Esercizi risolti e note di geometria

per il corso di laurea in

Tecniche per l'edilizia e il territorio
per la professione del geometra[1]

Andrea Vietri

Sapienza Università di Roma

A.A. 2019-2020

[1]Questi esercizi possono essere consultati anche dagli studenti di ingegneria energetica come approfondimento.

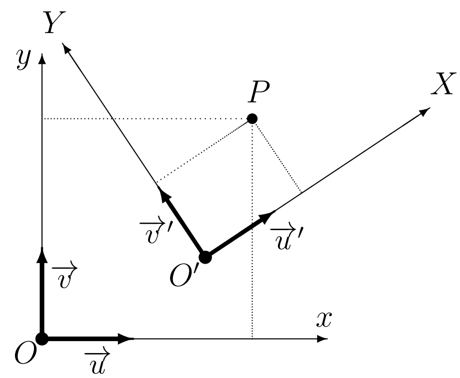
Argomenti

①

$\Big\langle$ *Vettori e geometria nel piano cartesiano* O_{xy} $\Big\rangle$

• Vettori geometrici e riferimento cartesiano

Possiamo costruire un riferimento cartesiano O_{xy} a partire da un punto privilegiato (l'*origine*) su cui vengono applicati due vettori geometrici $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.



Utilizzeremo anche i simboli $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}_O$ e $\{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'\}_{O'}$ per i due rispettivi riferimenti. Ovviamente la scelta del riferimento influisce sulle coordinate dei punti. Il punto P appare molto più vicino all'origine O' rispetto all'altro riferimento.

Il tipico problema matematico in questo contesto è la costruzione di formule che permettano di calcolare le coordinate di un punto in un nuovo riferimento, conoscendo le coordinate nel vecchio riferimento, o viceversa. Nella figura, ad esempio, sarebbe interessante trovare X_P e Y_P conoscendo $x_P = \frac{5}{2}$, $y_P = \frac{8}{3}$, $O'_x = 2$, $O'_y = 1$ e $\theta = 30°$, dove θ è la rotazione antioraria del nuovo riferimento rispetto al vecchio.

• Numeri complessi e vettori geometrici

Esiste un legame naturale, elementare, tra numeri complessi e vettori geometrici del piano O_{xy} applicati nell'origine; infatti un dato vettore (a, b), o il punto di coordinate (a, b), possono essere interpretati come il numero complesso $a + bi$. Ora, una volta entrati nell'insieme $\mathbf{C}$ possiamo sfruttare le proprietà algebriche e in particolare possiamo riscrivere un numero complesso come ρe^{is}, dove ρ è il modulo e s la fase (angolo antiorario a partire dal semiasse $x \geq 0$). Si tratta di un'elegante ed importantissima proprietà dei numeri complessi; l'esponenziale complessa è uno degli argomenti iniziali che si incontrano quando ci si avventura nel mare complesso allontanandosi dalla costa dei numeri reali. Nel nostro contesto tale proprietà consente di riscrivere ρe^{is} come $\rho(\cos s + i \sin s)$. I vettori di lunghezza 1 (i *versori*) corrispondono ai numeri complessi del tipo $e^{is} = (\cos s + i \sin s)$.

◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦ ◦

Es. 1. Che differenza c'è tra il *punto* $(7,9)$ e il *vettore* $(7,9)$?

Sol. Il punto (7,9) occupa un "punto" preciso del piano, una volta fissato un sistema di riferimento Oxy. Invece la posizione del vettore $(7,9)$ non ha importanza, mentre ciò che veramente conta è la sua inclinazione e in molti casi anche il verso e la lunghezza. Quando un vettore viene "ancorato" a un punto, allora si parla di "vettore applicato", e solo in quel caso dobbiamo disegnarlo in un punto preciso. Da tale punto si origina la freccia che avrà poi le caratteristiche del vettore. La bandiera italiana esiste nella nostra mente, indipendentemente da dove si pianta la sua asta. Esistono poi moltissime "bandiere applicate".

Es. 2. Siamo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ due vettori applicati in un punto P. Sia W il punto tale che $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PW}$. Dimostrare che $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}$ è uguale all'altra diagonale del parallelogramma $PQWR$, diretta da R a Q (in simboli, $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{RQ}$)

Sol. La sottrazione è un'operazione che nasce successivamente all'addizione, in qualunque insieme essa venga eseguita. L'elemento $c=a-b$ è, per definizione, quello tale che $c+b=a$ (è quindi lo strumento per ritornare ad a partendo da c, una sorta di "antidoto"). Nel nostro contesto è sufficiente verificare che $\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}$, ma questa è proprio la legge della somma mediante il parallelogramma (scambiando gli addendi).

