GEOMETRIA – Prova scritta telematica dell'8 luglio 2020, ore 14.00.

Durata totale: 2 ore e 5 minuti (escluso il caricamento delle foto). Punteggio totale: 28.

La prova consiste di una sequenza di 4 sessioni exam.net. Per ciascuna sessione lo studente deve selezionare e risolvere uno dei 4 esercizi **(può decidere liberamente l'ordine)**. Al termine di ogni sessione deve essere inviata la risoluzione (con giustificazioni delle risposte) mediante una o più foto da caricare nel sito exam.net.

È ammessa eccezionalmente la prosecuzione di un esercizio nelle sessioni successive, purché venga indicato con chiarezza il riferimento precedente (ad es. con un asterisco e una nota).

Scrivere NOME e COGNOME in ciascun foglio inviato.

La durata della prima sessione è di 35 minuti, al fine di consentire un'analisi globale con programmazione della sequenza di esercizi da svolgere.

....

Esercizio 1.

[2.5 punti] È dato il piano π di equazione $2x + 3y + 4z - 9 = 0$. Stabilire se π forma un angolo di $30°$ col piano di equazione $z = 5$.

SOL.

$$\frac{|(2,3,4) \times (0,0,1)|}{\sqrt{29}\sqrt{1}} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

quindi la risposta è negativa.

[2.5 punti] Scrivere equazioni cartesiane della retta contenuta in π, passante per il punto $(1, 1, 1)$ e incidente l'asse y.

SOL. Questa retta deve passare anche per $(0, 3, 0)$ che è il punto d'intersezione dell'asse y col piano. Ora, dalle equazioni parametriche $x = t, y = 3 - 2t, z = t$ otteniamo $x - z = 2x + y - 3 = 0$.

[2 punti] Determinare una base della giacitura di π.

SOL. Ad es. $\{(2, 0, -1), (0, 4, -3)\}$.

Esercizio 2.

[3 punti] Data l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x - y, 5x - y - 2z)$, determinarne una base di autovettori.

SOL. $\lambda = 0 : (1, 3, 1)$; $\lambda = 2 : (1, 1, 1)$; $\lambda = -4 : (1, -1, -3)$.

[1.5 punti] Determinare due vettori che abbiano la stessa immagine.

SOL. Due multipli arbitrari di $(1, 3, 1)$ appartengono al nucleo, quindi la loro immagine è uguale a $(0, 0, 0)$.

[2 punti] Scrivere la matrice di f rispetto alla base di autovettori trovata (nel dominio e nel codominio).

SOL. Si tratta della matrice diagonale avente gli autovalori sulla diagonale principale.

Esercizio 3.

[1 punto] Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 1, 0, 1, 0)$ sul sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1, 1)\rangle$.

SOL. $\frac{2}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$.

[2.5 punti] Scrivere equazioni cartesiane di S (il minimo numero).

SOL. Le equazioni parametriche sono

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = s(1, 1, 1, 1, 1) \ \Leftrightarrow\ x_1 = s, x_2 = s, x_3 = s, x_4 = s, x_5 = s \ ,$$

da cui seguono (per assorbimento della s) le 4 equazioni cartesiane

$$x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = x_1 - x_4 = x_1 - x_5 = 0 \ .$$

[2 punti] Ripetere lo stesso esercizio (equazioni cartesiane) col sottospazio $T = \langle(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,2)\rangle$.

SOL. Per facilitare i calcoli possiamo sostituire il secondo vettore con $(0,0,0,0,1)$. Ora abbiamo ad es. $x_1 - x_4 = x_2 - x_4 = x_3 - x_4 = 0$.

[2.5 punti] Determinare 3 vettori linearmente indipendenti e appartenenti al sottospazio ortogonale $T^\perp$.

SOL. È sufficiente considerare i coefficienti delle tre equazioni trovate prima. Abbiamo dunque $(1,0,0,-1,0)$, $(0,1,0,-1,0)$, $(0,0,1,-1,0)$.

Esercizio 4.

[3 punti] Eseguire una rotazione del riferimento per portare in forma canonica l'iperbole di equazione $3x^2 + 4xy - 8 = 0$.

SOL. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{8} = 1 \ .$$

[2 punti] Determinare l'equazione originale di uno dei suoi asintoti (a piacere).

SOL. Utilizzando le formule inverse,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

partendo ad esempio dall'equazione $Y = 2X$ otteniamo

$$(-x + 2y) = 2(2x + y) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ .$$

[1.5 punti] Stabilire se l'equazione di una data circonferenza centrata nell'origine viene modificata o no, a seguito delle sostituzioni di variabile trovate precedentemente.

SOL. La circonferenza resta invariata, quindi l'equazione non cambia.