Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte mediante procedimenti e calcoli chiari.

Punteggio totale: 32

Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. [2.5] Dato un riferimento cartesiano $Oxyz$, determinare $p \in \mathbf{R}$ in modo che i punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (p, 1, 0)$ siano complanari.
[2] Scrivere equazioni parametriche della retta passante per B e C.
[2.5] Tra i punti di tale retta, determinare quelli distanti $\sqrt{11}$ dal punto $(0, 7, 11)$.

Sol. Per $p = 2$ i punti danno luogo a tre vettori linearmente dipendenti. Come equazioni possiamo scegliere $x = 1 - t$, $y = 2t$, $z = 3t$. Imponendo la distanza richiesta otteniamo $t = \frac{20}{7}$ e $t = 4$.

2. [3] Data la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 3z, 5z)$, calcolare una base di autovettori di f.
[2.5] Determinare un vettore che non abbia controimmagine secondo f.
[2.5] Scrivere la matrice (rispetto alle basi canoniche) della composizione $g \circ f$ dove g è definita da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ e porta i tre vettori canonici nei vettori $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ rispettivamente.

Sol. Autovalori: 5, 3, 0 con rispettivi autovettori $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(2, -1, 0)$. Un vettore che non sia generato dalle colonne della matrice (scritta rispetto alle basi canoniche) è $(1, 0, 0)$ perché esso aumenta il rango della matrice. Infine abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

3. [3.5] Discutere la risolubilità del seguente sistema (assenza di soluzioni oppure presenza di un'unica soluzione o ∞^h soluzioni) al variare del numero reale k:

$$\begin{cases} kx + z = 2 \\ 2x + ky + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 1 \end{cases} .$$

[2.5] Inoltre per $k = 2$ dimostrare che l'asse y e la retta definita dalle prime due equazioni sono rette sghembe.

Sol. Per $k = 1$ abbiamo ∞^1 soluzioni; per $k = 3$ non esiste soluzione; per tutti gli altri valori abbiano un'unica soluzione.

Per $k = 2$ la matrice incompleta ha rango 3, mentre la completa ha rango 4.

4. [2] In $\mathbf{R}^5$, calcolare la proiezione ortogonale di $(2, 1, 2, 1, 2)$ rispetto al sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 2)\rangle$.
[1.5] Calcolare la dimensione del sottospazio ortogonale a S (in simboli, $S^\perp$).
[2.5] Stabilire se la somma di S con $T = \langle(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 3, 3)\rangle$ è una somma diretta $\oplus$.

Sol. Ortogonalizzando il secondo vettore rispetto al primo otteniamo

$$(1, 1, 2, 2, 2) - \frac{8}{5}(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{5}(-3, -3, 2, 2, 2) .$$

Sommando ora i due contributi delle proiezioni ortogonali singole (dopo aver moltiplicato per 5 il secondo vettore) otteniamo

$$\frac{8}{5}(1, 1, 1, 1, 1) + \frac{1}{30}(-3 - 3, 2, 2, 2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) .$$

La dimensione di $S^\perp$ è quanto manca alla dimensione di S per arrivare a 5, dunque 3.
La somma non è diretta perché i quattro generatori di S e T sono linearmente dipendenti.

5. [3] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 - 8xy + 16y^2 - \sqrt{17}x = 0$.
[2] Determinare le coordinate originali del vertice di questa conica.

Sol. Autovettori: $(1, -4)$ per $\lambda = 17$, $(4, 1)$ per $\lambda = 0$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(X + 4Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4X + Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$Y = -\frac{17}{4}X^2 + \frac{X}{4}\ .$$

Sostituendo le nuove coordinate del vertice (X_V, Y_V) nella legge del cambiamento di coordinate, otteniamo le coordinate iniziali (x_V, y_V).