}^3)$, formino una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4(a)

A.U. Per calcolare il polinomio caratteristico di A_k si può precedere così:

$$\det(A_k - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3-x & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-x & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2 \\ 0 & 4-x & 0 \\ 2 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(3-x)(4-x) \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(4-x)(x^2-4x) = -x(3-x)(4-x)^2.$$

Si noti che abbiamo prima sviluppato rispetto alla seconda riga e poi rispetto alla seconda riga. Inoltre, i fattori $3-x$ e $4-x$ che troviamo durante lo sviluppo danno direttamente degli autovalori: conviene quindi tenerli direttamente raccolti.

Esercizio 5(a)

M.A. Per risolvere quest'esercizio si poteva anche determinare il punto C risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette r e s e trovando così $C = (-1, 1)$, poi trovare i parametri direttori della retta passante per i punti A e B facendo la differenza delle coordinate dei 2 punti e ottenendo così $(4-2, 5-2) = (2, 3)$ e notando che la generica retta parallela alla retta passante per A e B ha equazione del tipo $3x - 2y + k = 0$. Imponendo il passaggio per C si trova la condizione $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + k = 0$ da cui si ricava $k = 5$ e di conseguenza l'equazione della retta.

Esercizio 5(b)

M.A. Per risolvere quest'esercizio si poteva anche determinare la retta passante per C e parallela alla retta passante per i punti A e B (questa è la retta determinata al punto precedente), la retta passante per A e parallela alla retta passante per B e C ed intersecare le rette così ottenute.

I.D.E.A. Diversi studenti non hanno considerato correttamente l'ordine dei vertici del parallelogramma $ABCD$ (nel testo era scritto esplicitamente di fare attenzione all'ordine) e hanno così determinato un punto sbagliato. Affinché $ABCD$ sia un parallelogramma il punto medio di A e C deve coincidere con il punto medio di B e D.

Esercizio 6(b)

I.D.E.A. Diversi studenti una volta arrivati all'equazione $\frac{|1+k|}{3} = 6$ l'hanno riscritta così $\frac{1+k}{3} = 6$, ricavando la soluzione $k = 17$. Questo è un errore: l'equazione $\frac{|1+k|}{3} = 6$ ha come soluzioni $k = -19$ e $k = 17$. Queste due soluzioni danno i due piani paralleli a π e distanti 6 dal centro della sfera: uno di questi piani è, ovviamente, il piano π stesso.

M.A. Questo esercizio poteva anche essere risolto determinando esplicitamente il punto H (ad esempio facendo la proiezione ortogonale di P sul piano π, calcolando il simmetrico K di H rispetto a P e trovando il piano parallelo a π e passante per K.

Esercizio 6(c)

A.U. Si noti che per trovare le sfere cercate non è necessario determinare esplicitamente H

I.D.E.A. Diversi studenti hanno supposto che le sfere cercate avessero centro in P oppure in H. Si noti che il testo non impone né l'una né l'altra condizione