27 ottobre 2021. Esame scritto di GEOMETRIA

Nome_______________ **Cognome**__________________________

Data di nascita_____________ **N. di matricola**_______________

1: [**3.5**] Determinare tutte le soluzioni reali del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2p + q - 3s = 0 \\ p - q + r - s + t = 0 \\ 5p + 4q - r - 8s - t = 0 \end{cases}$$

Sol. Una equazione è superflua, quindi abbiamo rango 2 e $5 - 2$ parametri. Possiamo scegliere r, s, t come parametri (il rango infatti resta 2). Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} 2p + q = 3s \\ p - q = -r + s - t \end{cases}$$

ecc.

2: [**2.5**] Determinare $t \in \mathbf{R}$ in modo che la distanza tra il piano $\pi : x + 2y + 3z - 10 = 0$ e il punto $P(t) = (t, t + 1, t)$ sia 4.

[**2.5**] Scrivere equazioni cartesiane della retta descritta dal punto parametrico $P(t)$.

[**2.5**] Dimostrare che questa retta e l'asse z sono rette sghembe.

Sol. Utilizzando la formula della distanza otteniamo

$$\frac{|6t - 8|}{\sqrt{14}} = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3}(4 \pm 2\sqrt{14}) \ .$$

Assorbendo la t a partire dall'equazione $x = t$ otteniamo $y = x + 1 \ \wedge \ z = x$.

I vettori direttori delle due rette in esame non sono paralleli e inoltre l'intersezione tra le rette è vuota.

3. [**3**] Mediante una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $x^2 + 16xy - 11y^2 - 45 = 0$.

[**2**] Scrivere le coordinate dei suoi vertici (nel riferimento iniziale Oxy).

Sol. Autovettori: $(2, 1)$ per $\lambda = 5$, $(-1, 2)$ per $\lambda = -15$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{3} = 1$. Il calcolo dei vertici dà $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. [**3**] Stabilire se $\underline{u} + \underline{v}$ è un autovettore relativo all'applicazione lineare $f : U \to U$ dove U è un fissato spazio vettoriale di dimensione 2 con base $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ ed è noto che $f(\underline{u}) = 4\underline{u} - \underline{v}$, $f(\underline{v}) = 2\underline{u} + 7\underline{v}$.

Sol. Abbiamo:

$$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = 6(\underline{u} + \underline{v}) \ ,$$

quindi $\underline{u} + \underline{v}$ è un autovettore con autovalore 6.

5. [**2.5**] Determinare una base dell'immagine relativa all'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, w, z) = (x, y + w + z, x + y + w + z)$.

[**2**] Stabilire se esistono coppie di vettori che hanno la stessa immagine secondo f.

[**2.5**] Determinare un vettore del codominio che non abbia controimmagine.

Sol. Selezioniamo le prime due colonne, linearmente indipendenti, nella matrice di rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Esse costituiscono una base dell'immagine.

Questa applicazione non è iniettiva, quindi esistono le coppie richieste.

Un vettore che non ammette controimmagine è ad esempio $(0,1,0)$ perché non è generato dalle colonne scelte.

6. [**1**] Modificare il vettore $(1,2,3,4)$ in modo che insieme ai vettori $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ costituisca una base ortogonale del sottospazio S generato dai tre vettori menzionati.

[**1**] Calcolare successivamente la proiezione ortogonale del vettore $(1,1,1,1)$ su S.

Sol. Il nuovo vettore è

$$(1,2,3,4) - 1(1,0,0,0) - 2(0,1,0,0) = (0,0,3,4) \ .$$

La proiezione è quindi

$$\frac{7}{25}(0,0,3,4) + 1(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) = \left(1, 1, \frac{21}{25}, \frac{28}{25}\right) \ .$$

7. [**2.5**] Data la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \pi^4 & \sqrt{5} & 7 \end{pmatrix} ,$$

calcolare il determinante della matrice inversa N^{-1}.

Sol. In virtù del teorema di Binet abbiamo:

$$|N^{-1}| = |N|^{-1} = \frac{1}{14} \ .$$