Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 31.5 I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

In un riferimento $Oxyz$ consideriamo la retta r passante per l'origine e per il punto $A = (1, 1, 1)$, e la retta s passante per i punti $B = (1, 2, 3)$ e $C = (3, 0, 1)$.

2.5 Dimostrare che esse sono sghembe.

2.5 Determinare il numero reale h in modo che la retta passante per il punto $(1, h, h)$ e parallela a r contenga il punto $(3, 4, 4)$.

3.5 Tra i piani contenenti r determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di 60° col piano $\pi : x + y = 0$.

Sol.

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{OB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \textsf{sghembe}\ .$$

$\overrightarrow{OA}$ deve essere parallelo al vettore espresso in coordinate come $(3-1, 4-h, 4-h)$, quindi il valore di h è 2.

Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ ha le seguenti specifiche: $d = 0$, $a + b + c = 0$ (passaggio per i due punti di r) e infine

$$\frac{|(a, b, c) \times (1, 1, 0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{2}} = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}\ .$$

Abbiamo, così, $c = -a - b$ e poi $4(a^2 + b^2 + 2ab) = 2(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab)$. Otteniamo $ab = 0$, quindi $a = 0$ oppure $b = 0$. I piani richiesti hanno le rispettive equazioni

$$y - z = 0\ \ ,\ \ x - z = 0\ .$$

Esercizio 2.

3.5 Al variare di $k \in \mathbf{R}$, discutere l'esistenza e il numero ∞^p di soluzioni nel caso del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + kz = k \\ 4x + 2y + z = 2k \\ 3x + ky + 2z = 2 \end{cases}$$

Sol.

Riduciamo a gradini la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & | & k \\ 4 & 2 & 1 & | & 2k \\ 3 & k & 2 & | & 2 \end{pmatrix} :$$

$\underline{r}_2 \to \underline{r}_2 - 2\underline{r}_1$, $\underline{r}_3 \to 2\underline{r}_3 - 3\underline{r}_1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & | & k \\ 0 & 0 & 1-2k & | & 0 \\ 0 & 2k-3 & 4-3k & | & 4-3k \end{pmatrix} ;$$

Scambiamo le ultime due righe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & | & k \\ 0 & 2k-3 & 4-3k & | & 4-3k \\ 0 & 0 & 1-2k & | & 0 \end{pmatrix} .$$

Per $k = \frac{1}{2}$ otteniamo ∞^1 soluzioni (ranghi uguali a 2). Per $k = \frac{3}{2}$ la matrice non è più ridotta a gradini e occorre analizzarla appositamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) .$$

Con l'ulteriore operazione elementare $\underline{r}_3 \to \underline{r}_3 - 4\underline{r}_2$ otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) ,$$

quindi il relativo sistema è senza soluzione (ranghi diversi, $2 < 3$). Per i restanti valori di k abbiamo un'unica soluzione (ranghi uguali a 3).

Esercizio 3.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Esibire un'idonea rotazione e trasformare l'equazione $3x^2 - 4xy - 1 = 0$ nella forma canonica di un'iperbole.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calcolare le equazioni delle sue direttrici, nel riferimento iniziale.

Sol. Autovettori: $(2, -1)$ per $\lambda = 4$, $(1, 2)$ per $\lambda = -1$. Sostituendo le nuove variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo l'equazione $4X^2 - Y^2 - 1 = 0$ o meglio,

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}} - \frac{Y^2}{1} = 1 .$$

Le direttrici sono caratterizzate dalle equazioni

$$X = \pm\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ \vee \ X = -\frac{1}{2\sqrt{5}} .$$

Sostituendo le coordinate secondo la legge inversa,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \ , \ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \ ,$$

(in realtà occorre soltanto conoscere la formula della X) otteniamo le equazioni originali: $4x - 2y - 1 = 0$ e $4x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 4.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Calcolare la terza coordinata del vettore $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ rispetto alla base

$$\{(1,0,0,0,0), (0,2,3,0,0), (0,6,-4,0,0), (0,0,0,1,\sqrt{2}), (0,0,0,\sqrt{2},-1)\} .$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se esistono vettori di $\mathbf{R}^5$ ortogonali a tutti i vettori di tale base.

Sol. La base data è ortogonale, quindi possiamo utilizzare i coefficienti di Fourier, in particolare il terzo:

$$c_3 = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{7}}{52} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}{26} .$$

Esistono, vettori siffatti, ma abbiamo il solo vettore nullo.

Esercizio 5.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare tre autovettori linearmente indipendenti per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dall'immagine sulla base canonica, come segue:

$$f(1,0,0) = (1,1,1) \ , \ f(0,1,0) = (2,2,2) \ , \ f(0,0,1) = (28,0,0) .$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Determinare due vettori che abbiano la stessa immagine secondo f.

Sol.

$$0 = -\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & +28 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 28\lambda \ \Rightarrow \ \lambda \in \{-4, 0, 7\} .$$

I rispettivi autovalori possono essere scelti come $(6, -1, -1)$, $(2, -1, 0)$, $(5, 1, 1)$.

Ad es. due vettori del nucleo hanno la stessa immagine.

Esercizio 6.

$\boxed{3}$ Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(2, 1, 0, 0)$ rispetto al sottospazio

$$S = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 3, 2, 3)\rangle \ .$$

Sol. I tre vettori sono linearmente indipendenti, da un'analisi del rango della matrice che li contiene in riga. Ora, i primi due vettori sono già ortogonali. Trasformiamo quindi il terzo ottenendo il nuovo vettore

$$(2, 3, 2, 3) - \frac{2}{1}(1, 0, 0, 0) - \frac{8}{3}(0, 1, 1, 1) = \left(0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

che possiamo moltiplicare per tre, per comodità: $(0, 1, -2, 1)$. Ora proiettiamo:

$$\underline{p} = \frac{2}{1}(1, 0, 0, 0) + \frac{1}{3}(0, 1, 1, 1) + \frac{1}{6}(0, 1, -2, 1) = \left(2, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \ .$$

Esercizio 7.

$\boxed{2}$ Data la matrice $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare tutti i valori del numero reale γ tali che $A^3 - A$ dia la matrice nulla.

Sol.

$$\begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^2 + \gamma + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Dobbiamo quindi imporre che $\gamma = \gamma^3$ e $1 = \gamma^2 + \gamma + 1$, ottenendo i valori 0 e -1.