Es. 3. Dimostrare che la somma di vettori geometrici è associativa; in simboli,

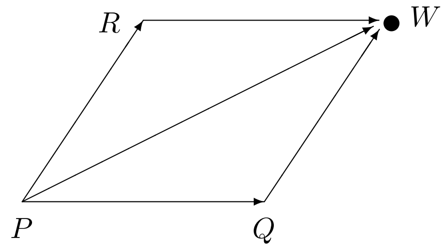
$$\overrightarrow{PQ}+(\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS})=(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})+\overrightarrow{RS} \quad \forall\, \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QR},\overrightarrow{RS}\ .$$

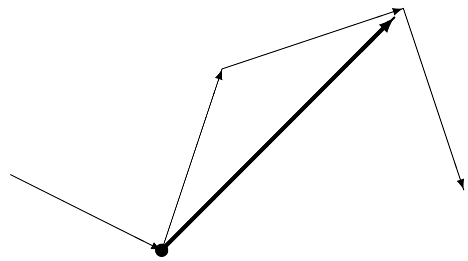
Sol. L'associatività è come l'aria: non si vede, non si tocca, spesso nemmeno si apprezza, sembra che non esista, ma in effetti è indispensabile per la vita. Ad esempio l'operazione di divisione non gode dell'associatività: quanto vale $100/20/4$? Dobbiamo assolutamente precisare quale delle due divisioni sarà effettuata prima, perché i risultati sono diversi. Similmente non è associativo l'uso della preposizione "di": il libro delle ricette della nonna appartiene alla nonna o sta in una libreria?

La somma di vettori geometrici è associativa essenzialmente perché essa può essere vista come una concatenazione; infatti per ottenere $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PW}$ in un modo alternativo, possiamo traslare $\overrightarrow{PR}$ applicandolo sul punto finale, Q, di $\overrightarrow{PQ}$; in effetti stiamo concatenando $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QW}$ (notiamo che $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QW}$). In generale, la somma di n vettori liberi $\overrightarrow{v}_1,\ \dots\ ,\ \overrightarrow{v}_n$ può essere effettuata applicando $\overrightarrow{v}_2$ sul punto finale di $\overrightarrow{v}_1$, poi $\overrightarrow{v}_3$ sul punto finale di $\overrightarrow{v}_2$ e continuando fino a trovare il punto finale. In particolare, non conta l'ordine in cui le concatenazioni vengono effettuate. Se ad es. decidiamo di effettuare subito $\overrightarrow{v}_2+\overrightarrow{v}_3$, sostituiremo tali vettori con un unico vettore che parte dal punto di applicazione di $\overrightarrow{v}_2$ e termina sul punto finale di $\overrightarrow{v}_3$.

Nota: un altro esempio importante di operazione associativa è quello della *composizione* di funzioni: ad es. $\sin(\log(\cos x))$ non dà luogo a malintesi: o calcoliamo prima $y=\log(\cos x)$ per poi calcolare $\sin y$, o consideriamo $\cos x$ come una variabile y e poi applichiamo la funzione $\sin(\log y)$. Anche in questo caso l'associatività è resa possibile dalla concatenazione di tre processi,

$$A\to B\to C\to D$$





ciascuno dei quali traghetta un elemento $a \in A$ nell'immagine dell'insieme successivo, per tre volte:

$$a \to \cos a \to \log(\cos a) \to \sin(\log(\cos a)) \ ,$$

con $\cos a \in B$, $\log(\cos a) \in C$ e $\sin(\log(\cos a)) \in D$. Non importa se interpretiamo il processo totale come un traghettamento singolo più uno doppio, o come uno doppio seguito da uno singolo.

②

⟨ *Rette e coniche nel piano cartesiano* ⟩

Es. 4. Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per $(8,0)$ e $(8,3)$, poi un'equazione della retta passante per $(3,3)$ e $(-30,-30)$.

Sol. $x = 8$; $y = x$.

Es. 5. Data la retta r di equazione $3x + 4y + 7 = 0$, determinare un'equazione cartesiana della retta parallela a r e passante per $(8,-2)$. Determinare poi un'equazione cartesiana della retta perpendicolare a r e passante per $(0,2)$.

Sol. Possiamo svincolare il termine noto c e imporre il passaggio per il punto dato. L'equazione $3x + 4y + c = 0$ diviene $3 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) + c = 0$, dunque $c = -16$.

