Questo documento riporta:

- **M**otivazioni **A**lternative (**M.A.**). Mostriamo risoluzioni dell'esercizio differenti da quelle inserite nelle soluzioni. Alcune volte queste richiedono meno calcoli.
- **I**mpariamo **D**agli **E**rrori **A**ltrui (**I.D.E.A.**)
- **A**pprofondimenti **U**lteriori (**A.U.**)

I testi utilizzati si riferiscono a quelli della prima versione.

Esercizio 1(a)

M.A. Per vedere se i punti sono allineati si può anche trovare l'equazione della retta passante per due punti (per esempio A e B) e verificare se almeno uno degli altri punti non è contenuto in tale retta.

Esercizio 2(b)

I.D.E.A. Alcuni studenti hanno scritto che, se un omomorfismo non è suriettivo, allora è iniettivo. Questo non è corretto: vi sono omomorfismi che sono sia iniettivi che suriettivi (gli isomorfismi), altri che sono iniettivi e non suriettivi, altri non iniettivi e suriettivi, altri ancora che non sono né iniettivi né suriettivi.

Esercizio 3(a)

I.D.E.A. Molti studenti hanno scritto che $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ formano la base canonica. Ricordiamo che noi, per comodità, abbiamo chiamato *canoniche* alcune basi di alcuni particolari spazi: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n[x]$, $M(\mathbb{R}, p, q)$. In particolare un generico spazio vettoriale E non ha alcuna base canonica.

I.D.E.A. Molti studenti hanno scritto "Consideriamo il vettore $(2, 1, 0)$ di E". A stretto rigore ciò non è corretto dal momento che il vettore $(2, 1, 0)$ non è un vettore di E ma è un vettore di $\mathbb{R}^3$. Si sarebbe dovuto scrivere "Consideriamo il vettore di coordinate $(2, 1, 0)$ (relative alla base data)".

I.D.E.A. Molti studenti hanno scritto, in questo e negli altri esercizi, "Consideriamo **le basi** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$". Assolutamente no. Infatti $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ è **una** base formata da **tre** vettori. Semmai si sarebbe dovuto scrivere "Consideriamo i tre vettori della base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$"

I.D.E.A Molti studenti hanno scritto che il sottospazio $V + W$ è generato dai vettori $\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$. Si tratta di un grave errore. I due vettori trovati sono sì vettori di $V + W$ ma non sono a priori assolutamente generatori. Se non si ha chiaro ciò riguardare con cura questo argomento.

Esercizio 3(b)

M.A Molti studenti, dopo aver dimostrato correttamente che si $\dim(V + W) = 2$ hanno dedicato molto tempo nel cercare una base di $V \cap W$. Avrebbero risparmiato tutto questo tempo deducendo che da $\dim(V + W) = 2 = \dim V$ segue $V + W = V$ e quindi $V = W = V \cap W$.

I.D.E.A. Alcuni studenti, per determinare $V \cap W$ hanno cercato i valori di a, b, c, d per cui si ha $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$. Però, una volta determinata una di tali quaterne, per esempio la quaterna $(0, 1, 1, 1)$, hanno improvvidamente scritto che $(0, 1, 1, 1$ è un vettore di $V \cap W$. La quaterna non è assolutamente un vettore di $V \cap W$. Non è neanche un vettore di E. Si ha invece che il vettore $0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2$ è un vettore di $V + W$. Se non si ha chiaro ciò riguardare con cura come si determina l'intersezione di due sottospazi vettoriali.

Esercizio 4(a)

M.A. Alcuni studenti hanno calcolato la controimmagine del vettore $\mathbf{v}$. Metodo chiaramente corretto. Ma avrebbero potuto evitare molti calcoli osservando che f è suriettivo.

Esercizio 5(a)

M.A. Moltissimi studenti hanno sfruttato il fatto che la retta s simmetrica rispetto al punto A della retta r è parallela alla retta r. Ciò effettivamente è vero. Hanno pertanto fissato un punto B su r, determinato il suo simmetrico B' rispetto a A, ed hanno infine trovato la retta s passante per B' parallela a r.
Nel compito non era necessario dimostrare che la retta s simmetrica rispetto al punto A della retta r sia parallela alla retta r. Consigliamo però di dimostrare questo teorema per qualsiasi retta r e qualsiasi punto A.
Non leggere le righe seguenti prima di aver provato a dimostrare il teorema.
Se il punto A sta sulla retta r, la retta s coincide con la retta r (dimostrare ciò) e quindi le due rette sono parallele.
Supponiamo ora che il punto A non appartenga alla retta r. Consideriamo allora la retta s passante per i punti B' e C' simmetrici rispetto a A di due punti distinti B e C della retta r. Ma allora i due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ sono uguali (perché?) e quindi gli angoli $\angle BCA$ e $\angle B'C'A$ sono uguali (perché?). Le rette r e s sono quindi parallele (perché?). Si consiglia di fare la figura.

M.A. Molti studenti hanno innanzitutto determinato la retta r' passante per A e perpendicolare alla retta r. Hanno quindi determinato il punto $H = r \cap r'$, il punto H' simmetrico di H rispetto a r ed infine la retta s passante per H' e parallela a r. Tutto giusto. Non era però necessario scegliere proprio la proiezione di A su r: Qualsiasi punto B su r sarebbe andato bene.

Esercizio 5(b)

M.A. Che il punto A sia equidistante dalle rette r e s deriva dal fatto che il punto A è, per costruzione, equidistante dalle sue proiezioni H eH' sulle due rette. Inoltre da ciò deriva che si deve avere $\mathrm{d}(A, r) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(r, s)$.

Esercizio 6(b)

M.A. Alcuni studenti hanno determinato la retta s passante per A, contenuta in π e perpendicolare a r trovandone un'equazione parametrica. Una generica retta passante per A ha equazioni parametriche

$$s: \begin{cases} x = 3 + \ \ l \cdot t \\ y = 1 + m \cdot t \\ z = 2 + \ \ n \cdot t \end{cases}$$

Affinché la retta s sia perpendicolare alla retta r, il vettore $\mathbf{v} = (l, m, n)$, parallelo alla retta s, deve essere perpendicolare al vettore $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$ parallelo alla retta r.
Inoltre, affinché la retta s sia contenuta nel piano π, il vettore $\mathbf{v}$ deve essere perpendicolare al vettore $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$ perpendicolare al piano π. Cerchiamo pertanto le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 \cdot l + (-1) \cdot m + 0 \cdot n = 0 \\ 1 \cdot l + 1 \cdot m + 2 \cdot n = 0 \end{cases}$$

Esse sono $(k, k, -k)$. Posto $k = 1$, abbiamo la soluzione $(1, 1, -1)$. La retta cercata ha quindi equazioni parametriche

$$s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

I.D.E.A. Ricordiamo che nello spazio, data la retta r ed un suo punto A, esistono infinite rette passanti per A e perpendicolari alla retta r. Molti studenti hanno imposto la condizione di perpendicolarità tra due rette ma poi hanno scelto, più o meno a caso, una di queste rette. Questa retta, a meno che non si abbia un'enorme fortuna, non appartiene al piano π.