La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il coseno.

(Supplemento al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

La nozione di prodotto scalare sopravvive anche in dimensione maggiore di 3, essendo infatti possibile effettuare il calcolo

$$\underline{p} \times \underline{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n \ ,$$

in qualunque spazio $\mathbf{R}^n$, preservando le classiche proprietà del prodotto scalare che valgono in dimensione 2 e 3. Abbiamo in particolare che $\underline{p} \times \underline{p} = 0$ se e solo se $\underline{p} = \underline{0}$, mentre per tutti gli altri vettori $\underline{p}$ il prodotto scalare è positivo. Da questa proprietà segue la cosiddetta *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: definendo il *modulo* o *norma* di un vettore $\underline{p}$ come $||\underline{p}|| := \sqrt{\underline{p} \times \underline{p}}$, vale la seguente proprietà:

$$|\underline{p} \times \underline{q}| \leq ||\underline{p}|| \cdot ||\underline{q}|| \ \ \forall\, \underline{p}, \underline{q} \in \mathbf{R}^n \ .$$

Dimostrazione. Partiamo dalla disuguaglianza sempre valida,

$$(\alpha \underline{p} + \beta \underline{q}) \times (\alpha \underline{p} + \beta \underline{q}) \geq 0 \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \ .$$

Si tratta infatti di un prodotto scalare di due vettori coincidenti, in nessun caso negativo. Scegliamo allora opportunamente α e β in modo da far scaturire la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Consideriamo $\alpha = \underline{q} \times \underline{q}$ e $\beta = -(\underline{p} \times \underline{q})$.

Nota: una tale scelta è stata fatta *ad hoc*, appositamente per arrivare alla disuguaglianza che vogliamo ottenere. È stata fatta alcuni secoli fa a seguito di un'attenta osservazione, ed è stata tramandata fino ai giorni nostri, essendo tuttora valida. Molte costruzioni matematiche sono frutto di un tentativo riuscito che viene "brevettato" e diventa così patrimonio della collettività (pensiamo ad es. alla matrice con due righe uguali che contribuisce alla dimostrazione della correttezza della matrice inversa). La scelta di questi valori di α e β appare in effetti artefatta, forse misteriosa, ma noi vediamo soltanto il risultato di un'operazione logica complessa, un percorso fatto di tentativi eventualmente sbagliati e alla fine coronato da un'idea vincente.

Torniamo ai calcoli presenti. Abbiamo intanto, anche prima della sostituzione ad hoc:

$$\alpha^2(\underline{p} \times \underline{p}) + 2\alpha\beta(\underline{p} \times \underline{q}) + \beta^2(\underline{q} \times \underline{q}) \geq 0 \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \ .$$

Ora inseriamo i valori "magici" di α e β:

$$(\underline{q} \times \underline{q})^2(\underline{p} \times \underline{p}) - 2(\underline{q} \times \underline{q})(\underline{p} \times \underline{q})(\underline{p} \times \underline{q}) + (-(\underline{p} \times \underline{q}))^2(\underline{q} \times \underline{q}) \geq 0 \ \Rightarrow$$

(dividendo per $\underline{q} \times \underline{q}$ che supponiamo essere non nullo)

$$\Rightarrow (\underline{q} \times \underline{q})(\underline{p} \times \underline{p}) - 2(\underline{p} \times \underline{q})(\underline{p} \times \underline{q}) + (\underline{p} \times \underline{q})^2 \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\underline{q} \times \underline{q})(\underline{p} \times \underline{p}) \geq (\underline{p} \times \underline{q})^2 \ .$$

Ora le radici quadrate di entrambi i membri portano alla disuguaglianza, cambiando il verso.

Notiamo che se $\underline{q} = k\underline{p}$ per un certo numero reale k, allora $\alpha = k^2(\underline{p} \times \underline{p})$ e $\beta = -k(\underline{p} \times \underline{p})$, da cui segue che $\alpha\underline{p} + \beta\underline{q} = \underline{0}$ e la disuguaglianza diventa in effetti un'uguaglianza (ciò vale soltanto nel caso di proporzionalità, senza altre possibilità – esercizio).

Grazie alla disuguaglianza appena dimostrata, dati due vettori $\underline{p}$, $\underline{q}$ di un qualunque spazio $\mathbf{R}^n$ è possibile ora interpretare la quantità

$$\frac{\underline{p} \times \underline{q}}{||\underline{p}|| \cdot ||\underline{q}||}$$

come un “coseno”; in particolare, l’annullarsi di questo coseno corrisponde all’ortogonalità tra i due vettori, definita formalmente dalla legge $\underline{p} \times \underline{q} = 0$. Nell’altro estremo, se il cosiddetto coseno vale 1 allora i due vettori sono proporzionali (abbiamo l’uguaglianza al posto della disuguaglianza, vedere la nota sopra), quindi il potere espressivo di questo coseno generalizzato, puramente algebrico, è confrontabile con quello del coseno classico, geometrico.