Due casi speciali di utilizzo sconsigliato del metodo “1-0”.

(Supplemento al testo consigliato, *Itinerario di geometria e algebra lineare*)

Consideriamo l'insieme $S = \{(a+1, a+b) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$. Esso è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ o no? Applicando il metodo “1-0” otteniamo i due vettori $\underline{u} = (2,1)$, $\underline{v} = (1,1)$ la cui combinazione lineare generica è $a\underline{u} + b\underline{v} = (2a+b, a+b)$. La forma ottenuta non corrisponde a quella data inizialmente; questo dovrebbe assicurarci che S non è un sottospazio, invece siamo in presenza di un sottospazio speciale che non può essere rilevato col metodo “1-0”! Come campanello d'allarme notiamo che l'insieme $(2a+b, a+b)$ è l'*intero* $\mathbf{R}^2$ perché $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base – in particolare generano $\mathbf{R}^2$. Ne deduciamo che se S fosse un sottospazio, esso dovrebbe coincidere con lo spazio ambiente $\mathbf{R}^2$. Siamo quindi condotti “euristicamente” (cioè con passaggi logici necessari) a cercare una dimostrazione che $S = \mathbf{R}^2$ – notiamo che fino ad ora non disponiamo ancora di una dimostrazione. In effetti S risulta essere proprio uguale a $\mathbf{R}^2$ perché sin dall'inizio potevamo notare che $(a+1, a+b)$ è un vettore generico $(p, q) \in \mathbf{R}^2$, per ogni scelta di p e q (basta regolare opportunamente a e b, ponendo $a = p-1$ e $b = q-p+1$). Ora che siamo giunti a questa conclusione realizziamo che il metodo “1-0” non era necessario; bastava notare appunto che $S = \mathbf{R}^2$ e ricordare che un sottospazio può anche coincidere con l'intero spazio vettoriale in cui è contenuto (il simbolo $\subseteq$ lascia aperta infatti la possibilità dell'uguaglianza).

Consideriamo ora l'insieme $T = \{(a+1, b+1, a+b) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$. Anche in questo caso il metodo “1-0” non porta a una identità delle due forme, ma T non sembra coincidere con lo spazio ambiente $\mathbf{R}^3$ perchè occorrerebbero almeno tre generatori. Troviamo anche difficoltà nel tentativo di stabilire se $T = \mathbf{R}^3$ lavorando direttamente sulla forma data. In casi come questo può venire il sospetto che T non sia un sottospazio. Percorriamo quest'ultima strada, cercando un difetto relativo agli assiomi; troviamo infatti, facilmente, che $(0,0,0) \notin T$ (esercizio). Dunque T non è un sottospazio.

In conclusione, il metodo “1-0” può dare scarse informazioni in alcune circostanze particolari e deve essere accompagnato possibilmente da un'analisi accurata del contesto.