⊙ In $\mathbf{R}^4$ possono esistere 5 generatori di un sottospazio di dimensione 2. [V]

⊙ Le matrici invertibili 3×3 costituiscono un sottospazio nello spazio delle matrici 3×3. [F]

⊙ La regola di Sarrus può essere estesa al caso 4×4 sommando 24 prodotti. [V]

⊙ Il rango per colonne può essere minore del rango per pivot. [F]

⊙⊙ Calcolare il determinante del prodotto di matrici $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \pi & 4 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}^2$. [$16\pi^2$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle (1,1),(1,2),(2,2),(-\sqrt{3},-\sqrt{5}) \rangle$ in $\mathbf{R}^2$. [2]

⊙⊙ Calcolare il modulo del prodotto vettoriale $(2,0,1) \wedge (3,3,0)$. [$\sqrt{54}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione lineare suriettiva da $\mathbf{R}^9$ allo spazio delle matrici simmetriche 2×2. [6]

....

⊙ In $\mathbf{R}^4$ non possono esistere 5 vettori linearmente dipendenti. [F]

⊙ Le matrici simmetriche 3×3 formano un sottospazio nello spazio delle matrici 3×3. [V]

⊙ La matrice opposta di una matrice 5×5 ha lo stesso rango. [V]

⊙ Il rango per colonne può essere maggiore del rango per pivot. [F]

⊙⊙ Calcolare il determinante del prodotto di matrici $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}^2$. [$64\pi^2$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle (1,1,1),(-\sqrt{5},-\sqrt{5},-\sqrt{5}),(0,0,0) \rangle$ in $\mathbf{R}^3$. [1]

⊙⊙ Calcolare il modulo del prodotto vettoriale $(1,0,2) \wedge (3,2,0)$. [$\sqrt{56}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione lineare suriettiva da $\mathbf{R}^9$ allo spazio dei polinomi di grado minore di 6. [3]

....

⊙ In $\mathbf{R}^9$ possono esistere 8 vettori linearmente indipendenti. [V]

⊙ Le matrici non invertibili 3×3 costituiscono un sottospazio nello spazio delle matrici 3×3. [F]

⊙ La matrice opposta di una matrice 4×4 ha lo stesso determinante. [V]

⊙ Il rango della matrice completa può valere il doppio del rango dell'incompleta. [V]

⊙⊙ Calcolare il determinante del prodotto di matrici $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ \pi & 7 \end{pmatrix}^2$. [$400\pi^2$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle (1,1,0),(1,2,0),(2,2,0),(-\sqrt{3},-\sqrt{5},0) \rangle$ in $\mathbf{R}^3$. [2]

⊙⊙ Calcolare il modulo del prodotto vettoriale $(1,0,2) \wedge (3,3,0)$. [9]

⊙⊙ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione lineare suriettiva da $\mathbf{R}^9$ allo spazio dei polinomi di grado minore di 7. [2]

....

⊙ In $\mathbf{R}^5$ possono esistere 3 generatori di un sottospazio di dimensione 4. [F]

⊙ Le matrici 3×3 a valori non negativi costituiscono un sottospazio nello spazio delle matrici 3×3. [F]

⊙ La regola di Sarrus può essere estesa al caso 4×4 sommando 10 prodotti. [F]

⊙ Il rango di una matrice 1×7 vale 1 in ogni caso. [F]

$\odot\odot$ Calcolare il determinante del prodotto di matrici $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ \pi & 7 \end{pmatrix}^2$. [$256\pi^2$]

$\odot\odot$ Calcolare la dimensione del sottospazio $\langle (1,1),(2,2),(0,0),(-\sqrt{3},-\sqrt{3})\rangle$ in $\mathbf{R}^2$. [1]

$\odot\odot$ Calcolare il modulo del prodotto vettoriale $(1,0,2)\wedge(1,3,0)$. [7]

$\odot\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione lineare suriettiva da $\mathbf{R}^{10}$ allo spazio delle matrici triangolari superiori 3×3. [4]

Esercizio 1.

[2 p.] In un riferimento $Oxyz$, dimostrare che l'asse x e la retta $r : x-y=y-z-1=0$ sono sghembe.

Sol. I vettori direttori $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$ non sono proporzionali, inoltre non esiste intersezione (nessun punto $(t,0,0)$ soddisfa entrambe le equazioni di r).

[2.5 p.] Tra i punti di r, determinare quelli distanti $\sqrt{3}$ dal punto $(2,2,1)$.

Sol. Il punto candidato (soluzione del relativo sistema) è ad esempio $(h,h,h-1)$. Imponendo che valga $\sqrt{3}$ la lunghezza del vettore $(h-2,h-2,h-2)$ otteniamo i due punti $(1,1,0)$ e $(3,3,2)$.

[2.5 p.] Dimostrare che esistono infiniti piani contenenti r e al tempo stesso ortogonali al piano $\pi : x+y+z+3=0$.

Sol. Il vettore normale $(1,1,1)$ è diretto proprio come r; qualunque piano che contenga r è quindi ortogonale a π.

Esercizio 2.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (2x, 3y-z, 2y)$.

