**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**

**Geometria**

***Diario delle lezioni (a.a. 2022 - 2023)***

**Mar. 27-09-2022 (aula 3):** Premessa. La geometria e l’algebra nel loro ruolo reciproco: l’algebra dà spesso informazioni dettagliate sugli enti geometrici e aiuta a classificarli, a conoscerli meglio; la geometria contribuisce invece a dare un senso realistico alle formule algebriche e a collocarle in un contesto più generale ed espressivo. Un esempio di utilizzo delle potenzialità del calcolo algebrico: “matrice” relativa alle posizioni di due rette nello spazio. Cenno al “determinante” . Se esso non è nullo, le rette sono “sghembe” (non parallele né incidenti). Un esempio di “geometrizzazione” dell’algebra: sistema lineare in tre incognite e relativa intersezione di piani.

Presentazione del corso, modalità degli esami, ruolo degli esercizi assegnati al fine di una corretta preparazione. Tutoraggio e ricevimento. Testi consigliati.

Inizio del corso. Geometria del piano: vettori, matrici, determinanti in questo contesto bidimensionale, relativamente semplice. Vettori nel piano Oxy. Vettore direttore di una retta. Componenti di un vettore e relazione col coefficiente angolare. Vettori perpendicolari. Scrittura dell’equazione cartesiana di una retta passante per un punto e avente un fissato vettore direttore (proporzionalità tra le componenti di vettori opportuni).

**Mer. 28-09 -** Lezione non effettuata per sopraggiunti motivi familiari.

**Gio. 29-09:** Vettori geometrici; spazio vettoriale formato dai vettori geometrici mediante la somma tra vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Vettori numerici. Versori. Vettore direttore (-b,a) e giacitura di una retta. Equazioni parametriche di una retta e passaggio all’equazione cartesiana. Determinante di ordine 2. Scrittura dell’equazione cartesiana mediante un determinante (da proseguire).

**Ven. 30-09:** Approfondimenti sui vettori. Vettori numerici e spazi Rn . Differenza di vettori geometrici e numerici, associatività e commutatività della somma. Simboli **i** , **j** per i versori degli assi. Coordinate di un vettore rispetto ai vettori **i** , **j** . Approfondimenti sulle rette: passaggio per due punti dati e riformulazione con la simbologia vettoriale, tornando in particolare sulle equazioni parametriche.

Nuovo argomento (primi cenni): combinazioni lineari di vettori geometrici, di vettori numerici, di equazioni. Fascio proprio di rette e scrittura mediante una combinazione lineare. Robustezza della scrittura mediante combinazioni lineari rispetto all’utilizzo del coefficiente angolare *m* (una retta non viene contemplata con questo secondo metodo).

**Mar. 04-10 -** Lezione posticipata a seguito di accordi con la prof.ssa Amar.

**Mer. 05-10 (quattro ore, 15.00 – 19.00):** Sistemi lineari di rette nel piano Oxy. Matrici. Matrice incompleta e matrice completa associate a un sistema lineare. Righe della matrice intese come vettori numerici. Equazioni eliminabili mediante combinazioni lineari ed equazioni che invece bloccano il sistema e lo rendono privo di soluzioni.

Metodo della riduzione a gradini. Operazioni elementari. Pivot. Scelta dei parametri eventuali. Esempi di sistemi senza soluzione. Sistemi in tre incognite.

Teorema da dimostrare nelle prossime settimane: le righe nulle corrispondono ad equazioni inizialmente superflue e viceversa (occorrerà uno studio generale sui vettori numerici).

Esercizi vari. Punto mobile. Formula di Cramer per sistemi in due incognite e suoi limiti di impiego. Dimostrazione della formula.

**Gio. 06-10:** Operazioni elementari con bilanciamento (colloquialmente, “contrappesi”) per una riduzione a gradini più agevole.

La riduzione a gradini evidenzia le righe che sono combinazioni lineari di altre righe e indica quali sono invece le righe essenziali, non eliminabili (teorema importante, da dimostrare).