Un vettore ortogonale a r è $(a,b) = (3,4)$. Si può procedere come nel caso precedente, utilizzando l'equazione $4x-3y+c = 0$, da cui si ottiene $c = 6$; in alternativa, si può costruire l'equazione di una retta parallela al vettore $(3,4)$ e passante per il punto $(0,2)$: $(x-0) \cdot 4 = (y-2) \cdot 3$, ecc.

Es. 6. Rappresentare graficamente la retta r descritta in forma parametrica come $x = 6t + 2$, $y = 7t - 4$. Stabilire se i punti $(20,17)$, $(20,18)$, $(4\sqrt{3}, 2\sqrt{5})$ appartengono a r. Scrivere poi una forma cartesiana di r.

Sol. $\overrightarrow{v_r} = (6,7)$, in particolare $m = \frac{7}{6}$. Per $t = 0$ si ha il punto $(2,-4)$, di r. Si può quindi disegnare la retta, applicando in $(2,-4)$ il vettore $(6,7)$ e prolungando il vettore in entrambi i versi.

Affinché $(20,17)$ sia un punto di r, deve essere $20 = 6t + 2$ da cui $t = 3$; di conseguenza $y = 7 \cdot 3 - 4 = 17$; dunque $(20,17) \in r$. Nel secondo caso si ottiene una condizione impossibile, dunque non c'è appartenenza. Anche nel terzo caso otteniamo un assurdo; in dettaglio,

$$6t + 2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{4\sqrt{3} - 2}{6} \Rightarrow y = 7\frac{4\sqrt{3} - 2}{6} - 4 \neq 2\sqrt{5}\ ,$$

dove l'ultima disuguaglianza equivale a $28\sqrt{3} - 14 - 24 \neq 12\sqrt{5}$ o meglio $28\sqrt{3} - 12\sqrt{5} \neq 38$, facilmente verificabile per approssimazione.

Per scrivere un'equazione cartesiana: $t = \frac{x-2}{6} \Rightarrow y = 7\frac{x-2}{6} - 4 \Rightarrow 7x - 6y - 38 = 0$.

Es. 7. Scrivere sia equazioni cartesiane che parametriche della retta r passante per $(4,1)$ e parallela all'asse x. Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{1300}$ dalla retta di equazione $2x+3y+5 = 0$.

Sol. Eq. cartesiana: $y = 1$. Eq. parametriche: $x = t, y = 1$. Imponendo la distanza data (tramite la formula della distanza), si trova $t = 61$ e $t = -69$.

Es. 8. Calcolare la proiezione ortogonale (scalare non negativo) del vettore $(8,9)$ sulla retta r : $x - 3y + 102 = 0$.

È consigliabile traslare la retta sull'origine e applicare il vettore nell'origine; infatti la quota non gioca alcun ruolo in questo esercizio! La retta parallela a r e passante per l'origine, sia essa r', ha come equazione cartesiana $x - 3y = 0$. Una volta calcolato il punto H, definito come la proiezione ortogonale del punto $A = (8,9)$ su r', la proiezione richiesta sarà la lunghezza $\overline{OH}$. Per trovare H intersechiamo r' con la perpendicolare passante per A. Quest'ultima retta è definita dalle equazioni parametriche $(x,y) = (8,9) + t(1,-3)$, o per esteso $x = 8 + t$, $y = 9 - 3t$, avendo considerato il vettore $(1,-3)$ perpendicolare a $(3,1)$, vettore direttore di r. Tale retta poteva essere definita anche attraverso un'equazione cartesiana, ma la forma parametrica accorcia la strada per risolvere il sistema. Infatti ora sostituiamo le equazioni parametriche nell'equazione di r', ottenendo $(8+t)-3(9-3t)=0$, dunque $t=\frac{19}{10}$. Infine, $H=\left(\frac{99}{10},\frac{33}{10}\right)$ e $\overline{OH}=\frac{33}{10}\sqrt{9+1}=\frac{33}{\sqrt{10}}$.

È importante notare che esiste un metodo rapidissimo per giungere alla medesima conclusione, grazie a un semplice calcolo basato sulla nozione superiore di "prodotto scalare". In alternativa, poi, questo esercizio potrebbe essere risolto calcolando la distanza di A da r' (con la nota formula) e poi applicando il teorema di Pitagora.

Es. 9. Calcolare la distanza tra il punto $(8,9)$ e la retta di equazione $y=2x-1$. Inoltre, su tale retta determinare i punti aventi distanza 10 da $(4,3)$.

Sol. $\delta=\frac{|16-9-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$. Ora, imponendo che la distanza tra (4,3) e il punto mobile $P(t)=(t,2t-1)$ sia uguale a 10, otteniamo $t_1=-2$, $t_2=\frac{34}{5}$ (in alternativa possiamo risolvere un sistema tra la retta e un'opportuna circonferenza).

