Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(b)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno verificato che la la somma della dimensione dell'immagine di f e del nucleo di f fosse 3: questo è necessario per garantire l'esistenza dell'endomorfismo f ma non è sufficiente. Se le condizioni assegnate fossero, ad esempio, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$ e nucleo generato da $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ non avremmo alcun endomorfismo, perché se $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ appartiene al nucleo, $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ dovrebbero avere la stessa immagine.

Esercizio 2(a)

I.D.E.A. Diversi studenti si sono limitati a controllare per quali valori di k il punto C appartiene alla retta passante per A e B: non tutti i punti della retta passante per A e B appartengono però al segmento di estremi A e B.

Esercizio 2(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno cercato per quali valori esiste un iperpiano passante per i quattro punti A, B, C e O: tuttavia per quattro punti di $\mathbb{R}^4$ passa sempre almeno un iperpiano: nel caso in cui i quattro punti siano complanari di iperpiani ne esistono infiniti, mentre se i quattro punti non sono complanari di iperpiani ne esiste uno solo. La domanda poteva dunque essere espressa così: per quale valore di k i quattro punti A, B, C e O *non* sono complanari?

Esercizio 3(c)

A.U. Vediamo per esteso come determinare le matrici D e M. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico della matrice A_k (con $k = -1$):

$$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -2 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)((2-x)(-1-x)-1\cdot(-2)) = (1-x)(x^2-x) = -x(x-1)^2.$$

Gli autovalori di A_k sono, quindi, 0 e 1. Si noti che al primo passaggio abbiamo sviluppato rispetto alla seconda riga.

Occorre calcolare per ciascun autovalore una base del relativo autospazio.

Cominciamo con il calcolare una base dell'autospazio relativo a 1. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ -2 & 2 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(t-u, t, u)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(1)$ è allora formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 := (-1, 0, 1)$.

Calcoliamo ora una base dell'autospazio relativo a 0. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-0 & 0 \\ -2 & 2 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(t, 0, -2t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Una base per $E(0)$ è allora formata dal vettore $(1, 0, -2)$.

Possiamo ora scrivere la matrice D e la matrice M. Per la matrice D basta scrivere lungo la diagonale gli autovalori determinati in precedenza, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Dunque

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice M riportiamo sulle sue colonne le componenti rispetto alla base canonica dei vettori della base di autovettori di che abbiamo determinato in precedenza:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso anche la matrice M dovrebbe essere modificata di conseguenza.

A.U. Dalla soluzione del punto b sapevamo già che il vettore $(1, 2, 1)$ è autovettore relativamente all'autovalore 1. Tuttavia questo dato non ci aiuta nella determinazione dell'autospazio relativo all'autovalore 1. Ci avrebbe aiutato nel caso in cui l'autospazio avesse avuto dimensione 1, nel qual caso il vettore $(1, 2, 1)$ avrebbe costituito una base.

Esercizio 4(a)

I.D.E.A Alcuni studenti per determinare l'intersezione di E con F_k si sono limitati a controllare se i generatori di E appartenessero a F_k. Ciò non è sufficiente: anche se i generatori di E non appartengono a F_k possono esistere dei vettori non nulli nell'intersezione di E con F_k.

Esercizio 4(c)

A.U. Applichiamo ora il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &:= \mathbf{u}, \\ \mathbf{u}_2 &:= \mathbf{v} + \alpha \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Calcolando il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ troviamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 &= (1, 2, 1, 0) \times ((1, 0, 0, 1) + \alpha\,(1, 2, 1, 0)) = \\ &= (1, 2, 1, 0) \times (1, 0, 0, 1) + \alpha\,(1, 2, 1, 0) \times (1, 2, 1, 0) = \\ &= 1 + 6\alpha. \end{aligned}$$

Se ora scegliamo $\alpha = -\frac{1}{6}$ abbiamo che $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$. Dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, 2, 1, 0)\,, \\ \mathbf{u}_2 &= (1, 0, 0, 1) - \frac{1}{6}\,(1, 2, 1, 0) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 1\right) \end{aligned}$$

formano una base ortogonale di E.

Prima di proseguire può essere utile, per escludere eventuali errori di calcolo, controllare che i vettori così ottenuti siano effettivamente ortogonali facendone il prodotto scalare.

Per ottenere una base ortonormale di E basta ora dividere ciascun vettore della base ortogonale per la propria norma, ottenendo così i vettori $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ e $\left(\frac{5}{\sqrt{66}}, -\frac{2}{\sqrt{66}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{6}{\sqrt{66}}\right)$.

Esercizio 5(a)

A.U. Molti studenti hanno notato che il triangolo ABC è isoscele: ciò è vero ma è inutile per la soluzione del problema. In qualunque triangolo infatti, la retta congiungente un vertice con il punto medio del lato opposto (vale a dire una mediana) divide il triangolo in due triangoli di area uguale.

Esercizio 6(a)

I.D.E.A. Alcuni studenti, dopo aver scritto l'equazione del fascio come $(3\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(2\lambda+2\mu)z+2\lambda+3\mu=0$ e aver notato che la retta s ha vettore direttore $(1,1,2)$ hanno imposto come condizione di parallelismo tra retta e fascio

$$(3\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 1+(2\lambda+2\mu)\cdot 2+2\lambda+3\mu=0$$

invece che

$$(3\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 1+(2\lambda+2\mu)\cdot 2=0.$$

La condizione

$$(3\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 1+(2\lambda+2\mu)\cdot 2+2\lambda+3\mu=0$$

non è la condizione di parallelismo tra piano e retta ma è, semmai, la condizione di passaggio per il punto $(1,1,2)$.

Per ricordare la condizione di parallelismo tra un piano e un vettore in un riferimento cartesiano si può ragionare così: il piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ è parallelo al vettore (m,n,p) se e solo se il vettore (a,b,c) (che è ortogonale al piano) è ortogonale al vettore (m,n,p) cioè se e solo se il prodotto scalare tra questi due vettori (cioè $am+bn+cp$ si annulla.

D'altra parte la condizione di parallelismo non può coinvolgere il termine noto del piano. Infatti i due piani $ax+by+cz+d=0$ e $ax+by+cz+d'=0$ sono tra loro paralleli e quindi ogni vettore $m,n,p)$ parallelo al primo piano è parallelo anche al secondo: se la condizione fosse $am+bn+cp+d=0$ avremmo (nel caso in cui $d\neq d'$) che $am+bn+cp+d'\neq 0$ cioè il vettore $m,n,p)$ sarebbe parallelo al primo piano ma non al secondo.

Esercizio 6(c)

I.D.E.A. Alcuni studenti, per calcolare la distanza tra π e σ hanno preso un punto qualsiasi sul piano π e un punto qualsiasi sul piano sul piano σ e ne hanno calcolato la distanza: così facendo si ottiene però un valore che dipende dai punti scelti.