Cenni sulle curve

Questa sintesi breve ed estremamente discorsiva può essere il primo passo verso un argomento importante, trattato ad es. nel testo di A. Donno, Elementi di Geometria Differenziale, ed. Esculapio, di facile lettura, conciso e chiaro.

Il concetto di *punto mobile* o *punto parametrico* di una retta, nel piano $\mathcal{P}$ o nello spazio $\mathcal{S}$, può essere generalizzato a quello di punto parametrico di una *curva*. Studiamo il caso tridimensionale, fissando un riferimento $(O, \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k})$ nello spazio $\mathcal{S}$. Dato un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$, consideriamo il punto

$$P(t) = (\,x(t), y(t), z(t)\,) \quad : \quad t \in I \ ,$$

dove x, y e z sono funzioni da I a $\mathbf{R}$ che supponiamo essere derivabili per ogni ordine. La differenza col caso della retta è che non ci limitiamo alle sole funzioni di primo grado, quindi del tipo $at + b$. L'insieme di questi punti $P(t)$, al variare di t, costituisce una **curva** γ. Ad es. la parametrizzazione $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ genera una curva che ricorda una scala a chiocciola. Essa gira attorno all'asse z, salendo. Mentre la x e la y, viste dall'alto, percorrono una circonferenza con periodo 2π, la variabile t sulla z crea il movimento sul terzo asse.

Il **vettore tangente** a γ nel punto $P_0 = P(t_0)$ è il vettore

$$P'(t_0) = (\,x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\,) \ .$$

Perché “tangente”? La retta passante per P_0 ed avente $P'(t_0)$ come vettore direttore è la posizione limite della **secante** passante per P_0 e per P_1 con P_1 tendente a P_0 lungo γ, dunque con $P_1 = P(t_0 + h)$ e h tendente a 0. Il vettore $\overrightarrow{P_0P_1}$ diventa microscopico, ma qui interviene il concetto di derivata: dividendo questo piccolissimo vettore per h, riusciamo a correre verso lo zero anche nel denominatore, tenendo testa alla forte riduzione, ottenendo un quoziente niente affatto microscopico: nasce un vettore ben visibile, le cui componenti sono le tre derivate delle componenti.

Nel caso unidimensionale, una funzione $(\,x, y(x)\,)$ con derivata 5 in un punto è, al microscopio in quel punto, una retta con coefficiente angolare 5, cioè localmente la y si muove di 5t (qui la x gioca il ruolo del parametro t). Con l'occasione, facciamo attenzione: il grafico di una funzione è sì una curva, ma la parametrizzazione è definita in $\mathbf{R}^1$, non in $\mathbf{R}^2$! Se dovessimo creare il *grafico* di una curva tridimensionale, dovremmo utilizzare $\mathbf{R}^4$ per l'ulteriore coordinata del parametro t. Le curve in $\mathbf{R}^1$, cioè le classiche funzioni di una variabile, si muovono lungo una retta, l'asse y, e acquistano le fattezze di una curva soltanto perché aggiungiamo il parametro su un secondo asse – l'asse delle ascisse.

Nel caso tridimensionale, una derivata uguale a (5,6,7) in un punto $P(t_0)$ indica che la funzione (cioè la curva) varia localmente, al microscopio, come la retta $(5t, 6t, 7t)$. Possiamo definire tale retta come la **retta tangente** a γ in P_0, purché trasliamo la giacitura nel punto P_0. Infatti la derivata contiene l'informazione della giacitura, mentre spetta a noi collocare la retta sul punto dato. Otteniamo quindi la retta $(x, y, z) = P_0 + (5t, 6t, 7t) = (\,x(t_0) + 5t, y(t_0) + 6t, z(t_0) + 7t\,)$. Il tutto può essere interpretato come uno sviluppo di Taylor (vettoriale) troncato al primo ordine:

$$P_1 = P_0 + (t_1 - t_0)P_0' + \eta \ ,$$

dove η è un'impurità trascurabile, perché tende a 0 quando t_1 tende a t_0, e soprattutto lo fa più velocemente di $(t_1 - t_0)$. Nel nostro caso possiamo scrivere

$$(\,x(t_1), y(t_1), z(t_1)\,) = (\,x(t_0), y(t_0), z(t_0)\,) + (t_1 - t_0)(5, 6, 7) + \eta \ .$$

Con un impeto di fantasia, possiamo dire che il vettore tangente è il più grande sforzo che uno spazio vettoriale possa fare per capire con una mente lineare la complessità del mondo non lineare, e per assecondarla nel migliore dei modi.

Supponiamo di dover costruire una struttura cilindrica, una sorta di torre, utilizzando mattoni comuni. Tracciamo la circonferenza della base, con diametro uguale a 6 metri, e poi... come posizioniamo il primo mattone? Fissiamo un punto della circonferenza e calcoliamo il vettore tangente alla circonferenza in quel punto (se la curva fosse parametrizzata da $(3\cos t, 3\mathrm{sen}\, t)$*, ad es. per* $t = 0$ *troveremmo il vettore* $(-3\mathrm{sen}\, 0, 3\cos 0) = (0, 3)$ *). Il vettore tangente fornirà la direzione migliore per seguire l'andamento del muro. Proseguiamo, modificando la direzione man mano che percorriamo la circonferenza, aiutandoci sempre col vettore tangente che varia. Alla fine otterremo una struttura curva? L'effetto da lontano sarà quello!*

Es. 1. Scrivere equazioni cartesiane della retta tangente alla curva γ di parametrizzazione $P(t) = (t^2 - 1, e^t, 3t)$ nel punto $P(0) = (-1, 1, 0)$.