Sol. L'equazione caratteristica è $(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$. Per $\lambda=2$ otteniamo l'autospazio di dimensione 2 con equazione $y-z=0$; possiamo scegliere due generatori linearmente indipendenti come ad esempio $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$. Per $\lambda=1$ otteniamo ad esempio l'autovettore $(0,1,2)$.

[2 p.] Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol. Coppie siffatte non esistono perché il rango è massimo e quindi la funzione è iniettiva.

Esercizio 3.

[2.5 p.] Determinare il valore reale di k che rende uguale a 2 la dimensione del sottospazio $S = \langle (1,1,1,1),(1,2,3,4),(4,k,6,k+2)\rangle$.

Sol. Dobbiamo imporre che valga 2 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & k & 6 & k+2 \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ otteniamo $k=5$, valore che rende nulli entrambi i minori orlati.

[2.5 p.] Dimostrare che per ogni altro valore di k il sottospazio S contiene il vettore $(\sqrt{3},0,0,-\sqrt{3})$.

Sol. Indipendentemente da k, avendo inoltre diviso per $\sqrt{3}$ come è lecito in un sottospazio, abbiamo facilmente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & k & 6 & k+2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

La quarta riga è quindi una combinazione lineare delle prime tre; in altri termini, il vettore dato, come anche qualunque suo multiplo, è generato dai tre generatori di S.

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $35x^2-12xy+30y^2-390=0$.

Sol. Autovettori: $(2,3)$ per $\lambda = 26$, $(-3,2)$ per $\lambda = 39$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $26X^2 + 39Y^2 - 390 = 0$ e arriviamo alla forma canonica

$$\frac{X^2}{15} + \frac{Y^2}{10} = 1 \ .$$

[2 p.] Determinare le coordinate originali (nel vecchio riferimento) dei due fuochi.

Sol. Sostituendo le nuove coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{5}{13}} \\ 3\sqrt{\frac{5}{13}} \end{pmatrix} \ .$$

....

Esercizio 1.

[2 p.] In un riferimento $Oxyz$, dimostrare che l'asse z e la retta $r : x - y + 1 = y - z = 0$ sono sghembe.

Sol. I vettori direttori $(0,0,1)$ e $(1,1,1)$ non sono proporzionali, inoltre non esiste intersezione (nessun punto $(0,0,t)$ soddisfa entrambe le equazioni di r).

[2.5 p.] Tra i punti di r, determinare quelli distanti $\sqrt{3}$ dal punto $(1,2,2)$.

Sol. Il punto candidato (soluzione del relativo sistema) è ad esempio $(h-1,h,h)$. Imponendo che valga $\sqrt{3}$ la lunghezza del vettore $(h-2,h-2,h-2)$ otteniamo i due punti $(0,1,1)$ e $(2,3,3)$.

[2.5 p.] Dimostrare che esistono infiniti piani contenenti r e al tempo stesso ortogonali al piano $\pi : x + y + z + 8 = 0$.

Sol. Il vettore normale $(1,1,1)$ è diretto proprio come r; qualunque piano che contenga r è quindi ortogonale a π.

Esercizio 2.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (3x, 4y - z, 3y)$.

Sol. L'equazione caratteristica è $(3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0$. Per $\lambda = 3$ otteniamo l'autospazio di dimensione 2 con equazione $y - z = 0$; possiamo scegliere due generatori linearmente indipendenti come ad esempio $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$. Per $\lambda = 1$ otteniamo ad esempio l'autovettore $(0,1,3)$.

[2 p.] Stabilire se esistono vettori che non hanno controimmagine secondo f.

Sol. Vettori siffatti non esistono perché il rango è massimo e quindi la funzione è suriettiva.

Esercizio 3.

[2.5 p.] Determinare il valore reale di k che rende uguale a 2 la dimensione del sottospazio $S = \langle (1,1,1,1), (4,2,3,1), (k+2,k,6,4) \rangle$.

Sol. Dobbiamo imporre che valga 2 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ k+2 & k & 6 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Applicando il teorema degli orlati alla sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ otteniamo $k = 5$, valore che rende nulli entrambi i minori orlati.

[2.5 p.] Dimostrare che per ogni altro valore di k il sottospazio S contiene il vettore $(-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{2})$.

Sol. Indipendentemente da k, avendo inoltre diviso per $-\sqrt{2}$ come è lecito in un sottospazio, abbiamo facilmente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ k+2 & k & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

La quarta riga è quindi una combinazione lineare delle prime tre; in altri termini, il vettore dato, come anche qualunque suo multiplo, è generato dai tre generatori di S.

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica l'ellisse di equazione $30x^2 - 12xy + 35y^2 - 156 = 0$.

Sol. Autovettori: $(3, 2)$ per $\lambda = 26$, $(-2, 3)$ per $\lambda = 39$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $26X^2 + 39Y^2 - 156 = 0$ e arriviamo alla forma canonica

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{4} = 1 \ .$$

[2 p.] Determinare le equazioni originali (nel vecchio riferimento) delle due direttrici.

Sol. Nel nuovo riferimento, le equazioni delle due direttrici sono $X = \pm\frac{6}{\sqrt{2}}$. Occorre ora sostituire la X utilizzando la prima riga della legge inversa $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Otteniamo così le equazioni originali,

$$\frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y) = \pm\frac{6}{\sqrt{2}} \ .$$