⊙ Le giaciture di due rette incidenti non coincidono. [V]

⊙ L'insieme $\{(a+b\sqrt{2}, b, 1) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. [F]

⊙ In una matrice 4×4 esistono 8 sottomatrici 3×3. [F]

⊙ Una applicazione lineare non iniettiva da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ ammette sempre autovettori. [V]

⊙⊙ Calcolare la controimmagine di (π, π) per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$ che porta l'elemento 1 in $(2\pi, 2\pi)$. [$\frac{1}{2}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore di 23. [23]

⊙⊙ Calcolare il rango di una matrice 6×9 che contiene tutti 1 ad eccezione di due 0 nei posti $(1,1)$ e $(6,9)$. [3]

⊙⊙ Calcolare $h \in \mathbf{R}$ in modo che l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} h & h \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ abbia determinante 5. [$\frac{1}{15}$]

....

⊙ Le giaciture di due rette sghembe non coincidono. [V]

⊙ L'insieme $\{(a, b\sqrt{2}, b, b-a) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$. [V]

⊙ In una matrice 3×3 esistono 6 sottomatrici 2×2. [F]

⊙ Una applicazione lineare invertibile da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ potrebbe essere senza autovettori. [V]

⊙⊙ Calcolare la controimmagine di (π, π) per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$ che porta l'elemento 1 in $(3\pi, 3\pi)$. [$\frac{1}{3}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale delle matrici simmetriche 5×5. [15]

⊙⊙ Calcolare il rango di una matrice 6×9 che contiene tutti 1 ad eccezione di due 0 nei posti $(1,9)$ e $(6,1)$. [3]

⊙⊙ Calcolare $h \in \mathbf{R}$ in modo che l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} h & h \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ abbia determinante 8. [$\frac{1}{16}$]

....

⊙ Le giaciture di due rette parallele non coincidono. [F]

⊙ L'insieme $\{(a+b\sqrt{2}, b, 0) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. [V]

⊙ In una matrice 3×3 esistono 9 sottomatrici 2×2. [V]

⊙ Una applicazione lineare suriettiva da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ ammette sempre autovettori. [F]

⊙⊙ Calcolare la controimmagine di (π, π) per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$ che porta l'elemento 1 in $(-2\pi, -2\pi)$. [$-\frac{1}{2}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore di 15. [15]

⊙⊙ Calcolare il rango di una matrice 6×6 che contiene tutti 1 ad eccezione di tre 0 nei posti $(1,1)$, $(1,2)$ e $(1,6)$. [2]

⊙⊙ Calcolare $h \in \mathbf{R}$ in modo che l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} h & h \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ abbia determinante 2. [$\frac{1}{10}$]

....

⊙ Le giaciture di due rette parallele restano parallele. [F]

⊙ L'insieme $\{(a+b\sqrt{2}, b-1, a) \colon a, b \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. [F]

⊙ In una matrice 4×4 esistono 16 sottomatrici 3×3. [V]

⊙ Una applicazione lineare non iniettiva da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ ammette sempre autovettori. [V]

⊙⊙ Calcolare la controimmagine di (π, π, π) per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^3$ che porta l'elemento 1 in $(4\pi, 4\pi, 4\pi)$. [$\frac{1}{4}$]

⊙⊙ Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi $p(x)$ di grado minore o uguale a 23. [24]

$\odot\odot$ Calcolare il rango di una matrice 4×8 che contiene tutti 2 nei posti positivi della “scacchiera” e tutti 5 nei posti negativi. [2]

$\odot\odot$ Calcolare $h \in \mathbf{R}$ in modo che l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} h & h \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ abbia determinante 6. [$\frac{1}{18}$]

....

....

Esercizio 1.

[1.5 p.] Scrivere equazioni cartesiane della retta r passante per i punti $(1, 3, 5)$ e $(0, 1, 0)$.

Sol. Dalle equazioni parametriche $x = t$, $y = 1 + 2t$, $z = 5t$ otteniamo per assorbimento $y = 2x + 1 \wedge z = 5x$.

[2.5 p.] Tra i piani perpendicolari a questa retta r, determinare (con equazioni cartesiane) quelli distanti 8 dall'origine.

Sol. I piani sono del tipo $x + 2y + 5z + d = 0$. Imponendo la distanza richiesta abbiamo:

$$\frac{|0 + 0 + 0 + d|}{\sqrt{30}} = 8 \;\Rightarrow\; d = \pm 8\sqrt{30} \; .$$

[2.5 p.] Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato da r col piano $\pi : x + z = 8$.

Sol.

$$\sin\theta = \frac{(1, 0, 1) \times (1, 2, 5)}{\sqrt{2}\sqrt{30}} \quad \Rightarrow \; \cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{5}} \; .$$

Esercizio 2.

[3 p.] Calcolare una base di autovettori per la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla legge $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 4y, 3x - 2y + 3z)$.

Sol.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \in \{0, 4\} \; .$$

Risolvendo i corrispondenti sistemi omogenei otteniamo ad es. l'autovettore $(1, 0, -1)$ per $\lambda = 0$ e i due autovettori $(2, 3, 0)$, $(1, 1, 1)$ liberamente scelti — purché non siano proporzionali — nell'autospazio (piano) di equazione $3x - 2y - z = 0$, per $\lambda = 4$.

[2.5 p.] Determinare un vettore che non appartenga all'immagine di f.

Sol. Il vettore richiesto non deve essere generato dalle colonne della matrice, quindi occorre trovare una quarta colonna che faccia salire a 3 il rango della matrice completa. Ad esempio con $(1, 0, 0)$ otteniamo un minore 3×3 non nullo.

Esercizio 3.

[2.5 p.] Dimostrare che non esistono valori reali del parametro k tali da rendere risolubile il sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + ky + 2z = 1 \\ 3x + (1 + k)y + 3z = 1 \end{cases}$.

Sol. Il determinante della matrice incompleta vale zero indipendentemente da k (possiamo anche notare che la terza riga è la somma delle altre due righe). D'altra parte esistono minori 2×2 non nulli, quindi l'incompleta ha rango 2 in tutti i casi. Nella matrice completa è presente invece una sottomatrice 3×3 con determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \; .$$

Il teorema di Rouché-Capelli decreta quindi l'assenza di soluzioni.

[1.5 p.] Per $k = 0$, calcolare un vettore direttore della retta r descritta dalle prime due equazioni.

Sol. Risolvendo il relativo sistema omogeneo abbiamo $x = -2z$, poi $y = -2x - z = 3z$ da cui otteniamo la soluzione generale $(-2t, 3t, t)$ e ad esempio il vettore $(2, -3, -1)$.

[1 p.] Determinare a piacere un vettore ortogonale a r.

Sol. Possiamo scegliere qualunque vettore (s, t, u) tale che $2s - 3t - u = 0$, anche il vettore nullo!

Esercizio 4.

[3 p.] Mediante un'opportuna rotazione del riferimento, da esibire, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 8xy + 16y^2 - 2\sqrt{17}y = 0$.

Sol. La matrice simmetrica associata al trinomio di secondo grado è $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$. Autovettori: $(1, 4)$ per $\lambda = 17$, $(-4, 1)$ per $\lambda = 0$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $17X^2 + 0Y^2 - 2\sqrt{17}\frac{1}{\sqrt{17}}(4X + Y) = 0$, dunque $Y = \frac{17}{2}X^2 - 4X$.

Esercizio 5.

[2.5 p.] Determinare la matrice risultante dal prodotto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{29}$.

Sol. La matrice quadrata resta se stessa a seguito di elevamento a potenza dispari. Otteniamo così

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}.$$