Le righe di una matrice sono vettori di uno “spazio Rn ”. Sottospazi dello spazio vettoriale R3 generati dai vettori numerici con tre componenti (primi esempi). I sottospazi sono mondi chiusi all’interno dei quali è possibile sommare vettori e moltiplicarli per scalari senza appunto uscire dal sottospazio.

Vettori generatori di un sottospazio e vettori linearmente indipendenti. Basi (primi cenni, sempre negli spazi Rn ).

Simbolo *u* che denota la presenza di *u* parametri nell’insieme delle soluzioni di un sistema lineare. In particolare, se scriviamo *u*=0 (quindi con 0 soluzioni) intendiamo che il sistema ha un’unica soluzione, senza parametri.

**Ven. 07-10:** (*Gli argomenti che stiamo trattando prendono spunto dai sistemi lineari e consentono di avere una visione più generale, dall’alto, delle strutture algebriche in gioco, con conseguenze importanti nella gestione dei sistemi lineari stessi, come vedremo entro poche settimane.*)

Spazi vettoriali. Esempi vari, anche con polinomi, matrici, vettori geometrici. Rappresentazione spaziale di un vettore numerico di R3 , come vettore geometrico. Matrici simme­triche e matrici diagonali. Notazione aij (riga *i* e colonna *j*)per indicare il relativo numero all’interno della matrice. Esempi di sottospazi di spazi vettoriali. Dimensione di un sottospazio (teorema da dimostrare, come già menzionato: la dimensione è il numero INVARIANTE di vettori che costitui­scono qualunque base del sottospazio). Cenno alla gerarchia delle dimensioni nello spazio: sottospazio “zero” contenuto in una retta contenuta in un piano contenuto nello spazio ambiente (dimensioni 0, 1, 2, 3). Ricerca di una base per un dato sottospazio. Verifica della chiusura rispetto alle due operazioni per dimostrare che siamo in presenza di un sottospazio. Al contrario, ricerca di difetti che pregiudicano gli assiomi di spazio vettoriale, se vogliamo dimostrare che un insieme NON è un sottospazio.

**Mar. 11-10:** Definizioni equivalenti di base: insieme minimale di generatori, insieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Ulteriori esempi di spazi vettoriali formati da matrici: matrici triangolari. Prodotto di matrici. La definizione di questo prodotto, non certo banale, è motivata dal significato della matrice incompleta di un sistema. Esempi vari di prodotti di matrici in vista della definizione generale.

**Mer. 12-10:** Prodotto di matrici. Compatibilità tra matrici al fine di effettuare il prodotto. Non commutatività. Matrice identità. Matrice inversa e suo impiego per la risoluzione di sistemi con matrice incompleta quadrata, quindi n×n (questo è un cenno alla formula di Cramer). Vettore colonna “trasposto”.Sistemi omogenei. Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo costituiscono un sottospazio di Rn (dimostrazione mediante il linguaggio delle matrici).

**Gio. 13-10:** Operazioni elementari generiche e loro reversibilità. Teorema: il numero di pivot è invariante: non dipende dalla riduzione a gradini effettuata, data una matrice iniziale. In particolare: il sottospazio generato dalle righe della matrice iniziale è lo stesso di quello generato dalle righe della matrice ridotta a gradini, ma queste ultime sono linearmente indipendenti. Il teorema dimostrato è basato in realtà su un ulteriore teorema, più generale, che dimostreremo presto (teorema già menzionato): le basi di un fissato spazio vettoriale hanno tutte lo stesso numero di elementi.

“Rango” di una matrice come numero di pivot oppure come massimo numero di righe linearmente indipendenti. Esempio di discussione (**attenzione alla modifica**) del rango di una matrice con parametro, mediante lo studio dei pivot in funzione del parametro.

**Ven. 14-10:** Il teorema di Rouché-Capelli nella versione del rango per pivot. Discussione di sistemi con parametro (confronto tra i ranghi della matrice incompleta e della completa, con valutazione del numero di soluzioni al variare del parametro).

(Come già accennato in varie occasioni, la riduzione a gradini è utile anche solo per trovare un insieme di righe linearmente indipendenti.)