Es. 10. Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $y=3x-1$ e $x=3y-3$.

Sol. Possiamo considerare i due vettori direttori le cui componenti sono $(1,3)$ e $(3,1)$. Applicando la formula del coseno otteniamo

$$\cos\hat{rs}=\frac{3+3}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{3}{5}\ .$$

Poiché era richiesto l'angolo acuto, il coseno deve restare positivo (le due rette formano anche un angolo ottuso, il supplementare, col coseno cambiato di segno).

Es. 11. Trovare tutte le eventuali soluzioni per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1:\begin{cases}2x+3y=0\\x-41y=0\end{cases},\ 2:\begin{cases}2x+3y=5\\2x+4y=5\\6x+9y=7\end{cases},\ 3:\begin{cases}2x+3y=5\\2x+4y=5\\y=0\end{cases},$$

$$4:\begin{cases}2x+3y=5\\2x+4y=5\\2x+5y=6\end{cases},\ 5:\begin{cases}3x-y=0\\2y-6x=0\end{cases}.$$

Disegnare le corrispondenti rette, sia mediante tabelle che con lo studio del coefficiente angolare e della quota. Giustificare geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate.

Sol. 1: un solo punto, $(0,0)$; le due rette si intersecano (nell'origine). 2: nessuna soluzione; la prima e la terza retta sono parallele ($m=-\frac{2}{3}$, quote diverse), la seconda le interseca ($m=-\frac{1}{2}$) ma in punti ovviamente distinti. 3: un punto; le tre rette hanno esattamente un punto in comune, $\left(\frac{5}{2},0\right)$. 4: nessuna soluzione; le tre rette formano un triangolo. 5: infiniti punti, del tipo $(t,3t)$, per qualsiasi scelta di $t\in\mathbf{R}$; le due rette sono in realtà la stessa retta, e la loro intersezione è dunque ancora tale retta.

Es. 12. Di una parabola è noto che la direttrice ha equazione $y=3x+5$ e il fuoco ha coordinate $(8,2)$. Stabilire se $(4,4)$ è un punto della parabola.

Sol. La distanza del punto $(4,4)$ dalla direttrice deve essere uguale alla distanza dal fuoco, ma ciò non accade perché

$$\frac{|3\cdot 4-4+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}\neq\sqrt{(4-8)^2+(4-2)^2}\ .$$

Nota: per dimostrare che $\frac{13}{\sqrt{10}}\neq\sqrt{20}$ possiamo elevare al quadrato i due termini.

Es. 13. Con riferimento all'Es. 12, determinare i punti che appartengono alla parabola ed hanno ordinata nulla.

Sol. Consideriamo il punto candidato, $(t, 0)$. Abbiamo l'equazione

$$\frac{|3 \cdot t - 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{(t-8)^2 + (0-2)^2} \ ,$$

da cui otteniamo $t = 95 \pm \sqrt{8370}$.

Es. 14. Sia $\mathcal{C}$ la conica che ha il fuoco e la direttrice come nell'Es. 12 e che inoltre passa per $(4, 4)$. Stabilire se $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

Sol. L'eccentricità vale $\sqrt{20}/(13/\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{200}}{13}$. Il risultato è maggiore di 1 perché $13^2 = 169$, dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

Es. 15. Utilizzando un'interpretazione geometrica, determinare tutte le soluzioni del sistema di *disequazioni* $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$.

Sol. Partiamo dalla retta r di equazione $x - y = 0$ (la bisettrice del I e III quadrante). Essa divide il piano $\mathcal{P}$ in due *semipiani*; se scegliamo un punto arbitrario (x_0, y_0) al di sopra di r, avremo che $y_0 > x_0$, cioè $x_0 - y_0 < 0$. Al di sotto di r avremo invece un risultato positivo. Quindi la prima disequazione del nostro sistema è soddisfatta da tutti i punti del semipiano inferiore a r, compresa r stessa. Nel caso della seconda equazione, notiamo che la disuguaglianza è stretta. Dobbiamo quindi considerare il semipiano inferiore alla retta s di equazione $y = -2x + 3$ (infatti per i punti di tale semipiano si ha che $y < -2x + 3$), escludendo la retta s. In questo caso parliamo di semipiano *aperto*, mentre nel primo caso il semipiano si dice *chiuso* perché contiene r. La soluzione del sistema corrisponde all'intersezione dei due semipiani. Si tratta di una porzione di $\mathcal{P}$ delimitata da r (inclusa) ed s (esclusa), il cui estremo superiore delle quote è il punto di intersezione $r \cap s$, cioè $(1, 1)$ – avendo risolto il relativo sistema di *equazioni*. Notiamo che $(1, 1)$ resta escluso, mentre ad es. $\left(1, \frac{47}{48}\right)$ è una soluzione – infatti esso soddisfa anche la seconda disequazione.

