1. È dato il piano $\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0$. Determinare i valori di k che rendono π parallelo alla retta $r : x - y = 3y + kz + k = 0$. Determinare i punti dell'asse y che sono distanti $\sqrt{14}$ da π. Posto $k = 1$, calcolare la distanza tra r e la retta $s : x - y = 3y + z = 0$ (parallela a r).

Sol. (cenno) Il determinante della matrice incompleta deve essere nullo ($k = 3$); dal testo si deduce che non è necessario controllare che la matrice completa resti di rango 3. Il punto mobile $(0, t, 0)$ deve soddisfare la formula della distanza punto-piano – otteniamo due punti. La distanza finale è la distanza tra i punti di intersezione delle due rette con un piano qualsiasi che sia perpendicolare ad esse (vettore normale uguale al vettore direttore delle rette).

2. Calcolare la dimensione del sottospazio $S = \langle(1, 1, 1, 1),(2, 2, 2, 3),(0, 0, 0, 1),(4, 4, 4, 4)\rangle \subset \mathbf{R}^4$. Scrivere (il minimo numero di) equazioni cartesiane di S. Calcolare la proiezione ortogonale di $(0, 0, 5, 0)$ su S.

Sol. (cenno) Il rango dalla matrice che ha tali vettori come righe vale 2 (ad es. utilizzare la riduzione a gradini). Le equazioni (due) si ottengono imponendo che sia 2 il rango della matrice avente per righe due vettori lin. indip. e un terzo vettore (x, y, w, z) (orlati, ecc.). Una volta ortogonalizzati i due vettori, si effettua la proiezione mediante i relativi coefficienti di Fourier.

3. Mediante una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica la parabola di equazione $4x^2 + 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x - 4 = 0$. Calcolare le coordinate del fuoco, nel riferimento iniziale.

Sol. (cenno) Autovettori: $(2, 1)$, $(-1, 2)$. Otteniamo: $5X^2 + 0Y^2 - 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y)\right) - 4 = 0$ e la conseguente eq. canonica $Y = ...$ Una volta calcolato il fuoco (X_F, Y_F), sostituiamo le coordinate nella formula del cambiamento di coordinate.

4. È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (2, 2, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (3, 3, 3)$. Calcolare una base di autovettori di f. Determinare un vettore che non abbia controimmagine secondo f.

Sol. (cenno) Per $\lambda = 0$ otteniamo un autospazio di dim. 2, la cui equazione è $2x + y + 3z = 0$ (nota: esso è il nucleo); inoltre con l'autovalore $\lambda = 6$ troviamo l'autovettore $(1, 1, 1)$. Un vettore che non ha controimmagine è una colonna che aumenti il rango della matrice incompleta, se aggiunta (è un vettore che non soddisfa l'equazione dell'immagine, un piano).

5. Di un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ è noto che $g(8, 9) = (0, 1, 0)$ e $g(4, 5) = (1, 0, 9)$. Calcolare $g(0, -1)$.

Sol. (cenno) utilizziamo la linearità: dopo aver calcolato le coordinate di $(0, -1)$ rispetto alla base $\{(8, 9),(4, 5)\}$, abbiamo: $g(0, -1) = g(1(8, 9) - 2(4, 5)) = 1g(8, 9) - 2g(4, 5) = (-2, 1, -18)$.