Teorema della cardinalità delle basi, sintesi della dimostrazione mediante le combinazioni lineari ricorsive (manca una piccola parte conclusiva, da vedere).

**Mar. 18-10:** Panoramica sintetica su alcuni argomenti trattati e su varie nozioni generali, in vista dell’introduzione del determinante e anche della matrice inversa.

Conclusione della dimostrazione del teorema sulla cardinalità delle basi. Sottospazi e metodo 1-0. Selezione di vettori linearmente indipendenti al fine di trovare una base, una volta effettuato il metodo 1-0. Metodo 1-0 applicato al sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 2 equazioni in 4 incognite. Approfondimento: soluzioni di un sistema con termini noti non nulli: relazione con le soluzioni del rispettivo sistema omogeneo; interpretazione geometrica, come “giacitura più spinta”, anche in spazi con dimensioni maggiori di 3 (ad esempio in R4 ). Matrici: associatività del prodotto (senza dimostrazione). Matrice trasposta: le matrici simmetriche sono le matrici invarianti rispetto alla trasposizione.

**Mer. 19-10:** Definizione di *determinante* mediante il Primo Teorema di Laplace: la formula può essere applicata a qualunque riga o colonna di una matrice quadrata. Complementi algebrici. Relazione tra il determinante e i pivot (da dimostrare): se il determinante iniziale è nullo, lo è anche il determinante a seguito della riduzione a gradini; se non era nullo, non lo è neanche alla fine. Conseguenza: una matrice quadrata qualsiasi ha il determinante nullo se e solo se le sue righe (o anche colonne) sono linearmente dipendenti. Esempi vari di calcolo di determinanti anche in relazione alla riduzione a gradini. Esempi con matrici non quadrate: campionamento di determinanti. Sottomatrici, primi esempi.

**Gio. 20-10:** Calcolo di un determinante di ordine 4 in modo ricorsivo (cenno della procedura, certamente complicata al crescere dell’ordine della matrice quadrata in esame). Determinante di matrici triangolari (prodotto degli elementi sulla diagonale principale, dimostrazione mediante l’applicazione ricorsiva del teorema di Laplace lungo l’ultima riga). Sottomatrici e orli. Rango per minori (massimo ordine di una sottomatrice che abbia determinante non nullo). Teorema degli orlati (senza dimostrazione). Esempi di calcolo del rango di una matrice mediante i determinanti e gli orli. Discussione di un sistema mediante il rango per minori della matrice incompleta in relazione al rango della matrice completa.

**Ven. 21-10:** Il teorema di Binet (senza dimostrazione). Matrice inversa e formula generale (caso 3×3 con simboli generalizzabili). Non esiste la matrice inversa di una matrice con determinante nullo - dimostrazione mediante il teorema di Binet. Applicazione della matrice inversa a un sistema con matrice incompleta invertibile e riformulazione mediante la regola di Cramer. Sistemi con parametro e rango per minori: le sottomatrici individuano le equazioni da eliminare e le incognite da parametrizzare.

**Mar. 25-10:** Proprietà del determinante e conseguente effetto delle operazioni elementari sul determinante (dimostrazione). Scambio di due righe. Matrice con righe uguali. Esempi vari. Calcolo di un determinante mediante una prima semplificazione della matrice grazie ad operazioni elementari.

**Mer. 26-10:** Dimostrazione della correttezza della formula per il calcolo della matrice inversa. Metodo di Sarrus per il determinante di ordine 3 e breve sintesi sulla definizione originale del determinante (il metodo di Sarrus è un caso particolare).

**Gio. 27-10:** Risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite mediante il rango per minori e la regola di Cramer.

Primi cenni di geometria dello spazio. Rappresentazione cartesiana di punti e vettori in un riferimento Oxyz. Funzioni di due variabili, rappresentazione nello spazio. Interpretazione della soluzione parametrica del sistema precedente come una retta nello spazio. Vettore spinta e giacitura di una retta. Assorbimento del parametro e passaggio alle equazioni cartesiane. La retta necessita di due equazioni, non una sola, mentre una sola equazione rappresenta un piano (ciò è stato semplice da vedere, per ora, nel caso di piani speciali). Traccia lasciata da un piano descritto da due sole incognite.

