

## Esercizi complementari

(tratti dagli esercizi del prof. Alberto Del Fra)

### ⊙ Relazioni

1) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?

$$x, y \in \mathbf{R} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff x/y \in \mathbf{Q} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è divisibile per } 17 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x \neq y \quad \square$$

$$X, Y \text{ sottoinsiemi di un insieme } A \quad X\mathcal{R}Y \iff X \cup Y = X \quad \square$$

2) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme  $\mathbf{Z}$  sono di equivalenza:

$$x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff xy \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x/y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

3) Quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza?

$$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy \geq 0 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} - \{0\} \quad x\mathcal{R}y \iff xy < 0 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 + y^2 \text{ è pari} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{Z} \quad x\mathcal{R}y \iff x^3 + y^3 \text{ è divisibile per } 3 \quad \square$$

4) Determinare quali delle seguenti relazioni, definite nell'insieme dei polinomi in  $x$  a coefficienti reali, sono di equivalenza ( $\mathbf{R}^n[x]$  è il sottoinsieme dei polinomi di grado non superiore a  $n$ ):

$$p\mathcal{R}q \iff p - q \in \mathbf{R}^5[x] \quad \square \quad p\mathcal{R}q \iff p/q \in \mathbf{R}^3[x] \quad \square$$

$$p\mathcal{R}q \iff p + q \in \mathbf{R}^2[x] \quad \square \quad p\mathcal{R}q \iff pq \in \mathbf{R}^4[x] \quad \square$$

5) Determinare quali delle seguenti relazioni sono di equivalenza nell'insieme  $\mathbf{Z}$  degli interi relativi:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x + y \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff xy \text{ è un quadrato perfetto} \quad \square$$

$$\text{nessuna delle precedenti} \quad \square$$

6) Detto  $U$  l'insieme degli esseri umani, quali delle seguenti relazioni in  $U$  sono simmetriche ma non transitive?

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è fratello di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è amico di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è concittadino di } y \quad \square$$

$$x, y \in U \quad x\mathcal{R}y \iff x \text{ è padre di } y \quad \square$$

7) Quali delle seguenti relazioni verificano la proprietà transitiva ma non la simmetrica?

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff xy = 1 \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x < y \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{N} \quad \square$$

$$x, y \in \mathbf{R} \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbf{Z} \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = 0 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 - xy = 0 \quad \square$$

$$x\mathcal{R}y \iff x^3 - y^3 = 0 \quad \square \quad x\mathcal{R}y \iff x^2 - y = 0 \quad \square$$

8) Determinare quali delle seguenti relazioni definite nell'insieme dei poligoni piani sono transitive ma non simmetriche:

- $x$  ha la stessa area di  $y$
- $x$  ha area maggiore di quella di  $y$
- $x$  ha area metà di quella di  $y$
- $x$  ha area minore di quella di  $y$
- nessuna delle precedenti

## ⊙ Applicazioni

9) Quali delle seguenti applicazioni sono iniettive? Quali sono suriettive?

	<i>In</i>	<i>Su</i>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^4 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{\sin x} \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^3 - 3x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow \sin^3 x \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow 2x + 1 \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : x \in \mathbf{R} \longrightarrow e^{2x} \in \mathbf{R}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10) Determinare le seguenti controimmagini per le sottoelencate funzioni da  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$ :

- $f^{-1}(0)$  per  $f : x \longrightarrow \cos x$
- $f^{-1}(2)$  per  $f : x \longrightarrow x^2$
- $f^{-1}(0)$  per  $f : x \longrightarrow e^x$
- $f^{-1}(3)$  per  $f : x \longrightarrow 2x$

## ⊙ Matrici

11) Con operazioni elementari di riga, ridurre a forma triangolare superiore la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Dedurre il determinante ed il rango di } A.$$

12) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & \pi \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

13) Calcolare l'inversa di  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ .

14) Assegnate le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = (-1 \ 0 \ 2)$ , calcolare la matrice  $A \cdot B \cdot C$  e determinarne il rango.

15) Assegnate  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = (-1 \ 3)$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , calcolare la matrice  $3(A \cdot B) - 2C$ .