<u>Sol</u>. Il vettore tangente relativo al punto dato è uguale a $(2t, e^t, 3)$ con $t = 0$, dunque $P'(0) = (0, 1, 3)$. La giacitura da traslare su P_0 è la retta $(x, y, z) = (0, t, 3t)$. Applicando – come di consueto – il teorema degli orlati alla matrice

$$\begin{pmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(orlando ad es. la sottomatrice 1×1 in basso a destra) otteniamo $r : x + 1 = 3y - z - 3 = 0$. In alternativa, come sappiamo, è possibile assorbire la t partendo dalle equazioni parametriche $x = -1, y = 1 + t, z = 3t$, dunque trovando $t = y - 1$, poi $z = 3(y - 1)$, ecc. Notiamo che il prezioso calcolo della derivata è un concetto superiore che si innesta su concetti di geometria già noti.

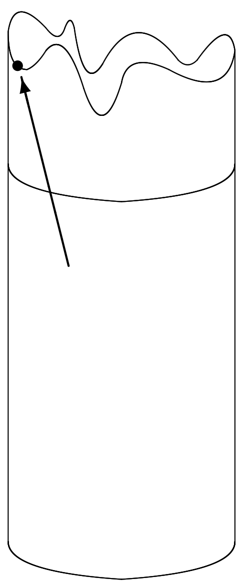
In realtà uno spazio vettoriale può avvicinarsi ancora meglio alla complessità di una struttura non lineare come è appunto una curva. Lo fa mediante il concetto di **piano osculatore**. Questo piano è la posizione limite (se esiste) del piano che contiene la retta tangente e un punto P_1, con P_1 tendente a P_0 lungo γ. Per definire la pendenza di tale piano occorrono (come sappiamo bene) due vettori linearmente indipendenti: nel nostro caso essi sono il vettore tangente $P'(t_0)$ e la sua *derivata*, $P''(t_0)$. Lungo la direzione suggerita da P'' possiamo dare un secco e breve colpo di timone che sposta impercettibilmente P', muovendoci lungo γ. Questa volta non stiamo studiando la variazione di un punto sulla curva, ma la variazione della sua variazione! (si pensi all'**accelerazione** come variazione della **velocità**, nel caso di funzioni in una variabile).

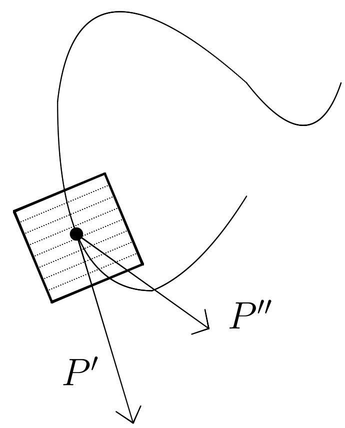
Osserviamo che P'' non è necessariamente ortogonale a P'. Potremmo comunque dimostrare che i due vettori sono linearmente indipendenti. In seguito definiremo un vettore effettivamente ortogonale alla retta tangente, ma per i nostri scopi è sufficiente individuare una base, a prescindere dall'angolo formato.

Abbiamo costruito la torre di mattoni; essa è alta 10 metri. Ora decidiamo di appoggiare sull'ultimo livello una superficie curva di acciaio sottile, con lo spessore di 5 millimetri, alta "circa" (vedremo perché) 4 metri, che possa far risaltare il monumento da lontano. La superficie nasce come un cilindro, solidale con l'orlo della torre, ma superiormente non termina con una circonferenza come per un comune cilindro. In effetti l'altezza non è affatto costante: il bordo superiore di questa superficie ha, su nostro progetto, un andamento sinuoso, liscio ma imprevedibile, e disegna una curva bizzarra che risplende con innumerevoli giochi di luce.

Non siamo ancora soddisfatti. Sul bordo superiore della superficie metallica, dunque proprio su questa curva terminale sinuosa, vogliamo appoggiare pannelli solari quadrati, piatti, ciascuno con il lato di 4 centimetri, così da formare una striscia che corra lungo tutto il bordo, coprendolo ed *ereditandone la sinuosità. Le orientazioni di questi specchi varieranno, e saranno rari gli specchi che guardano perfettamente in alto. Anzi, in certi punti essi saranno quasi verticali!*

Scegliamo dunque un punto sul bordo. Esisterà una e una sola pendenza privilegiata, per la mattonella da fissare. È proprio la pendenza del piano osculatore relativo al punto su cui poggia il baricentro dello specchietto solare. La pur piccola curvatura del bordo, nel punto scelto, ci consente di incollare l'oggetto nel modo migliore, sfruttando la rigidità e le proprietà geometriche locali della curva di acciaio. Notiamo che il compito sarebbe facile anche in presenza del semplice bordo di un cilindro (tutti gli specchi guarderebbero in alto) mentre avremmo difficoltà nel caso di un bordo localmente rettilineo (ad es. se costruiamo una torre con pianta quadrata anziché circolare). Infatti il piano osculatore di una retta non può essere definito – avremmo un fascio proprio di piani e non esisterebbe una pendenza privilegiata per incollare lo specchio.