Approfondimento: determinante della matrice trasposta e rango per colonne.

**Ven. 28-10:** Rappresentazione di operazioni elementari attraverso prodotti di matrici, a sinistra. Metodo di Gauss-Jordan: doppia riduzione a gradini e trasformazione nella matrice identità. Matrice “registro” che diventa alla fine la matrice inversa richiesta.

La doppia riduzione è anche utile per potenziare la tecnica risolutiva dei sistemi lineari.

Conclusione della prima parte del corso e avviamento verso la geometria dello spazio.

**Mer. 02-11:** Riprendiamo il nuovo argomento della geometria dello spazio: un’equazione lineare in tre incognite rappresenta un piano. Equazione tronca e relativa giacitura. Sottospazio e vettore spinta. Ricostruzione dell’equazione cartesiana mediante assorbimento dei due parametri presenti nelle equazioni parametriche. Vettore relativo a due punti dati (estremi). Costruzione di un’equa­zione cartesiana mediante il determinante, imponendo la dipendenza lineare di tre vettori opportuni. Condizione di parallelismo tra un piano e un vettore (annullamento dell’equazione della giacitura, tronca). Condizione di appartenenza per un punto del piano (annullamento dell’*intera* equazione).

**Gio. 03-11:** Costruzione di un’equazione cartesiana di un piano, date alcune specifiche iniziali (passaggio per punti e/o parallelismo rispetto a un vettore). In alternativa al determinante (o alle equazioni parametriche, con assorbimento dei parametri) è utile il metodo dell’equazione generica ax+by+cz+d=0 che dà luogo a un sistema omogeneo con parametro ininfluente. Equazione carte­siana di una retta passante per due punti (metodo del rango per minori potenziato col teorema degli orlati). Combinazioni lineari di equa­zioni e fasci propri di piani.

**Ven. 04-11:** Posizioni reciproche di un piano e una retta, o di due piani, o di due rette, in relazione ai ranghi del relativo sistema. Nel caso delle rette abbiamo 4 configurazioni e in particolare definiamo le rette *sghembe* se esse non sono contenute in alcun piano. Le rette sghembe sono caratterizzate dal determinante non nullo della relativa matrice completa 4 per 4. Più in dettaglio, i ranghi uguali a 2 e 3 corrispondono alle rette parallele, i ranghi uguali a 3 e 4 corrispondono alle rette sghembe (da dimostrare in seguito).

Vettore direttore di una retta nello spazio: esso è – come per il caso bidimensionale – una delle 1 soluzioni del relativo sistema omogeneo (giacitura). Esiste anche una formula per calcolarlo, l’abbiamo trattata oggi e la dimostreremo in seguito (non sempre questa formula si rivela più veloce del calcolo diretto della soluzione col metodo di sostituzione!).

**Mar. 08-11:** Esercizi e approfondimenti su rette e piani nello spazio. Equazioni cartesiane a confronto con le equazioni parametriche: convenienza di una o dell’altra versione in funzione del problema da risolvere. Punto mobile Q(t), quindi parametrico, su una retta, come candidato per la risoluzione di specifici problemi (ad esempio, la ricerca di punti Q(t) che hanno una data distanza da un punto fisso). Rette sghembe: definizioni equivalenti. Distanza tra due punti nello spazio: si tratta della lunghezza di un idoneo vettore, lunghezza ottenibile come radice della somma di tre lunghezze (cateti) al quadrato (teorema di Pitagora iterato).

**Mer. 09-11:** Proseguiamo con esercizi vari su rette e piani nello spazio. Metodo dei tre vettori linearmente indipendenti utilizzato per stabilire se due rette sono sghembe (è richiesta la forma parametrica). Rappresen­tazione geometrica di alcune rette nello spazio. Traslazione di rette incidenti e nuova configurazione (rette sghembe). Ricerca dell’equazione cartesiana di un piano contenente una data retta (utilizziamo il fascio proprio di piani) e parallelo a un’altra (metodo del determinante nullo, per la matrice incompleta).