③

$\langle$ *Matrici* $\rangle$

Es. 16. Calcolare le inverse delle matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi & 0 \\ 0 & 0 & 123 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

<u>Sol</u>. $L^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{123} \end{pmatrix} \quad , \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \end{pmatrix}$

Es. 17. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare $CA + B^{-1}$. Verificare poi il teorema di Binet nel caso del prodotto $B \cdot B$.

<u>Sol</u>. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. $|B| \cdot |B| = 1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = |B \cdot B|$.

Es. 18. Sono date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calcolare A^{-1} e B^{-1} purché ciò sia possibile. Dei prodotti AC, AD, CA, DA calcolare solo quelli leciti.

<u>Sol</u>: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$. $AD = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 10 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}$. $CA = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 \\ 11 & 82 & 12 \end{pmatrix}$.

Es. 19. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Sol</u>. Sottraendo la metà della prima riga a ciascuna delle altre righe, e scrivendo le nuove righe al posto delle rispettive righe iniziali, otteniamo una matrice il cui determinante è lo stesso di quello iniziale (infatti abbiamo utilizzato operazioni del tipo $\underline{r} \to 1 \cdot \underline{r} + \alpha \underline{r}'$). Abbiamo, poi,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left((-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = -2(-24) = 48 .$$

Es. 20. Calcolare il determinante del prodotto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Sol</u>. Utilizzando il teorema di Binet otteniamo facilmente $-14 \cdot (-10) \cdot 3 = 420$ (notiamo che le matrici sono oltretutto triangolari, dunque ciascun determinante è il prodotto dei termini sulla diagonale principale).

Es. 21. Dimostrare che l'inversa di una matrice – se esiste – è unica.

Sol. Data una matrice invertibile M, Supponiamo che esistano due matrici A, B tali che $AM = MA = I_n$ e $BM = MB = I_n$. Abbiamo:

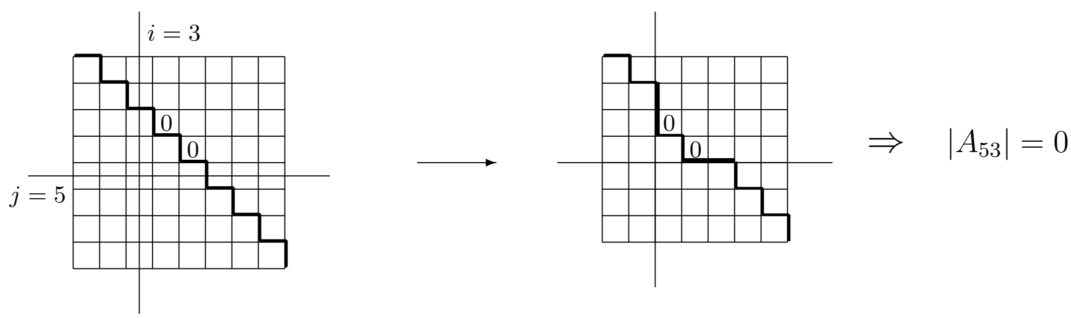
$$B = I_n B = (AM)B = A(MB) = AI_n = A \ .$$

Notiamo che il terzo "=" esprime l'associatività del prodotto di matrici.

Es. 22. Dimostrare che l'inversa di una matrice triangolare inferiore (invertibile) è triangolare inferiore.

Sol. Sia $A = (a_{ij})$ triangolare inferiore invertibile (formalmente, $a_{ij} = 0 \,\forall\, i < j \wedge a_{ii} \neq 0 \,\forall\, i$). Scegliamo arbitrariamente i e j con $i < j$; mostreremo che il complemento algebrico α_{ji} (ricordiamoci di scambiare gli indici!) è nullo. Tale complemento è uguale a $(-1)^{j+i}|A_{ji}|$. Non è difficile dimostrare che la sottomatrice A_{ji} è triangolare inferiore e, in aggiunta, ha alcuni elementi nulli sulla diagonale, precisamente quelli nei posti (t, t) con $i \leq t \leq j - 1$ (eventualmente soltanto un posto, se $j = i + 1$); nella figura è illustrato il caso di α_{53} in una matrice di ordine 8.