L'esempio degli specchi solari appare troppo innaturale? Probabilmente lo stesso discorso apparirà più realistico se si applica a un contesto diverso: le cosiddette Montagne Russe. I dettagli sono lasciati al lettore. Un'ulteriore interpretazione è la seguente: dobbiamo verniciare un souvenir (?) costruito col filo di ferro incurvato e poi saldato, così da assomigliare al bordo del nostro primo esempio. Teniamo stretto con le dita, o con una pinza, un punto preciso dell'oggetto, e manteniamolo fermo per poi verniciarne una buona parte. Per ogni punto fissato, esiste una presa ottimale? Se fissiamo un punto che non ha curvatura, non sarà facile tenerlo fermo...

Es. 2. Scrivere un'equazione cartesiana del piano osculatore alla curva γ di parametrizzazione $P(t) = (t^2 - 1, e^t, 3t)$ nel punto $P(0) = (-1, 1, 0)$.

Sol.

L'utilizzo del piano osculatore è un'occasione per introdurre il **triedro di Frenet**. Si tratta di un insieme di tre versori applicati in un punto fissato di γ: $\mathbf{T}$ (tangente), $\mathbf{N}$ (normale), $\mathbf{B}$ (binormale). Essi sono a due a due ortogonali (formano una cosiddetta **base ortonormale**, come sappiamo); il triedro si muove lungo γ descrivendo il comportamento della curva. Vediamo questi vettori in dettaglio: il versore $\mathbf{T}$ non è altro che il normalizzato del vettore tangente. Il versore $\mathbf{N}$ è profondamente legato alla derivata di $\mathbf{T}$. Se effettuiamo questa derivata, infatti, otteniamo un vettore $\mathbf{T}'$ che genera insieme a $\mathbf{T}$ un piano. Si potrebbe dimostrare che il piano è proprio l'osculatore, dato che il sottospazio $\langle P', P'' \rangle$ coincide con $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T}' \rangle$. Oltretutto la costanza della lunghezza di $\mathbf{T}$ implica – mediante un calcolo interessante – che $\mathbf{T}'$ è ortogonale a $\mathbf{T}$. Se ora normalizziamo $\mathbf{T}'$, otteniamo $\mathbf{N}$; esso è il vettore **normale**. Sinteticamente, possiamo scrivere

$$\mathbf{T}' = k\mathbf{N} \ ,$$

dove k è la lunghezza di $\mathbf{T}'$ ed è nota come la **curvatura**. È possibile dimostrare che

$$k = \frac{||P' \wedge P''||}{||P'||^3} \ .$$

Il numero $\frac{1}{k}$ (se $k \neq 0$) è il **raggio di curvatura** della curva γ nel punto in esame. Infatti, sempre nello spirito della formula di Taylor, in un piccolissimo intorno del punto $P(t)$ possiamo approssimare la curva con un tratto di circonferenza (il **cerchio osculatore**) il cui raggio è il raggio di curvatura; il centro di questa circonferenza approssimante giace sulla retta identificata da $\mathbf{N}$; dunque esso è uguale a $P + \frac{1}{k}\mathbf{N}$. In breve, mediante la derivata seconda passiamo da un'approssimazione lineare a una quadratica, e sul versante geometrico passiamo da un tratto di retta a un tratto di circonferenza. La relativa formula di Taylor è

$$P_1 = P_0 + (t_1 - t_0)P_0' + \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 P_0'' + \eta \ .$$

Spingendoci al livello successivo, possiamo misurare la variazione della pendenza del piano osculatore (la "variazione della variazione della variazione"). Incontriamo così il terzo versore che costituisce il triedro di Frenet: il vettore **binormale** $\mathbf{B}$. Esso è semplicemente il prodotto vettoriale $\mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$, dunque è perpendicolare al piano osculatore. Siamo appunto interessati alla sua variazione, cioè a $\mathbf{B}'$, ed è possibile dimostrare che questa derivata è diretta come $\mathbf{N}$. In simboli,

$$\mathbf{B}' = \tau\mathbf{N} \ .$$

Il valore τ è la **torsione**, e misura appunto la variazione di pendenza. Dopo alcuni calcoli emerge la seguente formula.

$$\tau = -\frac{||(P' \wedge P') \times P'''||}{||P' \wedge P''||^2} \ .$$

Osserviamo che il calcolo di curvatura e torsione è basato sulla conoscenza delle derivate di P, vettori molto più accessibili rispetto al normale e al binormale. Nelle relative dimostrazioni si applicano varie proprietà delle derivate in modo da estrapolare k e τ a partire dalla parametrizzazione $P(t)$ e dalle definizioni dei tre versori di Frenet.