**Gio. 10-11:** Ulteriori esercizi e approfondimenti su rette e piani, in vista dell’introduzione del prodotto scalare, nella prossima lezione. Nota: il vettore direttore ottenuto mediante la formula dei minori di ordine 2 è definito usualmente come (l,m,n).

Utilizzo di un solo parametro, anziché due, per la definizione del fascio di piani, con rinuncia ad uno degli infiniti piani. Retta incidente due date rette sghembe e passante per un punto fissato: metodo dei punti mobili e metodo dei fasci di piani. Allineamento di punti e corrispondente proporzionalità di due vettori.

**Ven. 11-11:** Fasci impropri di piani. Formula (l,m,n): verifica della correttezza mediante la sostituzione formale nelle due equazioni che definiscono la retta data.

Nuovo argomento: prodotto scalare “ × ” e ortogonalità; angoli e distanze tra enti geometrici. Prodotto scalare tra vettori numerici, definito sia in dimensione 2 che 3. Formula del coseno (da dimostrare nelle prossime lezioni). Vettori geometrici ortogonali. Significato geometrico del vettore (a,b,c) relativo all’equazione ax+by+cz+d=0 di un piano (vettore ortogonale); analogia col vettore (a,b) ortogonale a una retta di equazione ax+by+c=0 nella geometria bidimensionale. Angolo tra due rette incidenti e angolo tra un piano e una retta (attenzione, in questo secondo caso otteniamo il seno, non il coseno!).

**Mar. 15-11:** Proiezione ortogonale (numero reale) di un vettore lungo la retta definita da un altro vettore. Formula della distanza punto-piano (analoga alla distanza punto-retta nella geometria bidimensionale) con dimostrazione basata sulla proiezione ortogonale. Distanza minima tra due rette sghembe (metodo del piano contenente una retta e parallelo all’altra). Cenno ad altri metodi per calcolare la distanza, attraverso i punti parametrici sulle rette.

**Mer. 16-11:** Esercitazione con simulazione di una parte di prova scritta mediante esercizi con punteggio (senza valutazione). Gli argomenti sono stati trattati nelle lezioni precedenti.

Nota: sulla base dei precedenti argomenti è stato possibile studiare anche il *coseno dell’angolo formato da due piani*, spostando il problema sull’angolo formato dai due rispettivi vettori normali (a,b,c), (a’,b’,c’).

**Gio. 17-11:** Equazioni cartesiane della retta che realizza la minima distanza tra due rette sghembe: metodo dei due piani perpendicolari al “terreno” (piano contenente la “strada” e parallelo al “viadotto”).

Formula per il calcolo della proiezione ortogonale mediante il prodotto scalare: dimostrazione nel caso bidimensionale (l’idea nel caso tridimensionale è simile ma la dimostrazione è un po’ più complessa). Ricordiamo che questa formula è equivalente alla nota formula del coseno.

Prime nozioni sulle *funzioni* (*o applicazioni*) *lineari*. Definizione di linearità mediante le due proprietà relative alla somma e al prodotto con uno scalare (caso delle funzioni da R1 a R1 ).

**Ven. 18-11:** Esercizi e approfondimenti. Utilizzo di diverse tecniche per scrivere l’equazione cartesiana di un piano con specifiche assegnate. Applicazioni del teorema di Binet.

Cenno alle funzioni iniettive, in vista del nuovo argomento sulle applicazioni lineari.

**Mar. 22-11:** Funzioni non lineari e approssimazione mediante funzioni lineari (cenno allo sviluppo di Taylor). Esempi di funzioni lineari e anche non lineari con dominio e codominio uguali a R1 o R2 . Coordinate polari e trasformazione di un opportuno rettangolo in un quarto di cerchio (esempio di non-linearità).

Matrice di un’applicazione (o funzione) lineare da R2 a R2 , primi cenni. L’immagine del quadrato con coordinate 0,1 è un parallelogramma e la funzione è prevedibile completamente, una volta noto il parallelogramma. Composizione di funzioni e rispettivo prodotto di matrici. La matrice inversa rappresenta la funzione inversa della funzione lineare (purché quest’ultima sia invertibile!). Iniettività.