In conclusione, poiché $|A_{ji}|$ è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, esso è nullo; dunque α_{ji} è nullo.

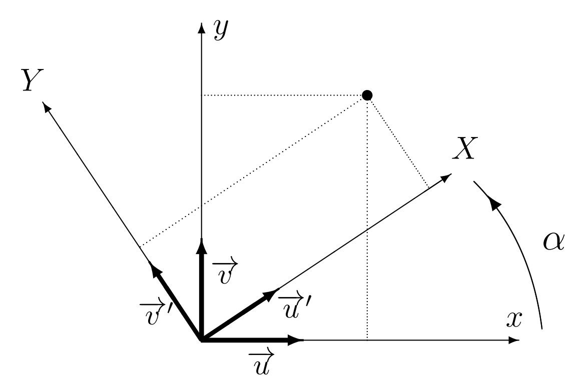


④

⟨ *Cambiamenti di coordinate nel piano cartesiano* ⟩

• **Formule per la rotazione**

Se ruotiamo gli assi di un riferimento O_{xy} di un angolo α antiorario, ciò equivale a ruotare di α in senso orario il piano del riferimento. Le leggi del cambiamento di coordinate possono essere dedotte dall'analisi della seguente figura.



Le matrici consentono di sintetizzare le formule in modo efficace. Poniamo in colonna le coordinate dei versori del nuovo riferimento *scritte nel vecchio riferimento*, dunque $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Otteniamo la legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ,$$

esplicitamente:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \ , \ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \ .$$

Facciamo un esperimento: sostituendo $X = 1$, $Y = 0$ otteniamo la prima colonna, $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Infatti le coordinate di $\overrightarrow{u}'$ sono $(1, 0)$ nel nuovo riferimento. Qualcosa di simile accade con la seconda colonna. Tutti gli altri punti si comportano *linearmente*, cioè seguono la proporzionalità e la distributività insite nel prodotto stesso tra matrici, quindi le formule sono effettivamente corrette per ogni punto del piano.

Se ci occorrono le formule inverse, quelle che esprimono le nuove coordinate in funzione delle vecchie, possiamo agire in tre modi:

1) Ripetiamo il ragionamento scambiando vecchio e nuovo riferimento, ottenendo così le colonne $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $(\sin\alpha, \cos\alpha)$.

2) Risolviamo il sistema ottenuto prima, esplicitando X e Y rispetto a x e y.

3) Scriviamo direttamente la matrice inversa; notiamo che essa coincide con la trasposta, in simboli $M^{-1} = M^t$, se M era la matrice iniziale. Questo fenomeno si verifica regolarmente quando scegliamo versori ortogonali. Siamo in presenza di una cosiddetta matrice *ortogonale*.

Arriviamo comunque alla legge

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

- **Riflessione e retta invariante**

Sia r_θ la rotazione del riferimento O_{xy} di un angolo θ in senso orario (dunque ruotiamo gli oggetti del piano in senso opposto, antiorario). Sia poi τ la riflessione rispetto all'asse X del nuovo riferimento O_{XY}. Calcoliamo intanto l'effetto di $\tau \circ r_\theta$ su un versore e^{is}; abbiamo

$$\tau \circ r_\theta(e^{is}) = \tau(e^{i(s+\theta)}) = e^{i(-s-\theta)} \ .$$

Esistono versori che restano se stessi, invariati, dopo l'azione di $\tau \circ r_\theta$? Risolvendo l'equazione $s = -s - \theta$ troviamo $s = -\frac{\theta}{2}$. In realtà gli angoli invarianti sono due: $-\frac{\theta}{2}$ e anche $-\frac{\theta}{2} + \pi$; infatti abbiamo una retta, non una semiretta, invariante. Geometricamente, è evidente che tale retta ha la proprietà richiesta; infatti (ragionando sul movimento inverso della retta anziché su quello diretto del riferimento, cosa sempre lecita) se ad es. $\theta = 48°$, la retta è inizialmente inclinata di $-24°$ e ruotando in senso antiorario di $48°$ essa diviene inclinata di $+24°$; ora la riflessione τ la riporta alla situazione iniziale, invertendo il segno dell'angolo.