### ⊙ Spazi $\mathbf{R}^n$

16) Quali dei seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti? Quali costituiscono un insieme di generatori per lo spazio  $\mathbf{R}^n$  a cui appartengono? Quali costituiscono una base?

	<i>Ind</i>	<i>Gen</i>	<i>Base</i>
$\mathbf{R}^2 : \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^3 : \{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^2 : \{(1, 2), (3, -1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^3 : \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^2 : \{(1, 1), (2, 2)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(2, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 5)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\mathbf{R}^4 : \{(2, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 5), (1, 1, 1, 1)\}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

17) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

	<i>V</i>	<i>F</i>
Due vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire una base per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire una base per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire una base per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di $\mathbf{R}^3$ possono costituire un insieme di generatori per $\mathbf{R}^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Due vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tre vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quattro vettori di $\mathbf{R}^3$ possono essere linearmente dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

18) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni in  $\mathbf{R}^n$ :

	<i>V</i>	<i>F</i>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono lin. dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. indipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono lin. dipendenti $\implies \underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. dipendenti.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

19) Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^3$  sono sottospazi?

- $\left\{ \left( a + b, \frac{a-b}{a^2+1}, a \right) : \forall a, b \in \mathbf{R} \right\}$
- $\{(\sqrt{2}a + b, a - \sqrt{2}b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, a^2, a^3) : \forall a \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, b, a) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(a, a\sqrt{b}, b) : \forall a, b \in \mathbf{R}\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 - x_2 = 0\}$
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$

20) Dei sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^3$  che siano risultati sottospazi nell'esercizio precedente, determinare una base e quindi la dimensione.

21) Assegnato un sottospazio  $S$  di  $\mathbf{R}^n$  sia  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base di  $S$ . Dato un vettore  $v_4 \in S$  distinto dai vettori di  $\mathcal{B}$ , stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

- |  | $V$                      | $F$                      |
|--|--------------------------|--------------------------|
| $\{v_1, v_2\}$ è una base di $S$                           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $v_1, v_2$ sono linearmente indipendenti                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di generatori di $S$           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $S$                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un insieme di generatori di $S$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

22) Assegnato un sottospazio  $S$  di  $\mathbf{R}^n$  di dimensione 3, stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

- |  | $V$                      | $F$                      |
|--|--------------------------|--------------------------|
| Comunque si prendano due vettori di $S$ , essi sono lin. indipendenti.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano due vettori di $S$ , essi sono lin. dipendenti.       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in $S$ due vettori lin. indipendenti.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano tre vettori di $S$ , essi sono lin. indipendenti.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano tre vettori di $S$ , essi sono lin. dipendenti.       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in $S$ tre vettori lin. indipendenti.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano quattro vettori di $S$ , essi sono lin. indipendenti. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Comunque si prendano quattro vettori di $S$ , essi sono lin. dipendenti.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Esistono in $S$ quattro vettori lin. indipendenti.                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Il vettore nullo di $\mathbf{R}^n$ può non appartenere ad $S$ .            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Preso un vettore $v$ in $S$ , il vettore $-v$ deve appartenere ad $S$ .    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## ⊙ Cambiamenti di coordinate

23) Determinare la matrice  $M$  del cambiamento di coordinate da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  e quella del cambiamento di coordinate da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  (dunque l'inversa di  $M$ ), essendo:

- A)  $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{v'_1 = (2, 3), v'_2 = (3, -2)\}$ ;
- B)  $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{v'_1 = (1, -1), v'_2 = (0, 1)\}$ .

In entrambi i casi, dette  $(k_1, k_2)$  e  $(k'_1, k'_2)$  le coordinate di un vettore  $v$  rispetto a  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ , rispettivamente, scrivere le formule che esprimono  $(k'_1, k'_2)$  in funzione di  $(k_1, k_2)$ .

