Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

GIUSTIFICARE le risposte, mediante procedimenti e calcoli chiari.
Consegnare soltanto la bella copia; utilizzare al massimo due fogli protocollo.
Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.
INSERIRE il presente foglietto; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

1. Mediante una rotazione del riferimento Oxy, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $11x^2 + 16xy - y^2 - 30 = 0$. Scrivere le coordinate dei suoi vertici (nel riferimento Oxy).

Sol. Autovettori: $(-1, 2)$ per $\lambda = -5$, $(2, 1)$ per $\lambda = 15$. Sostituendo le vecchie variabili mediante la legge $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ otteniamo $\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{6} = 1$. Il calcolo dei vertici dà $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Calcolare tutti gli autovalori e almeno un autovettore per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x + y + z)$. Pur senza aver calcolato tutti gli autovettori, stabilire se $(0, 2, 1)$ è un autovettore di f. Interpretando $\mathbf{R}^3$ come lo spazio geometrico $Oxyz$, stabilire se il nucleo di f è una retta.

Sol. Dall'equazione caratteristica, $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0$, otteniamo $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Per $\lambda = 0$ otteniamo l'autospazio $(t, 0, -t)$. $(0, 2, 1)$ non è un autovettore perché $f(0, 2, 1) = (1, 3, 3)$ che non è un multiplo del vettore dato. Il nucleo ha dimensione 1, quindi corrisponde a una retta.

3. Calcolare la distanza tra l'origine degli assi e la retta $r : x - y = x + y - z - 1$. Stabilire se r e l'asse z sono rette sghembe.

Sol. L'intersezione tra r e il piano perpendicolare a r e passante per l'origine è $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. La distanza tra questa intersezione e l'origine vale $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Le due rette sono in realtà incidenti.

4. Determinare eventuali valori reali di k per i quali il seguente sistema non ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 2 \\ 2x + ky + 2z = 1 \\ x + (k + 4)y + z = 5 \end{cases}$$

Sol. Il rango della matrice incompleta scende a 2 per $k = 1$ e $k = -8$, ma solo per $k = -8$ il rango della completa resta uguale a 3. Questo è dunque l'unico valore idoneo.

5. Di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è noto che $f(1, 3) = (3, 0)$ e $f(3, 1) = (2, 0)$. Calcolare $f(2, 2)$.

Sol. $f(2, 2) = f\left(\frac{1}{2}(1, 3) + \frac{1}{2}(3, 1)\right) = \frac{1}{2}(f(1, 3) + f(3, 1)) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

6. Determinare equazioni cartesiane dei due piani paralleli all'asse y, distanti 5 dall'origine e perpendicolari al piano di equazione $x - y = 0$.

Sol. Partendo dall'equazione generale $ax + by + cz + d = 0$, dalla prima richiesta abbiamo che $b = 0$, mentre la terza richiesta produce il vincolo $a = b$, dunque anche a è nullo. Possiamo supporre che c non sia nullo, quindi dividendo per c (o equivalentemente supponendo che c valga 1) abbiamo il piano candidato, $z + d = 0$. Ora imponiamo che $\frac{|1 \cdot 0 + d|}{\sqrt{1^2}} = 5$, ottenendo i due piani $z = \pm 5$. Il problema poteva essere risolto anche per via sintetica, ragionando sulle mutue posizioni dei vari enti geometrici.

7. Calcolare la proiezione ortogonale di $(1, 2)$ rispetto al sottospazio $S = \langle (2, 3), (-2, -3) \rangle$. Calcolare la medesima proiezione anche rispetto al sottospazio $S' = \langle (2, 3), (2, 4) \rangle$, possibilmente senza effettuare calcoli superflui.

Sol. Una base (necessariamente ortogonale) di S è costituita dal solo $(2, 3)$. La proiezione è dunque $\frac{8}{13}(2, 3)$. Invece, S' coincide con lo spazio ambiente $\mathbf{R}^2$, dunque la proiezione resta il vettore stesso, $(1, 2)$.

8. Stabilire se una matrice che è l'inversa di se stessa può avere determinante uguale a $\sqrt{2}$.

Sol. Per il teorema di Binet ciò non è possibile. Data infatti una matrice M con $|M| = \sqrt{2}$, avremmo che $2 = |M| \cdot |M| = |M \cdot M| = |I_2| = 1$.