GEOMETRIA – Prova scritta telematica del 19 gennaio 2021, ore 15.30.
Durata totale: 2 ore e 30 minuti (escluso il caricamento delle foto).

La prova consiste di una sequenza di 2 sessioni exam.net in serie. Al termine di ogni sessione deve essere inviata la risoluzione (con giustificazioni delle risposte) mediante una o più foto da caricare nel sito exam.net.

L'ordine delle risposte può essere deciso arbitrariamente. È ammessa la prosecuzione di un esercizio nella sessione successiva, purché venga indicato con chiarezza il riferimento precedente (ad es. con un asterisco e una nota). È anche possibile modificare eventualmente le risposte ai quesiti.

PARTE 1. *Quesiti*

Riportare nel foglio il codice del quesito insieme alla risposta, senza giustificazioni.

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

⊙ Q1 Uno spazio vettoriale di dimensione 3 può contenere 4 generatori. [V]

⊙ Q2 Il rango della matrice completa di un sistema può superare di due il rango dell'incompleta. [F]

⊙ Q3 Le giaciture di due rette sghembe non hanno intersezione. [F]

⊙ Q4 La somma di due matrici invertibili è una matrice invertibile. [F]

⊙ D1 Determinare il numero reale k che rende perpendicolari i piani $\pi : x+ky = 0$ e $\pi' : y+12z = 0$. [0]

⊙ D2 Determinare il numero reale p tale che $(p, 4, 4)$ sia un autovettore per la matrice di ordine 3 contenente tutti "1". [-8] oppure [4] (accettati entrambi)

⊙ D3 Determinare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile, di grado minore di 2. [2]

⊙ D4 Calcolare la distanza della retta di equazioni $x = y = 0$ dal punto $(\sqrt{53}, \sqrt{47}, \sqrt{5})$. [10]

PARTE 2. *Esercizi*

Giustificare le risposte.

Esercizio 1.
Sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 3)$ e $C = (k, 2, 5)$ dipendente da un parametro reale k.
Determinare k in modo che i tre punti siano allineati. Scrivere un'equazione cartesiana del piano parallelo all'asse y e passante per i punti A e B.

Sol. I vettori $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{AC} = (k - 2, 2, 4)$ devono essere proporzionali, da cui otteniamo $k = 0$.
L'equazione omogenea $ax + by + cz = 0$ deve essere soddisfatta dal vettore direttore dell'asse y, $(0, 1, 0)$, da cui otteniamo $b = 0$. Successivamente inseriamo i due punti nell'equazione generale $ax+by+cz+d = 0$ ottenendo un sistema di due equazioni che avr un parametro fittizio (da sostituire liberamente). Al termine abbiamo ad es. l'equazione $2x + z - 5 = 0$.

Esercizio 2.
Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + 2y, 4y - z, 2x + z)$, determinarne due autovettori linearmente indipendenti. Analizzare e confrontare le molteplicità (algebrica e geometrica) degli autovalori, deducendo quindi che f non è diagonalizzabile.
Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

Sol. Gli autovalori sono 0 e 3 con rispettivi autovettori $(2, -1, -4)$ e $(1, 1, 1)$. La molteplicità algebrica dell'autovalore 3 è maggiore di quella geometrica $(2 > 1)$, quindi non è possibile trovare una base di tre autovettori: la diagonalizzazione non è attuabile.

La matrice (ad es. rispetto alle basi canoniche) non ha rango massimo (esso vale 2), quindi la dimensione del dominio è maggiore del rango ed è pregiudicata l'iniettività.

Esercizio 3.

Calcolare la proiezione ortogonale di $(1,2,3,4,5)$ sul sottospazio S definito dalla sola equazione $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ (sugg. : è preferibile passare attraverso la componente ortogonale).

Verificare la formula di Grassmann per S insieme al sottospazio T generato dal solo vettore $(2,0,3,0,4)$.

Sol. Otteniamo facilmente

$$\underline{p}=\underline{v}-\underline{c}=(1,2,3,4,5)-\frac{(1,2,3,4,5)\times(1,1,1,1,1)}{(1,1,1,1,1)\times(1,1,1,1,1)}(1,1,1,1,1)=(-2,-1,0,1,2)\ .$$

In alternativa sarebbe necessario ortogonalizzare una base composta da 4 vettori (le soluzioni lin. indipendenti del sistema di una sola equazione, come nel testo, ecc.

T ha dimensione 1 e non è contenuto in S (il generatore non soddisfa l'equazione di S). In particolare, i vettori di S insieme a quelli di T generano l'intero $\mathbf{R}^5$. Abbiamo quindi

$$4+1=dim(S)+dim(T)=dim(S\cap T)+dim(S+T)=0+5\ .$$

Esercizio 4.

Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $xy-13=0$.

Determinare le equazioni originali dei suoi vertici.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda=\frac{1}{2}$, $(-1,1)$ per $\lambda=-\frac{1}{2}$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $\frac{X^2}{26}-\frac{Y^2}{26}=1$.

I vertici, nelle nuove coordinate, sono $(\pm\sqrt{26},0)$. Inserendo queste coordinate nella legge del cambiamento di coordinate otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{26} \\ 0 \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} \sqrt{13} \\ \sqrt{13} \end{pmatrix}\ .$$