## ⊙ Sistemi lineari

24) Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

$$\begin{array}{l}
 a : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad b : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases} \quad c : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 2 \end{cases} \\
 d : \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases} \quad e : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \quad f : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \end{cases} \\
 g : \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 1 \\ 3x + 3y - 15z = 2 \end{cases} \quad h : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \quad i : \begin{cases} 2x + 2y - 10z = 2 \\ 3x + 3y - 15z = 3 \end{cases} \\
 \ell : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + z = 4 \end{cases} \quad m : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 4 \end{cases} \quad n : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + 3y + 5z = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

25) Per ciascuno dei precedenti sistemi lineari, descrivere le mutue posizioni delle rette (2 incognite) o dei piani (3 incognite) coinvolti.

26) Determinare i valori del parametro reale  $t$  per i quali il sistema  $\begin{cases} x + ty = 2 \\ x + 2ty = t \end{cases}$  ammette una sola soluzione, infinite soluzioni, nessuna soluzione.

27) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni

(il tipo del sistema è definito come il tipo della matrice incompleta;  $\mathbf{0}$  è una colonna di zeri):

	$V$	$F$
Un sistema $n \times n$ , $AX = B$ , con $\det A = 0$ , non ha soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $n \times n$ , $AX = \mathbf{0}$ , con $\det A = 0$ , ha infinite soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $2 \times 3$ , $AX = B$ , con $\text{rank}(A) = 2$ , ha $\infty^1$ soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$ , $AX = B$ , con $n > m$ , è necessariamente compatibile.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$ , $AX = \mathbf{0}$ , con $n > m$ , ha infinite soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un sistema $m \times n$ , $AX = \mathbf{0}$ , con $n > m$ , ha $\infty^{n-m}$ soluzioni.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $\bar{X}$ è soluzione del sistema $AX = \mathbf{0}$ , anche $k\bar{X}$ lo è, $\forall k \in \mathbf{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $\bar{X}$ è soluzione del sistema $AX = B$ , con $B \neq \mathbf{0}$ , anche $k\bar{X}$ lo è, $\forall k \in \mathbf{R}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

28) Assegnate le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , determinare la matrice  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ , tale che risulti  $AX = B$ .

29) Quali delle seguenti applicazioni  $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  sono lineari?

$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_3^2, x_1 + x_2 + x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1 - x_2}{x_1}, x_1, x_3 \right)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{2}x_1 - x_2 + \pi x_3, (\log 3)x_1 - x_2, (\sin 3)x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1} + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3 + 1, x_1 + 3x_3)$	<input type="checkbox"/>
$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, 0)$	<input type="checkbox"/>

30) Determinare  $L^{-1}(0, 0, 0)$ , controimmagine del vettore nullo secondo l'applicazione lineare  $L : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , data da  $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3)$ . Dimostrare che  $L^{-1}(0, 0, 0)$  è un sottospazio di  $\mathbf{R}^3$ . Determinarne una base e la dimensione.

31) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definita da  $L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$ , rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . Se  $(k_1, k_2)$  sono le coordinate di un vettore  $\underline{v}$  rispetto a  $\mathcal{B}$ , quali sono le coordinate di  $L(\underline{v})$  rispetto a  $\mathcal{B}$ ?

32) Date le applicazioni lineari  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\bar{L} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definite da  $L(x, y) = (x + 5y, 2x - y)$ ,  $\bar{L}(x, y) = (3x - y, x + 2y)$ , determinare le applicazioni composte  $\bar{L}L$ ,  $L\bar{L}$ .

33) Data l'applicazione lineare  $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definita da  $L(x, y) = (2x - y, x + 2y)$ , dimostrare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.

### ⊙ Autovalori ed autovettori

34) Determinare autovalori ed autovettori per le matrici  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Dire per ognuna di esse se è diagonalizzabile ed in caso affermativo, calcolarne la forma diagonale.

35) Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

		$V$	$F$
Un autovalore è necessariamente diverso da zero.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se un autovalore è zero, allora ammette un autovettore nullo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Un autovettore è necessariamente diverso dal vettore nullo.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Il polinomio caratteristico di una matrice $n \times n$ è di secondo grado.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice $A$ sono gli autovettori di $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Le radici del polinomio caratteristico di una matrice $A$ sono gli autovalori di $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Gli autovettori di una matrice $A$ sono tutte le soluzioni di $AX = \mathbf{0}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### ⊙ Geometria analitica piana

Nei prossimi esercizi è sottintesa l'assegnazione nel piano di un riferimento cartesiano di origine  $O$  e di versori degli assi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ .

36) Assegnati i vettori  $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ , determinare il vettore  $(\vec{v} \times \vec{w})\vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{u})\vec{w}$ .

37) Determinare il modulo del vettore  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ .

38) Determinare il versore  $\vec{u}$  che ha la stessa direzione e verso opposto di  $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ .

39) Determinare il coseno dell'angolo tra i vettori  $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j}$ .

40) Determinare i vettori di modulo 2 paralleli a  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$ .

41) Determinare i versori  $\vec{u}$  che formano un angolo  $\theta = \arccos \frac{3}{5}$  con  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ .

42) Determinare la distanza tra i punti  $P_1(1, -1)$ ,  $P_2(-4, 5)$ .

- 43) Determinare l'area del triangolo di vertici  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(0, 1)$ .
- 44) Determinare un'equazione (cartesiana) della retta passante per  $P_1(2, 4)$ ,  $P_2(-1, 3)$ .
- 45) Determinare un'equazione cartesiana, ed equazioni parametriche, della retta passante per  $P_1(3, 4)$ ,  $P_2(3, -5)$ .
- 46) Determinare l'equazione della retta passante per  $P_0(1, 2)$ , parallela alla retta passante per i punti  $P_1(1, 3)$ ,  $P_2(-1, 4)$ .
- 47) Determinare l'equazione della retta passante per  $P_0(1, 2)$ , perpendicolare alla retta passante per i punti  $P_1(1, 3)$ ,  $P_2(-1, 4)$ .
- 48) Determinare parametri direttori di  $r : 2x + 3y - 1 = 0$ .
- 49) Determinare i versori paralleli a  $r : 2x + 3y - 1 = 0$ .
- 50) Determinare i versori perpendicolari a  $r : 2x + 3y - 1 = 0$ .
- 51) Determinare il coseno dell'angolo ottuso formato dalle rette  $r : x + y + 3 = 0$ ,  $r' : 5x - 2y + 8 = 0$ .
- 52) Determinare la proiezione del vettore  $\vec{v}(2, -1)$  sulla retta  $r : 3x + 4y - 1 = 0$ , orientata secondo il verso delle  $x$  crescenti.
- 53) Determinare la distanza tra il punto  $P_0(1, -3)$  e la retta  $r : x + 2y - 1 = 0$ .
- 54) Tra le rette parallele a  $r : x + 2y = 0$ , determinare quelle che hanno distanza  $\sqrt{5}$  da  $P_0(1, -1)$ .
- 55) Assegnati i punti  $A(0, 0)$  e  $B(5, 12)$ , determinare i punti  $C$  per i quali il triangolo  $ABC$  risulti isoscele e rettangolo in  $A$ .
- 56) Assegnato il triangolo di vertici  $A(0, 0)$ ,  $B(2, -4)$ ,  $C(4, 6)$ , determinare sulla mediana del lato  $BC$  i punti che distano  $2\sqrt{5}$  da  $A$ .
- 57) Nel piano, al variare di  $(a, b)$  in  $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$ , l'equazione  $ax + by + 1 = 0$  rappresenta:  
un fascio improprio di rette  la totalità delle rette per l'origine   
un fascio proprio di rette  nessuna delle precedenti
- 58) Determinare l'equazione (canonica) della circonferenza passante per il punto  $(2, 1)$  e tangente nell'origine la retta di equazione  $2x - 9y = 0$ .
- 59) Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sull'asse  $x$  e passante per i punti  $(2, 1)$  e  $(3, \sqrt{2})$ .
- 60) Determinare le circonferenze di raggio  $\sqrt{5}$ , tangenti alla retta  $r : 2x + y - 2 = 0$  nel punto  $A(-1, 4)$ .

## ⊙ Spazio euclideo

- 61) Determinare l'equazione del piano passante per i punti  $(2, 3, 0)$ ,  $(3, 0, -2)$  e  $(4, -3, 4)$ .
- 62) Determinare il piano per l'origine parallelo alle rette  $r : x - 2z = y + z - 1 = 0$  e  $s : x - 3z + 2 = y + 2z + 4 = 0$ .