Se vogliamo ottenere anche l'angolo $-\frac{\theta}{2} + \pi$ mediante un ragionamento che non sia geometrico bensì algebrico, dobbiamo migliorare l'equazione estendendola al caso $s = -s - \theta + 2k\pi$, ottenendo $s = -\frac{\theta}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Sul versante delle matrici, la composizione studiata corrisponde alla sequenza delle due isometrie

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ .$$

La loro composizione è dunque il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

Possiamo verificare che il versore $(\cos(-\frac{\theta}{2}), \sin(-\frac{\theta}{2}))$ resta invariato:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) \\ \sin(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos(-\frac{\theta}{2}) - \sin\theta\sin(-\frac{\theta}{2}) \\ -\sin\theta\cos(-\frac{\theta}{2}) - \cos\theta\sin(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\theta}{2}) \\ \sin(-\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

Es. 23. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dal riferimento $\mathcal{R} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}_O$ a $\mathcal{S} = \{\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}, 3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v}\}_O$. Utilizzarla per scrivere le coordinate del punto $(5,4)_\mathcal{R}$ nel riferimento $\mathcal{S}$. Stabilire se questo cambiamento di coordinate è un'isometria. Scrivere la nuova equazione della circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Sol. Ciascuna colonna deve contenere le coordinate del rispettivo vettore della base di partenza, scritte rispetto alla base di arrivo. Dobbiamo quindi considerare le equazioni vettoriali

$$\overrightarrow{u} = a(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) + b(3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v}) \quad , \quad \overrightarrow{v} = c(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) + d(3\overrightarrow{u} + 8\overrightarrow{v}) \ .$$

Esse portano ai sistemi

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 8b = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} c + 3d = 0 \\ 2c + 8d = 1 \end{cases} .$$

Le soluzioni forniscono le colonne (a, b) e (c, d). Più efficacemente, senza ricorrere ai sistemi possiamo utilizzare la matrice inversa di quella del cambiamento di coordinate contrario, da $\mathcal{S}$ a $\mathcal{R}$. La matrice richiesta è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e il corrispondente cambiamento di coordinate è

$$\begin{cases} X = 4x - \frac{3}{2}y \\ \\ Y = -x + \frac{1}{2}y \end{cases} .$$

Le nuove coordinate sono dunque $(14, -3)$.

La matrice ottenuta non è ortogonale, quindi non rappresenta un'isometria. Possiamo prevedere che la nuova equazione della circonferenza non sarà più quella di una circonferenza, ma troveremo comunque un'ellisse. È però necessario il cambiamento di coordinate inverso (quello in effetti più semplice dei due): $x = X + 3Y$, $y = 2X + 8Y$. Otteniamo l'equazione $(X+3Y)^2+(2X+8Y)^2-4 = 0$ $\Leftrightarrow 5X^2 + 38XY + 73Y^2 - 4 = 0$. Si tratta di una conica non degenere; poiché $5 \cdot 73 - 19^2 = 4 > 0$, abbiamo un'ellisse.

Nota: gli autovalori sono enormemente diversi tra loro: uno è prossimo allo zero, mentre l'altro vale quasi 78. L'eccentricità è altissima:

$$\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2}} \simeq 1 \ .$$

La circonferenza è vista in maniera estremamente distorta nel nuovo riferimento; infatti i due nuovi vettori sono quasi paralleli. La curva iniziale attraversa il nuovo primo quadrante (quello con ascisse e ordinate positive) solo per un breve tratto, mentre quasi metà della circonferenza interseca il secondo quadrante. Dal punto di vista del nuovo riferimento, se assumiamo che i due assi siano ortogonali, l'unico modo per descrivere una simile traiettoria con un equazione di secondo grado è, infatti, quello di creare un'ellisse molto allungata avente l'asse maggiore inclinato di 135° circa, così da occupare soprattutto il secondo e quarto quadrante.

Es. 24. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, -1)\}$ alla base $\mathcal{A}' = \{(2, 3), (4, 1)\}$.

Sol. Possiamo risolvere due sistemi, al fine di calcolare le coordinate dei vettori di $\mathcal{A}$ rispetto alla base $\mathcal{A}'$; in alternativa, possiamo pensare al presente cambiamento di coordinate come a un doppio processo: prima passiamo da $\mathcal{A}$ alla base canonica, poi dalla canonica ad $\mathcal{A}'$. Il tutto si traduce nel prodotto di due opportune matrici (attenzione all'ordine: il primo processo va scritto a destra, per accogliere l'input iniziale, cioè le coordinate $(x, y)^t$ nella base $\mathcal{A}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Es. 25. Determinare gli autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Sol</u>. L'equazione caratteristica è

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 .$$

Per $\lambda = 1$ otteniamo l'autospazio descritto dall'equazione $\alpha(\cos\theta - 1) - \beta \sin\theta = 0$; si tratta della retta $t(\sin\theta, \cos\theta - 1)$. Per $\lambda = -1$ otteniamo la retta ortogonale $t(\sin\theta, \cos\theta + 1)$.

