Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

PARTE 1. *Quesiti – rispondere soltanto su questo foglio –* **TOTALE: 10.**

NOTA: -1 per ogni risposta errata; $+1$ e $+1.5$ risp. per quesiti "Vero/Falso" e quesiti numerici.

$\odot$ La metà di un autovettore è un autovettore. [V]

$\odot$ Una matrice triangolare 3×3 può contenere 4 zeri. [V]

$\odot$ Due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbf{R}^5$ possono avere intersezione $\{\underline{0}\}$. [F]

$\odot$ Il sottospazio ortogonale al piano xy è il piano yz. [F]

–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–:–

$\odot$ Determinare a in modo che il piano $\pi : x + ay + 3z - 4 = 0$ sia parallelo al vettore $(0, 1, 1)$. [-3]

$\odot$ Calcolare il numero nel posto $(4, 1)$ della matrice inversa di $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [$\frac{1}{2}$]

$\odot$ Calcolare la dimensione del nucleo di un'applicazione suriettiva $f : \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^4$. [3]

$\odot$ Determinare β in modo che la retta $r : x - \beta y = y - \beta z = 0$ sia perpendicolare al piano $\pi : 9x + 3y + z + 5 = 0$. [3]

PARTE 2.

Giustificare le risposte. Consegnare soltanto la bella copia, lasciando alcuni cm. all'inizio.

TOTALE: 20. I punteggi possono subire lievi modifiche nella fase di valutazione.

Esercizio 1.

In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : x - y + 2z = 3y - z - 1 = 0$, $s : x + 2y + z = 2x - 5y + 5z - 4 = 0$.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Dimostrare che esse sono parallele.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calcolare la distanza tra r e il punto $P = (1, 0, 0)$ (conta molto il procedimento e secondariamente la correttezza dei calcoli).

Sol. I ranghi della matrice incompleta e completa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & -5 & 5 & | & 4 \end{pmatrix}$$

sono uguali a 2 e 3 rispettivamente (ad es. possiamo ridurre a gradini), quindi le rette risultano parallele.

Per calcolare la distanza costruiamo intanto il piano perpendicolare alla retta r e passante per P: dopo aver estratto un vettore direttore, ad es. $(5, -1, -3)$, predisponiamo un piano di equazione $5x - y - 3z + d = 0$ e poi imponendo il passaggio per P otteniamo $d = -5$. Ora troviamo il punto d'intersezione con r:

$$z = 3y - 1 \Rightarrow x = y - 2z = 2 - 5y \Rightarrow 5(2 - 5y) - y - 3(3y - 1) - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{35}, \; x = \frac{6}{7}, \; z = -\frac{11}{35}.$$

Infine calcoliamo la distanza tra i due punti:

$$\delta = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{8}{35}\right)^2 + \left(-\frac{11}{35}\right)^2} = \frac{1}{35}\sqrt{5^2 + 8^2 + 11^2} = \frac{\sqrt{210}}{35} = \sqrt{\frac{6}{35}}.$$

Ecco un modo alternativo (con strumenti analitici): troviamo il punto mobile $(2-5t, t, 3t-1)$ su r e poi minimizziamo la distanza da P (il suo quadrato, meglio) mediante l'annullamento della derivata di $1+25t^2-10t+t^2+9t^2+1-6t$, ottenendo $t=\frac{8}{35}$. Sostituendo, otteniamo

$$\delta = \sqrt{\frac{64}{35}-\frac{128}{35}+2} = \sqrt{\frac{6}{35}}\ .$$

Esercizio 2.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Determinare una base di 3 autovettori relativi all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x,y,z) = (3x, 5x+2y, 5x-y+3z)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Stabilire se esistono vettori del codominio che non hanno controimmagine secondo f.

Sol. Imponendo

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

otteniamo un'equazione di terzo grado molto semplice:

$$(3-\lambda)^2(2-\lambda) = 0\ .$$

Per $\lambda = 3$ abbiamo molteplicità geometrica 2; due generatori del relativo autospazio sono ad es. $(1,5,0)$ e $(0,0,1)$; per $\lambda = 2$ troviamo l'autovettore $(0,1,1)$.

La suriettività (dovuta al rango uguale alla dimensione del codominio) comporta una risposta negativa alla domanda finale.

7 **Esercizio 3.**

$\boxed{\mathbf{3}}$ Esibire un'idonea rotazione e trasformare l'equazione $4x^2+2xy+4y^2-30=0$ nella forma canonica di un'ellisse.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Calcolare l'eccentricità di questa ellisse.

Sol. Autovettori: $(1,1)$ per $\lambda = 5$, $(-1,1)$ per $\lambda = 3$. Sostituendo le nuove variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $5X^2+3Y^2-30=0$ o meglio, in forma canonica,

$$\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{10} = 1\ .$$

Per trovare l'eccentricità utilizziamo la formula

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10-6}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\ .$$

Esercizio 4.

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che il sistema $x-ky+4w = x+y+w+z = 2x+3y+5w+z = 0$ descriva un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^4$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Posto $k=0$ in tale sistema, calcolare la proiezione ortogonale di $(0,1,1,0)$ rispetto al relativo sottospazio delle soluzioni.

Sol. Dobbiamo imporre che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

scenda a 2, in modo da far salire la dimensione a $4-2$ come richiesto. Orlando la sottomatrice in alto a destra otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{vmatrix} -k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ 0=0 \ \wedge\ 4k+8=0 \ \Rightarrow\ k=-2\ .$$

Per $k = 0$ invece la dimensione vale 1, quindi occorre trovare semplicemente un generatore; rispetto a tale vettore proietteremo il vettore dato. Una soluzione parametrica del sistema è

$$x = -4t \ , \ y = 0 \ \ w = t \ , \ z = 3t \ .$$

La proiezione è pertanto

$$\frac{(0,1,1,0) \times (-4,0,1,3)}{(-4,0,1,3) \times (-4,0,1,3)}(-4,0,1,3) = \frac{1}{26}(-4,0,1,3) \ .$$