

CAPITOLO 1

Funzioni esponenziali e logaritmiche

1. Introduzione

Vedi:

Courant R. Robbins H. *Che cos'è la matematica*, Boringhieri
Cap. VIII, § 6

La presentazione tradizionale di a^x , $a > 0$, procede per i seguenti passi:

- si definisce a^n , $n \in \mathbb{N}$, come semplice prodotto di n fattori,
- si definiscono le radici $a^{1/n}$ e, quindi le potenze $a^{m/n}$
- si definisce a^x , $x \in \mathbb{R}$ per continuità.
- si definiscono i logaritmi come inverse delle esponenziali.

Il punto 4, il prolungamento per continuità non viene generalmente provato adeguatamente.

2. Il logaritmo

Consideriamo la funzione

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall x > 0$$

che, geometricamente, almeno per $x \geq 1$ rappresenta l'area in Figura 1

Proprietà della $\ln(x)$

•

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

derivata sempre positiva, quindi $\ln(x)$ è crescente.

- Scelto comunque $a > 0$ osserviamo che

$$\frac{d}{dx} \ln(ax) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(x)$$

da cui

$$\ln(ax) = \ln(x) + c, \quad \forall x$$

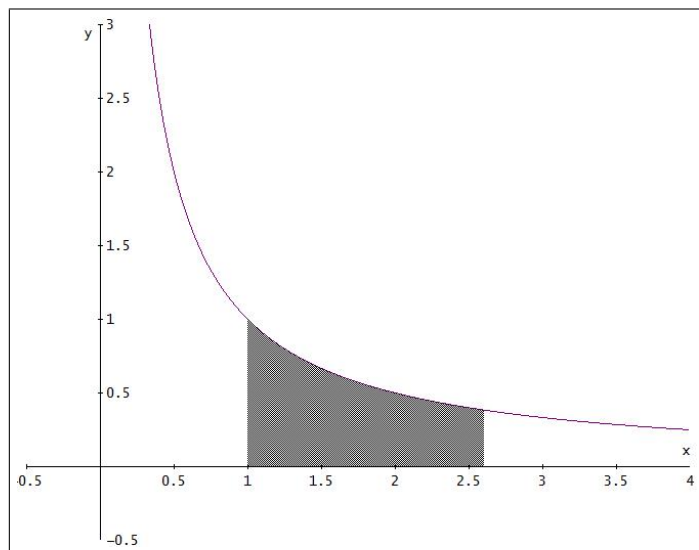


FIGURA 1. $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x \approx 2.6$

Scelto $x = 1$ e tenuto conto che $\ln(1) = 0$ si scopre che

$$\ln(a) = c$$

ovvero che

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

(la proprietà tipica dei logaritmi)

- Dalla proprietà precedente segue che

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \ln(x^{-1}) = -\ln(x)$$

Dalle proprietà osservate discende, vedi Figura 2, che $\ln(x)$

- é una funzione continua, definita per $x > 0$
- é crescente da $-\infty$ a $+\infty$,
- quindi esiste uno ed un solo valore x_0 in cui vale 1

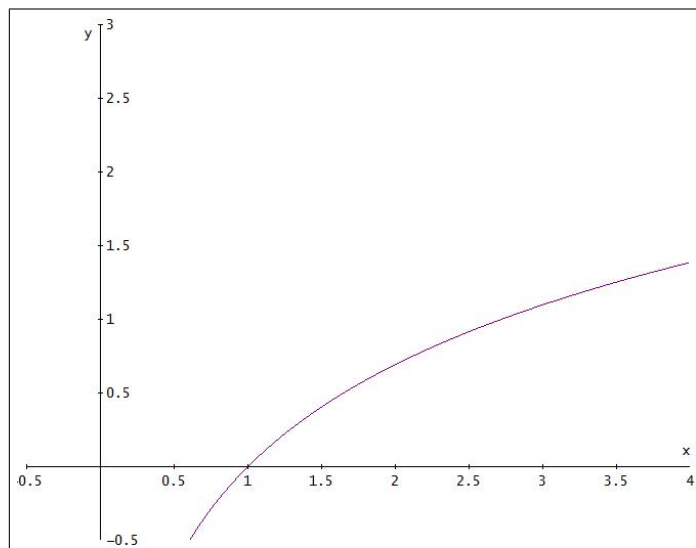
L'unico valore in cui $\ln(x)$ vale 1 prende il nome di e .