**Mer. 23-11:** Suriettività.Iniettività e suriettività in relazione al rango della matrice. Matrici di vari tipi, al variare del dominio e del codominio (spazi Rn , per ora). Descrizione geometrica della funzione in esame. Le colonne generano l’immagine. Autovettori, primi esempi per R2.

Compilazione del questionario OPIS.

**Gio. 24-11:** Autovettori e autovalori, definizione per gli spazi Rn . Autospazi. Autovalore nullo: il relativo autospazio viene trasformato (“collassa”) nell’origine. Utilità degli autovettori nella rappresentazione geometrica di una funzione. Diagonalizzazione: la matrice iniziale viene chiusa dalla matrice degli autovettori (in colonna) a destra e dall’inversa di quella matrice a sinistra, ottenendo la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale.

**Ven. 25-11:** Nucleo di una applicazione lineare *f* tra spazi Rn ( Ker( *f* ) ). Il nucleo è un sottospazio del dominio. Relazione tra l’autovalore zero (nel caso di dominio uguale al codominio) e il nucleo: esso è il relativo autospazio. Una funzione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo consiste del solo vettore nullo (dimostrazione formale, più generale, e dimostrazione mediante il rango). Rappresen­tazione geometrica di funzioni tra spazi Rn (con n ≤ 3) mediante l’analisi del nucleo come giacitura. Studio di varie funzioni lineari. Autovettori: caso dell’autospazio di dimensione 2 per una funzione assegnata tra spazi R3.

**Mar. 29-11:** Conclusione dell’esercizio sull’autospazio di dimensione 2 (il secondo autospazio ha invece dimensione 1). Scelta degli autovettori mediante il consueto metodo 1-0.Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un dato autovalore. Diagonalizzazione mediante il cambia­mento di coordinate (cenno alle matrici del cambiamento di coordinate). Schema della composi­zione di tre matrici. Esempio di molteplicità geometrica minore di quella algebrica. Rotazioni: esse non ammettono autovettori. Analogia con la traduzione in inglese del condizionale, prima persona (autovalore: (I would) / to ).

**Mer. 30-11:** Cambiamento di coordinate e relativa composizione di matrici. Matrice di un’appli­cazione lineare, definizione generale; questa definizione vale per spazi vettoriali generali, non necessaria­mente Rn , argomento da approfondire. Esempio: derivata dei polinomi di grado al più 3 e relativa matrice rispetto alla base {1, x, x2 , x3 }.

**Gio. 01-12:** Applicazioni lineari tra spazi vettoriali generici. L’immagine dei vettori di una base assegnata è sufficiente per determinare l’immagine di qualunque altro vettore mediante la legge di linearità. Ricerca degli autovettori grazie alla matrice rispetto a basi assegnate. Matrici simmetriche e teorema spettrale. Se gli autovettori sono versori e sono ortogonali, la matrice a sinistra del cambiamento di coordinate per la diagonalizzazione è semplicemente la trasposta (dunque non l’inversa!) della matrice a destra (cenno della dimostrazione). Rotazioni. Cenno alla rotazione delle coniche – ultimo argomento, da trattare alla fine del corso. Approfondimenti vari sulle applicazioni lineari.

**Ven. 02-12:** Nuovo argomento: approfondimenti sui sottospazi, ortogonalità, proiezioni ortogo­nali.

Proiezione ortogonale vettoriale. Coefficiente di Fourier. Componente ortogonale. Ortogonaliz­zazione di due vettori geometrici nello spazio. Ortogonalizzazione di un terzo vettore geometrico rispetto a due vettori tra loro ortogonali (primo esempio di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, livello 2).

