1. Dimostrare che la retta $r : x - y = 2x + y - z - 2 = 0$ è parallela al piano $\pi : 3x - z - 1 = 0$. Calcolare la distanza tra questi due enti geometrici. Determinare i punti di r che formano un triangolo di area 5 con l'origine e il punto $(1, 0, 0)$.

Sugg. Il rango dell'incompleta vale 2, quello della completa 3. Punto arbitrario sulla retta, poi distanza punto-piano. Punto parametrico P sulla retta, prodotto vettoriale tra i due vettori puntati in P e terminanti nei due punti dati (la metà della lunghezza del prodotto vettoriale deve essere posta uguale a 5).

2. È data la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (2x+y+2z, 0, 2x+y+2z)$. Determinare una base di autovettori per f. Stabilire se l'immagine di f copre l'intero codominio. Utilizzando un riferimento cartesiano e la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, descrivere l'effetto della funzione f sul cubo avente tre spigoli corrispondenti ai vettori della base.

Sugg. Per $\lambda = 0$ si ottengono due autovettori, più un terzo autovettore per un certo autovalore non nullo. L'applicazione non è suriettiva. Essa riduce il cubo a un segmento, dato che il rango vale 1; il segmento segue la direzione di una delle colonne non nulle della matrice nelle basi canoniche.

3. Calcolare la proiezione ortogonale di $(2, 8, 0)$ sul piano di equazione $x + 3y + 4z = 0$. Verificare che la differenza tra i due vettori è proprio la componente ortogonale.

Sugg. Possiamo calcolare velocemente la proiezione ortogonale di $(2, 8, 0)$ sul vettore normale del piano, ma questa è in realtà la *componente ortogonale* richiesta. Successivamente possiamo sottrarla al vettore dato, per ottenere la proiezione ortogonale. In alternativa, troviamo una base del sottospazio, la ortogonalizziamo e infine proiettiamo, con due coefficienti di Fourier.

4. Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $2xy = 7$. Determinare l'equazione originale di un suo asintoto, scelto a piacere.

Sugg. Rotazione di $45°$. Gli asintoti originali coincidono con i due assi cartesiani.

5. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $g(2, 3) = (4, 1)$ e $g(2, 4) = (4, 7)$. Calcolare $g(1, 0)$.

Sugg. Una volta calcolate le coordinate α, β di $(1, 0)$ rispetto alla base del dominio, in virtù della linearità la risposta è data da $\alpha(4, 1) + \beta(4, 7)$.