2.1. La funzione esponenziale. Tenuto presente che $y = \ln(x)$ é

- definita per $x > 0$
- é continua e crescente,
- prende valori da $-\infty$ a $+\infty$

si può definire la sua inversa $x = e^y$

- definita per $y \in (-\infty, +\infty)$
- continua e crescente,

FIGURA 2. Il grafico di $\ln(x)$

- che prende valori $x > 0$

Relazione fondamentale tra logaritmo ed esponenziale:

$$a = \ln(x) \quad \leftrightarrow \quad e^a = x$$

TEOREMA 2.1.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \rightarrow \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

DIMOSTRAZIONE.

$$e^a = x \quad \leftrightarrow \quad a = \ln(x)$$

$$e^b = z \quad \leftrightarrow \quad b = \ln(z)$$

$$\ln(xz) = \ln(x) + \ln(z) = a + b \quad \leftrightarrow \quad xz = e^{a+b}$$

ovvero

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

□

3. Altre basi

Sia

$$\alpha = \ln(a) \quad \leftrightarrow \quad a = e^\alpha$$

Tutte le funzioni esponenziali

$$a^x$$

si esprimono, per definizione, con

$$a = e^\alpha \quad \rightarrow \quad a^x = e^{\alpha x} = e^{x \ln(a)}$$

Il diverso segno del fattore $\ln(a)$ a seconda che $a < 1$ o $a > 1$ produce i due diversi caratteri di monotonia:

- a^x crescente se $a > 1$
- a^x decrescente se $a < 1$

CAPITOLO 2

I teoremi sulle funzioni continue

1. Applicazioni dell'esistenza zeri

Vedi:

Courant R. Robbins H. *Che cos'è la matematica*, Boringhieri
Cap. V, § 6

- Siano A e B due regioni limitate del piano: esiste una retta r che taglia A e B e le dimezza contemporaneamente.
- Data una regione del piano esiste una coppia di rette perpendicolari che la dividono in quattro parti equivalenti.

4. Teoremi sulle funzioni continue

Ora che abbiamo a disposizione un campionario vasto di funzioni continue e non, passiamo a stabilire alcune proprietà fondamentali che discendono dalla continuità: il *teorema dei valori intermedi* e il *teorema di Weierstrass* (che concerne il problema dell'esistenza di massimo e minimo). Entrambi discendono dal fatto che l'insieme dei numeri reali è *completo*, proprietà che traduce il fatto che la retta reale non ha buchi e che, rigorosamente, si basa sul postulato degli intervalli incapsulati e sull'assioma di Archimede. Nelle pagine che seguono ci dedichiamo prima a capire l'enunciato di questi due Teoremi fondamentali e solo successivamente ne vedremo le dimostrazioni.

Teorema del valore intermedio. Intuitivamente non c'è dubbio che se una funzione è continua, e quindi non ha salti, non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedi. Pensiamo ad un esempio banale: se il signor Lafcadio fa una passeggiata in montagna e ci comunica che è partito da un rifugio che si trova a 2200 metri s.l.m. ed è arrivato in cima ad una montagna alta 3000 metri s.l.m., è vero che ad un certo punto si è trovato ad un'altitudine di 2800 metri? E più in generale, si è mai

trovato ad una qualsiasi quota η compresa tra 2200 e 3000? La risposta (intuitiva) è “SI”, a meno che non abbia utilizzato il teletrasporto...