**Mar. 06-12:** Proiezione ortogonale lungo il vettore normale di un piano (metodo alternativo per calcolare la proiezione ortogonale nel piano, come sottrazione di due vettori. Ricerca di una base ortogonale per un sottospazio di R4 definito da due equazioni cartesiane (metodo 1-0 seguito dal procedimento di Gram-Schmidt). Proiezione ortogonale in sottospazi Rn generali. Scrittura di equazioni cartesiane a partire da una base di un dato sottospazio di R4, abbassando il rango di una matrice opportuna, con l’ausilio del teorema degli orlati).

**Mer. 07-12:** Intersezione di sottospazi in Rn ; “somma” di sottospazi (sottospazio generato col contributo di entrambe le rispettive basi). Calcolo di una base dell’intersezione attraverso le combinazioni lineari dei vettori delle due basi (dunque attraverso le equazioni parametriche). Calcolo alternativo, più lungo, utilizzando le equazioni cartesiane dei sottospazi e formando un sistema. Formula di Grassmann (per ora senza dimostrazione) e applicazioni in R3 e R4 .

**Ven. 09-12:** Esercizi vari, sugli argomenti recenti, con temporanea pausa nel programma (riprendiamo martedì prossimo).

**Mar. 13-12:** Sottospazio ortogonale a un dato sottospazio di Rn . Le equazioni del sistema definiscono immediatamente i vettori generatori di tale sottospazio, mediante i coefficienti stessi delle equazioni. Esempi di sottospazi ortogonali. Prodotto vettoriale e calcolo dell’area di un triangolo.

**Mer. 14-12:** Esercizi ed approfondimenti vari sull’ortogonalità e i sottospazi. Somma diretta di sottospazi. Somma diretta nel caso particolare di un sottospazio e del suo sottospazio ortogonale. Coordinate di un vettore rispetto a una base ortogonale: esse sono proprio i rispettivi coefficienti di Fourier. Prodotto vettoriale: dimostrazione della formula assumendo valida la distributività (non dimostrata in questo corso).

**Gio. 15-12:** Coniche. Ellisse: definizione mediante i due fuochi. Matrice 2 per 2 relativa al polinomio di secondo grado che definisce una conica. Cambiamento di coordinate (rotazione) e conse­­guente trasformazione dell’equazione di un’ellisse in un’equazione canonica.

**Ven. 16-12:** Esercizi di approfondimento sugli autovettori e sulle rotazioni di una conica. Caso della parabola: un autovalore è nullo. Direttrice ed eccentricità. Definizione della parabola e defini­zione alternativa di ellisse ed iperbole mediante l’eccentricità.

**Mar. 20-12:** Coniche come sezioni di un cono a due falde infinito. Direttrice ed eccentricità, approfondimenti. Trasformazione dell’equazione della direttrice mediante le formule inverse. Rota­zione di una parabola e sostituzione delle *x* e *y* nei monomi di grado 1.

**Mer. 21-12:** Seconda **e**sercitazione con simulazione di una parte di prova scritta mediante esercizi con punteggio (senza valutazione): autovettori, proiezioni ortogonali, rotazione di un’iper­bole.

**Gio. 22-12 (10.50 – 11.50):** Il segno del determinante contraddistingue il tipo di conica. Formula dell’eccentricità. Matrice di ordine 3 relativa a una conica. Metodo del determinante invariante per trovare una forma canonica (cenno). Conclusione del corso.

**…………………………………………….**

**Lun. 16-01-2023 (11.00 – 13.00, aula 6):** Incontro con ricevimento ed esercizi su richiesta, in vista dell’esame di domani 17-01-2023.

**Ven. 02-02-2023 (14.00 – 16.00, aula 6):** Incontro con ricevimento ed esercizi su richiesta, in vista dell’esame di lunedì 06-02-2023.

*• Libro di testo (compresi gli esercizi nei relativi paragrafi):*

Cap. 1. Cap. 2: per ora soprattutto 2.1 e 2.2. Completare il Cap. 2. 3.1 – 3.5 e poi il resto del Cap. 3. Per l’inizio di novembre: 4.1 – 4.7 . Fine del cap. 4. Cap. 6. Cap. 5. Cap. 7. Appunti della Prof.ssa Carrara sulle coniche. Cap. 8 (per alcune nozioni basilari ed approfondimenti).