- 63) Determinare l'equazione del piano passante per il punto  $(0, 1, 2)$  e contenente la retta di equazioni  $x - 2y + 4z = 2x + y - z + 1 = 0$ .
- 64) Determinare il piano contenente la retta  $r : x + y - 3 = x - 2y + z = 0$  e parallelo alla retta  $s : x - z = y - 2z = 0$
- 65) Determinare il piano per l'origine che risulta parallelo alla retta  $r : x + z + 1 = y - 3z = 0$  e perpendicolare al piano  $v : 2x + y - 3z = 0$
- 66) Determinare il piano  $\alpha$  contenente la retta  $r : x - 5z = y - 2z = 0$  e perpendicolare al piano  $\beta : x + y + z = 0$ .
- 67) Determinare il piano  $\alpha$  passante per i punti  $(1, -1, 2)$ ,  $(2, 3, -1)$  e perpendicolare al piano  $\beta : x + y + z = 0$ .
- 68) Determinare la proiezione ortogonale della retta  $r : x - 3y + 4z = 2x + 5y - z = 0$  sul piano di equazione  $3x - y + 7z = 0$ .
- 69) Determinare la proiezione ortogonale del punto  $(1, 2, 3)$  sul piano di equazione  $3x - y + 2z = 0$ .
- 70) Determinare il piano per il punto  $(2, 3, 0)$  perpendicolare alla retta  $r : x - 2y = 0, x - y + z = 0$ .
- 71) Individuare, tra le seguenti, le coppie di piani perpendicolari:  
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : x + y + 3z - 7 = 0 \quad \square$   
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : 6x + 3y - 2z - 7 = 0 \quad \square$   
 $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0; \quad \beta : 5x - 9y - 1 = 0 \quad \square$
- 72) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A(1, 0, 2)$  e  $B(1, 3, 0)$ .
- 73) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della retta passante per i punti  $(1, 2, -1)$ ,  $(3, 2, 0)$ .
- 74) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto  $(-1, 0, 4)$  e parallela alla retta di equazioni parametriche  $x = 2t, y = -t, z = 3t$ .
- 75) Tra le seguenti rette (date in equazioni parametriche o cartesiane) determinare quelle parallele al piano  $\pi : 2x - y + z = 0$ :  
 $x - 2z + 1 = y + z + 3 = 0 \quad \square \quad x = t + 1, y = 2t - 4, z = 0 \quad \square$   
 $x = 2t, y = -t + 3, z = t - 1 \quad \square \quad x - z + 2 = y - 3z = 0 \quad \square$   
nessuna delle precedenti  $\square$
- 76) Determinare parametri direttori delle rette parallele ai piani  $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$  e  $\beta : 2x - y + 3z + 4 = 0$ .
- 77) Scrivere equazioni parametriche per la retta  $r$  di equazioni cartesiane  $x - y + z + 4 = x + y - 5z + 2 = 0$ .
- 78) Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per il punto  $(0, 2, 1)$  e parallela alla retta di equazioni  $x + 3y + z + 1 = x - 2y - z = 0$ .