TEOREMA 4.1. Teorema del valore intermedio. *Sia $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora, per ogni $\eta \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = \eta$.*

Questo teorema dà condizioni sufficienti perchè l'equazione $f(x) = \eta$ abbia soluzione. Geometricamente, afferma che se i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico della funzione (continua) f giacciono su parti opposte rispetto alla retta $y = \eta$, allora il grafico di f interseca la retta in un punto intermedio.

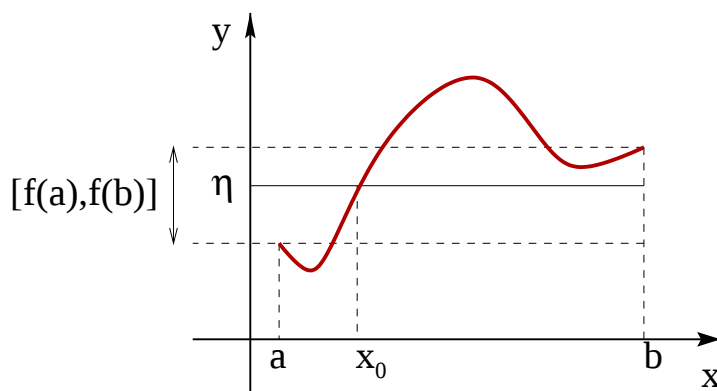


FIGURA 8. Il Teorema del valore intermedio

Controesempio 1. *f non è continua.* Nel caso di una funzione non continua la conclusione, in generale, è falsa. Ad esempio per la funzione

$$\text{SEGNO DI } x : \quad \text{sgn } x := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

non esistono soluzioni di $\text{sgn } x = \eta$ per ogni $\eta \notin \{0, \pm 1\}$.

Controesempio 2. *f definita in unione di intervalli disgiunti.* Consideriamo la funzione $f : I = [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora, nonostante $0 \in [-1, 1] = [f(-1), f(1)]$, l'equazione $\frac{1}{x} = 0$ non ammette soluzioni! Analogamente per $g : I = [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x$, ci sono dei valori $\eta \in [g(0), g(3)] = [0, 3]$ tali che l'equazione $x = \eta$ non ammette soluzioni in I .

Qui si è persa una proprietà fondamentale degli intervalli: la *connessione*, cioè la garanzia che se x_1, x_2 appartengono all'intervallo I , allora $[x_1, x_2] \subset I$. In qualche modo si può immaginare che una funzione continua non generi “strappi” o “buchi” nella trasformazione del dominio di partenza in quello di arrivo. E' chiaro però che se il dominio di partenza è “già strappato”, cioè sconnesso (come nel caso di due intervalli chiusi disgiunti), è possibile che ci siano buchi anche nel dominio di arrivo.

Controesempio 3. *L'importanza di essere reale (razionale non basta!).* Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Q} \cap [0, 2] \rightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ ed è sensato domandarsi se ci siano soluzioni $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]$ al problema $x^2 = 2 \in (0, 4)$. Come abbiamo già visto non c'è nessun valore razionale il cui quadrato sia 2. Quindi *il Teorema del valore intermedio non vale nei razionali!*

ESERCIZIO 4.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare, utilizzando il Teorema del valore intermedio, che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Cosa si può concludere se, invece, si suppone $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$?

Conseguenza banale del teorema del valore intermedio è il cosiddetto Teorema di esistenza degli zeri.

COROLLARIO 4.3. Teorema di esistenza degli zeri. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora, se $f(a)f(b) < 0$ (cioè se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno discorde), esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

ESERCIZIO 4.4. *Utilizzare il Teorema di esistenza degli zeri per dimostrare che ogni polinomio $p = p(x)$ di grado dispari ha sempre almeno uno zero.*

Soluzione. Se p è un polinomio di grado dispari

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \mp\infty,$$

e quindi esiste certamente $L > 0$ per cui $p(-L)p(L) < 0$. Di conseguenza, per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste $x_0 \in (-L, L)$ che azzerava il polinomio. $\square$

Una funzione strettamente monotona, cioè tale che

$$x < x' \iff f(x) < f(x') \quad \text{oppure} \quad x < x' \iff f(x) > f(x'),$$

essendo iniettiva, è invertibile. In generale non è vero il viceversa: esistono funzioni invertibili che non sono monotone (sapete trovarne un esempio?). Invece, nel caso di funzioni continue definite in un intervallo, la stretta monotonia è una condizione necessaria e sufficiente di invertibilità. La dimostrazione è conseguenza del Teorema del valore intermedio.

COROLLARIO 4.5. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Allora f è strettamente monotona se e solo se f è invertibile.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed invertibile, allora è anche strettamente monotona. Supponiamo per assurdo che non lo sia, allora esisterebbero $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$ per cui o $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_3) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_3) > f(x_2)$. Supponiamo di essere nel primo caso (l'altro si tratta in modo analogo) e scegliamo η tale che $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < \eta < f(x_2)$. Applicando il teorema del valore

intermedio agli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ si ottiene che esistono $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ per cui $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$ che contraddice l'ipotesi di invertibilità di f . ■

Se si sostituisce l'ipotesi di “ f strettamente monotona” con “ f non strettamente monotona” la conclusione non è più vera. L'esempio più banale che si può pensare è quello di una funzione costante, che, chiaramente non è invertibile. In realtà basta che la funzione f sia costante in un intervallo qualsiasi del suo insieme di definizione per non essere invertibile.

Teorema di Weierstrass. Un'altra proprietà fondamentale di una funzione continua f definita in un intervallo $[a, b]$ è l'esistenza del (valore) massimo e del (valore) minimo.

TEOREMA 4.6. Teorema di Weierstrass. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in [a, b]$ tali che $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Perseveriamo con la buona abitudine di cercare controesempi che mostrino il ruolo delle ipotesi del Teorema.

Controesempio 1. f non è continua. Se non è richiesta la continuità della funzione, è facile costruire casi di non esistenza di massimo/minimo. Ad esempio consideriamo $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Chiaramente $\inf_{[-1,1]} f(x) = 0$, ma $f(x) \neq 0$ per ogni x . Analogamente si possono costruire casi in cui non c'è valore massimo.

Controesempio 2. $I = (a, b)$ (intervallo aperto). Anche in questo caso si possono trovare molti esempi che mostrano che le conclusioni del Teorema non sono vere. Ad esempio, $f(x) = x^2$ in $(-1, 1)$ non ammette massimo (l'estremo superiore è 1), oppure $g(x) = \sin x$ in $(0, \pi/2)$ non ammette né massimo né minimo (l'estremo superiore è 1 e quello inferiore è 0). Si noti che in entrambi questi esempi, quello che si vorrebbe essere punto di massimo/minimo è uno degli estremi dell'intervallo, che però non appartiene ad I visto che l'intervallo è considerato aperto.

Controesempio 3. I illimitato. L'esempio più facile è $f(x) = x$ per $x \in \mathbb{R}$ che non ammette né massimo né minimo. Esistono anche funzioni limitate in domini illimitati che non ammettono né massimo né minimo, ad esempio, $f(x) = \arctan x$.

Se si combinano insieme il Teorema del valore intermedio ed il Teorema di Weierstrass si può dimostrare la seguente affermazione.

COROLLARIO 4.7. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'insieme immagine $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato.

Dimostrazione. ...sapete scriverla da soli? ■

1. Applicazioni dell'esistenza zeri

Vedi:

Courant R. Robbins H. *Che cos'è la matematica*, Boringhieri

Cap. V, § 6

- Siano A e B due regioni limitate del piano: esiste una retta r che taglia A e B e le dimezza contemporaneamente.
- Data una regione del piano esiste una coppia di rette perpendicolari che la dividono in quattro parti equivalenti.