Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(a)

I.D.E.A. Diversi studenti hanno considerato la matrice

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & k+1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

le cui colonne sono date dalle coordinate dei punti A, B e C_k invece della matrice M le cui colonne si ottengono come componenti dei vettori $B - A$ e $C_k - A$. Il rango della matrice N non serve tuttavia a stabilire se i tre punti sono allineati o meno ma ci dice se i vettori $(1, 2, 1, 0, 0)$, $(2, 2, -1, 0, 1)$ e $(3, k+1, -3, 0, k+1)$ sono linearmente indipendenti o meno. Un analogo errore era già stato commesso da molti studenti nell'esame precedente (20 gennaio 2010) e segnalato nei commenti.

Esercizio 3(a)

A.U. Per stabilire che non esiste nessun valore di k per cui il sistema ha esattamente una soluzione non è stato necessario calcolare il rango di alcuna matrice: è bastato osservare che il sistema ha più incognite che equazioni.

I.D.E.A Alcuni studenti hanno scritto che non c'è alcun valore per cui il sistema non ha soluzione perché il sistema non è Crameriano. Questo non è corretto: un sistema Crameriano ha un'unica soluzione ma esistono sistemi non Crameriani che hanno un unica soluzione. Consideriamo infatti il seguente esempio elementare:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Il numero delle equazioni e delle incognite non coincidono, quindi il sistema non è Crameriano, tuttavia il sistema ha, come ovvio, l'unica soluzione $x = 1$, $y = 0$.

Esercizio 3(b)

A.U. Per verificare se certi valori sono effettivamente soluzione basta fare una verifica diretta: risolvere il sistema e verificare se tra queste soluzioni c'è la soluzione data sarebbe stato molto più complicato.

I.D.E.A Alcuni studenti hanno sostituito correttamante i valori dati nel sistema ma quando sono arrivati alla condizione

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 5 = k - 1 \\ 9 + k = 0 \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ k = 6 \\ k = -9 \end{cases}$$

hanno concluso dicendo che i valori accettabili sono $k = 6$ e $k = -9$. Così non è: tutte le equazioni devono essere soddisfatte.

Esercizio 4(a-b)

I.D.E.A Ricordiamo che la somma delle dimensioni dell'immagine e del nucleo di un omomorfismo deve coincidere con la dimensione dello spazio di partenza (in questo caso 4). Alcuni studenti hanno trovato dimensioni incompatibili con questa condizione.

Esercizio 4(c)

A.U. Vediamo per esteso come determinare le matrici D e M. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4-x & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \\ &= (4-x) \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 2 & 4-x \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (4-x)(1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} - 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= ((4-x)(1-x)-4) \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = x^2(x-5)^2. \end{aligned}$$

Dunque la matrice A ha 0 e 5 come autovalori entrambi di molteplicità 2. Poiché la matrice A è simmetrica, è sicuramente diagonalizzabile. Possiamo allora scrivere immediatamente la matrice D:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

I due autovalori sono stati riportati ciascuno un numero di volte uguale alla propria molteplicità. Si sarebbe potuto scegliere anche un diverso ordine per gli autovalori: in tal caso anche la matrice M dovrebbe essere modificata di conseguenza.

Si noti inolre che dal punto b sappiamo che il nucleo ha dimensione 2: ciò ci conferma che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 2; se non avessimo trovato 0 come autovalore o se l'avessimo trovato con molteplicità diversa da 2 avremmo dovuto notare una contraddizione.

Occorre ora calcolare per ciascun autovalore una base ortonormale del relativo autospazio.

Osserviamo che al punto b abbiamo già calcolato una base (non necessariamente ortonormale) dell'autospazio relativo a 0, cioè del nucleo. Prendiamo allora la base di $E(0)$ formata dai vettori $(0, -2, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, -2)$ e ortonormalizziamo tale base. Fortunatamente tali vettori sono già ortogonali (hanno prodotto scalare nullo): dividendo ciascuno di essi per la propria norma troviamo una base ortonormale di $E(0)$ formata dai vettori $\left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Poiché nella matrice D abbiamo posto l'autovalore 0 in prima e seconda posizione, scriviamo le componenti rispetto alla base canonica dei vettori così ottenuti lungo la prima e seconda colonna di M.

Calcoliamo ora una base per l'autospazio relativo a 5. Occorre risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4-5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori del tipo $(2t, u, 2u, t)$ al variare di t e u in $\mathbb{R}$. Una base per $E(5)$ è allora formata dai vettori $(2, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 2, 0)$. Dobbiamo ora ortonormalizzare questa base: fortunatamente questi due vettori formano già una base ortogonale di $E(5)$ (se non ce ne fossimo accorti o se avessimo trovato una base differente non sarebbe stato comunque difficile trovare una base ortogonale con la prima parte del processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt). Per ottenere una base ortonormale di $E(5)$ basta ora dividere ciascun vettore della base ortogonale per la propria norma, ottenendo così i vettori $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Poiché nella matrice D abbiamo posto l'autovalore 5 in terza e quarta posizione, scriviamo le componenti rispetto alla base canonica dei vettori così ottenuti lungo la terza e quarta colonna di M.

È importante notare che il processo di ortonormalizzazione va applicato separatamente sulle basi di ciascun autospazio: se si considerasse una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A e si applicasse a questa base il processo di ortonormalizzazione si otterrebbe una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che potrebbe non essere formata da autovettori di A.

I.D.E.A Dal punto b sappiamo che il nucleo ha dimensione 2: ciò ci dice che l'autospazio relativo a 0 ha dimensione 2. Poichè inoltre la matrice è simmetrica, e, quindi diagonalizzabile, la dimensione di ciascun autospazio coincide con la molteplicità di ciascun autovalore. Pertanto, dal punto b già sappiamo, prima ancora di calcolare il polinomio caratteristico, che la matrice A ha 0 come autovalore con molteplicità 2. Alcuni studenti non hanno trovato 0 come autovalore o l'hanno trovato con molteplicità diversa da 2: in questo caso avrebbero dovuto notare una contraddizione.

I.D.E.A Alcuni studenti hanno preso una matrice di passaggio M le cui colonne formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$: una tale matrice non è ortogonale. Una matrice ortogonale è una matrice le cui colonne formano una base *ortonormale*.

I.D.E.A L'ordine in cui si mettono gli autovettori lungo le colonne di M deve essere coerente con quello in cui si mettono gli autovalori lungo la diagonale di D. Per intendersi: se si mette l'autovalore 0 in prima e seconda posizione e l'autovalore 5 in terza e quarta, allora la prima e seconda colonna di M devono corrispondere ad autovettori relativi a 0 e la terza e la quarta colonna devono corrispondere ad autovalori relativi a 5. Si può anche scegliere un diverso ordine degli autovalori nella matrice D (anche alternandoli) ma in tal caso occorre scegliere un ordine delle colonne di M compatibile. Alcuni studenti non hanno rispettato questo vincolo.

Esercizio 5(a)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno preso $y = m(x-7)+2$ come equazione del fascio di rette passanti per P. Ricordiamo ancora una volta che così facendo non si prendono tutte le rette passanti per P: manca infatti la retta di equazione $x = 7$. In questo caso particolare così facendo si trovano comunque le soluzioni corrette, ma ciò dipende solo dal fatto che la retta esclusa non è tangente alla circonferenza. Se la retta di equazione $x = 7$ fosse stata tangente, usando la forma $y = m(x - 7) + 2$ avremmo trovato una sola retta tangente.

Esercizio 5(b-c)

A.U. Per rispondere a queste due domande non è stato necessario determinare esplicitamente le equazioni delle due rette tangenti, né tantomeno i punti di tangenza R e S. La risposta può essere data con argomentazioni di geometria sintetica.

Esercizio 6(a)

M.A. Si poteva risolvere questo esercizio anche considerando le equazioni parametriche della generica retta passante per P:

$$\begin{aligned} x &= 1 + lt \\ y &= mt \\ z &= 1 + nt \end{aligned}$$

e imponendo poi il parallelismo del vettore direttore (l, m, n) con i due piani ottenendo così le condizioni $l\cdot 1+m\cdot(-1)+n\cdot 2 = 0$ e $l\cdot 1+m\cdot 0+n\cdot 1 = 0$. Risolvendo questo sistema si ottengono le equazioni parametriche di r che poi si possono trasformare in equazioni cartesiane.

Questo metodo è più lungo di quello presentato nelle soluzioni, tuttavia è possibile poi riutilizzare i parametri direttori della retta così trovati nella domanda c.

Esercizio 6(a-b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno trovato dato come risposta una singola equazione cartesiana. Nello spazio una singola equazione cartesiana rappresenta un piano e non una retta. Al di là dei possibili errori di calcolo quando si dà una risposta occorre quanto meno accorgersi che il tipo di oggetto è diverso da quello richiesto.

M.A. Si poteva risolvere questo esercizio anche considerando le equazioni parametriche della generica retta passante per P:

$$\begin{aligned} x &= 1 + lt \\ y &= mt \\ z &= 1 + nt \end{aligned}$$

e imponendo poi il parallelismo del vettore direttore (l, m, n) con i due piani ottenendo così le condizioni $l\cdot 1+m\cdot(-1)+n\cdot 2 = 0$ e $l\cdot 1+m\cdot 0+n\cdot 1 = 0$. Risolvendo questo sistema si ottengono le equazioni parametriche di r che poi si possono trasformare in equazioni cartesiane.

Questo metodo è più lungo di quello presentato nelle soluzioni, tuttavia è possibile poi riutilizzare i parametri direttori della retta così trovati nella domanda c.

Esercizio 6(c)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno osservato correttamente che le due rette r e s sono parallele. Per calcolarne poi la distanza hanno preso un punto a caso sulla prima retta e un punto a caso sulla seconda: così facendo si ottiene però un valore che dipende dai punti scelti. La distanza tra due rette (o tra due oggetti qualunque) è l'estremo inferiore delle distanze tra un punto della prima retta e un punto della seconda. In un caso come questo, in cui le due rette sono parallele, si ottiene tale estremo inferiore (che è anzi un minimo) prendendo un punto qualsiasi su una delle due rette e la sua proiezione ortogonale sull'altra retta.

I.D.E.A Alcuni studenti hanno calcolato la distanza tra le due rette prendendo un punto su una delle due rette (diciamo r) e calcolando la distanza di tale punto da uno dei due piani la cui intersezione dà la retta s.