- 79) Determinare la retta per l'origine che risulti incidente le rette  $r : x - 2z + 1 = y + 3z - 5 = 0$  e  $s : x - 5z = y + z + 1 = 0$ .
- 80) Determinare i valori del parametro  $t$  per i quali i seguenti piani si incontrano in esattamente un punto:  $(4 - t)y - 3z + 1 = 0$ ,  $x + 2y - z = 0$ ,  $2y - (1 + t)z + 2 = 0$ .
- 81) Individuare i valori del parametro  $t$  per i quali le rette:  $x - 3z - 1 = y - 2z - 3 = 0$  e  $s : x - 5z - 1 = y - 4z - t = 0$  sono complanari.
- 82) Determinare i valori di  $t$  per i quali il sistema  $x + y + 2z - 2 = x + y + tz - 2 = tx + y + z - 1 = 0$  rappresenta una retta.
- 83) Nello spazio euclideo l'equazione  $x + y - 1 = 0$  rappresenta:  
una retta del piano  $xy$   un piano contenente l'asse  $z$    
un piano parallelo al piano  $xy$   un piano parallelo all'asse  $z$
- 84) Quali dei seguenti sistemi rappresentano una retta?  
 $x + 2y - 3z + 1 = 5x + 10y - 15z + 2 = 0$    
 $2x - y + 3z + 5 = x + 3y - 5z = 3x + 2y - 2z + 5 = 0$    
 $3x - y + z = x + 2y - z = 2x + 2y + 3z = 0$
- 85) Assegnati i punti  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(t, -1, t - 1)$ , determinare i valori del parametro reale  $t$  per i quali l'area del triangolo  $ABC$  vale  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ .
- 86) Assegnate le rette  $r : x - 2z + 1 = y + z + 3 = 0$  e  $s : x + z = y - z - 2 = 0$ , determinare  $\cos \widehat{rs}$ .
- 87) Determinare i versori della retta  $r : x + y - 3z + 2 = x - y + 2z = 0$ .
- 88) Determinare parametri direttori delle rette perpendicolari alle rette  $r : x - 5z + 1 = y + z = 0$  e  $s : x - 3z = y + 2z = 0$ .
- 89) Determinare la minima distanza tra le rette sghembe  $r : x + 2y - 2z = x + y = 0$  e  $s : x - z = y - 2z - 2 = 0$ .
- 90) Determinare la distanza tra le rette parallele  $r : x - y = y - z = 0$  e  $s : x - y + 5 = y - z + 5 = 0$ .
- 91) Determinare la distanza del punto  $P(1, -3, 3)$  dalla retta  $r : x - 2z = y + 3z = 0$ .
- 92) Determinare i piani contenenti la retta  $r : x + y - 5z = x - y + 1 = 0$  e che abbiano distanza  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  dall'origine.
- 93) Determinare i punti della retta  $r : x - z - 1 = y - 2z + 1 = 0$  aventi distanza 1 dal piano  $\pi : 3x + 2y - 6z = 0$ .
- 94) Sulla retta per  $P(1, 1, 1)$  perpendicolare al piano  $u : x + 2y - 3z = 0$  determinare i punti che distano 5 dal piano  $v : x + 2y - 2z + 3 = 0$ .
- 95) Dati i punti  $A(0, 0, 0)$  e  $B(1, 1, 2)$ , determinare i punti  $P$  della retta  $r : x - z = y - 2z + 1 = 0$  per i quali il triangolo  $ABP$  abbia area  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .
- 96) Determinare sulla retta  $r : x - z + 1 = y - 2z = 0$  i punti la cui distanza dall'origine sia 3.

- 97) Dato il piano  $\pi : 2x - 3y + 6z = 0$ , determinare i piani aventi distanza 2 da  $\pi$ .
- 98) Determinare l'equazione della sfera avente centro nell'origine e tangente al piano  $x - 2y + 2z + 2 = 0$ .
- 99) Tra le sfere di centro il punto  $(3, 0, 0)$ , determinare quella tangente al piano di equazione  $x + y + z = 0$ .
- 100) Determinare l'equazione della sfera avente centro sulla retta  $r : x - y = y + z = 0$  e passante per i punti  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 0, 2)$ .

## ⊙ Vettori liberi

- 101) Mostrare con un esempio che l'operazione di prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa.
- 102) Assegnati i vettori liberi  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ , determinare  $(\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})\vec{w}$ .
- 103) Assegnati i vettori liberi  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ , determinare  $[(\vec{v} \wedge \vec{w}) \times (\vec{w} \wedge \vec{v})]\vec{v}$ .
- 104) Assegnati i vettori  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ , determinare il vettore  $\vec{w}$  parallelo a  $\vec{u}$  tale che  $\vec{w} \times \vec{v} = 5$ .
- 105) Determinare i valori dei parametri  $s, t$  per cui il vettore  $(s + 1)\vec{i} + (s + t)\vec{j} + t\vec{k}$  è parallelo al vettore  $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ .