Calcolo di proiezione e componente ortogonale utilizzando la somma diretta.

(Supplemento al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

Supponiamo di conoscere un insieme minimale di equazioni cartesiane che identificano un sottospazio $S \subset \mathbf{R}^n$, di dimensione q. Abbiamo dunque a disposizione una matrice A di tipo $(n-q)\times n$ e rango $n-q$ che dà luogo al sistema omogeneo $A(x_1,\ldots,x_n)^t = \underline{0}^t$ le cui soluzioni sono tutte e sole le n-uple appartenenti a S. Dato ora un vettore $\underline{v} \in \mathbf{R}^n$, per una nota proprietà della somma diretta di sottospazi possiamo decomporre $\underline{v}$ come $\underline{p}+\underline{c}$ in modo unico, con $\underline{p} \in S$ e $\underline{c} \in S^\perp$, essendo $S^\perp$ il *sottospazio ortogonale* a S (l'insieme dei vettori ciascuno dei quali è ortogonale a qualunque vettore di S). Emerge così in modo naturale la *proiezione ortogonale* $\underline{p}$: essa è per definizione l'unico vettore di S tale che $\underline{v}-\underline{p}$ sia ortogonale a S, cioè appartenga a $S^\perp$.

Un modo per calcolare $\underline{p}$ è quello di trovare una base di S per poi ortogonalizzarla e infine calcolare i coefficienti di Fourier; questi coefficienti daranno la combinazione lineare richiesta, una volta associati alla base. Se però le righe della matrice sono poche rispetto a n (dunque la dimensione di S è abbastanza grande) è preferibile ortogonalizzare la base di $S^\perp$ costituita dalle righe stesse, per poi effettuare la proiezione ortogonale su $S^\perp$ e infine sottrarla da $\underline{v}$. Entrambi i metodi utilizzano l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e soprattutto la comodità dei coefficienti di Fourier, ma esiste un terzo approccio che non ricorre a basi ortogonali. Da un lato consideriamo le righe $\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_{n-q}$ di A (una base di $S^\perp$); dall'altro, calcoliamo una base $\{\underline{z}_1,\ldots,\underline{z}_q\}$ di S risolvendo il sistema omogeneo. A questo punto costruiamo un nuovo sistema,

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\underline{z}_i + \sum_{i=1}^{n-q}\beta_i\underline{r}_i = \underline{v}\ .$$

Una volta trovata la soluzione $(\alpha_1,\ldots,\alpha_q,\beta_1,\ldots,\beta_{n-q})$, essa restituisce direttamente $\underline{p}$ e $\underline{c}$ calcolando le due rispettive sommatorie.

Esempio: Sia dato il sottospazio

$$S : \begin{cases} 2x-y+3w-z=0 \\ x+2y-w=0 \end{cases} .$$

Risolvendo il sistema otteniamo una base di S, ad es. $\{(1,-1,-1,0),(2,-1,0,5)\}$. Notiamo che essa non è ortogonale. Supponiamo di voler proiettare il vettore $(1,2,3,4)$ su S; consideriamo dunque il sistema

$$\alpha_1(1,-1,-1,0)+\alpha_2(2,-1,0,5)+\beta_1(2,-1,3,-1)+\beta_2(1,2,-1,0)=(1,2,3,4)\ .$$

Non è immediato trovare la soluzione, $\left(-\frac{20}{9},\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)$. La proiezione richiesta è

$$-\frac{20}{9}(1,-1,-1,0)+\frac{8}{9}(2,-1,0,5)=\left(-\frac{4}{9},\frac{12}{9},\frac{20}{9},\frac{40}{9}\right)\ .$$

La complessità dei calcoli è decisamente più alta rispetto all'ortogonalizzazione della base di S col successivo calcolo dei due coefficienti di Fourier e della conseguente combinazione lineare. Questo approccio resta comunque suggestivo dal punto di vista concettuale perché si avvale di strumenti meno sofisticati che non coinvolgono direttamente il prodotto scalare. Sarebbe poi interessante studiare quei possibili casi in cui esso risulta perfino competitivo rispetto agli altri metodi.