Ponendo $t = \frac{1}{\sin\theta}$ otteniamo $(1, \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta})$ e $(1, \frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta})$; si tratta in effetti dei vettori $(1, \tan(\frac{-\theta}{2}))$ e $(1, \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}))$. Infatti $-\frac{\theta}{2}$ corrisponde alla retta invariante, mentre $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ col suo autovalore -1 ci avvisa che la retta corrispondente viene riflessa: ogni punto di questa retta viene trasformato nel punto opposto rispetto all'origine.

Es. 26. Scrivere la matrice, M, che esprime la rotazione del riferimento O_{xy} con un angolo di $30°$ antiorari. Dimostrare che M^2 esprime la rotazione di $60°$ in senso antiorario.

<u>Sol</u>. Le colonne di M sono i vettori $(\cos(30°), \sin(30°))$, $(-\sin(30°), \cos(30°))$, dunque abbiamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Effettuando il prodotto $M \cdot M$ otteniamo

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Le colonne della matrice risultante sono infatti i vettori che caratterizzano la rotazione di $60°$ antiorari.

Es. 27. Tenendo presente l'es. 26, aggiungere alla rotazione di $30°$ una traslazione dell'origine nel punto $(3, 2)$ e scrivere anche la matrice "artificiale" di ordine 3 che incorpora la composizione delle due isometrie, evidenziando il cambiamento di coordinate (da O_{xy} a $O'_{\hat{X}\hat{Y}}$).

<u>Sol</u>. La formula che lega le coordinate (X, Y) alle nuove coordinate $(\hat{X}, \hat{Y})$ è

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

La composizione di rotazione e traslazione porta quindi alla legge

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Potremmo giungere alla stessa conclusione ragionando in modo inverso; partiamo dalla relazione inversa

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Ora scriviamo – sempre operando in modo inverso –

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Giungiamo così in modo più semplice alla stessa relazione, anche se ora abbiamo le nuove coordinate come funzione delle vecchie. Ciascuno dei due punti di vista ha un'utilità specifica. Se ad esempio vogliamo trovare la nuova equazione di un'ellisse, occorre utilizzare il primo approccio perché disponiamo delle coordinate x, y e vogliamo trasformarle, esprimendole come funzione delle nuove coordinate $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$. Entra invece in gioco il secondo metodo se vogliamo trovare le nuove coordinate di un punto, ad esempio di un fuoco, disponendo delle vecchie coordinate x, y.

Utilizzando un'opportuna matrice di ordine 3 è possibile accorpare i due movimenti. A tal fine è sufficiente scrivere le coordinate (x, y) come $(x, y, 1)$, con un suffisso "1" che ha soltanto un valore simbolico ed entra in gioco nei soli calcoli relativi alla *traslazione* – similmente estendiamo $(\tilde{X}, \tilde{Y})$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Notiamo che anche la matrice contiene una parte artificiale (l'ultima riga), senza alcun significato geometrico, ma tutto ciò è formalmente indispensabile affinché si realizzi la traslazione, mediante la sottrazione di $(3, 2)$, grazie alle proprietà del prodotto di matrici.

Ora, fra l'altro, abbiamo tutti gli ingredienti per rispondere alla domanda posta nel paragrafo iniziale di questa raccolta, ma attenzione: i ruoli di O_{XY} e di $O_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ sono scambiati! In quel contesto dobbiamo infatti immaginare gli assi $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ passanti per O' e paralleli agli assi x e y, dunque le coordinate $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ sono quelle transitorie e le X, Y diventano quelle definitive. Abbiamo quindi:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

In particolare,

$$\begin{pmatrix} X_P \\ \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{3} \\ \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{9}{4} \end{pmatrix} .$$

⑤

$\Big\langle$ *Geometria nello spazio cartesiano O_{xyz}* $\Big\rangle$

Es. 28. Trovare tutte le soluzioni (purché ve ne siano) per ciascuno dei seguenti sistemi:

$$1:\begin{cases} 2x+3y+3z=5 \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases} \qquad 2:\begin{cases} 2x+3y+3z=5 \\ 4x+6y+6z=9 \end{cases} \qquad 3:\begin{cases} 3x-6y+w+z=0 \\ 3y+w-2z=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$$

Descrivere geometricamente le soluzioni (o le non-soluzioni) trovate, per ciascun sistema.

Sol: Il metodo della riduzione a scala è consigliato soprattutto per l'ultimo caso, in cui si ottiene una scala con tre pivot e z diventa parametro. Le tre soluzioni sono: $\left(\frac{5-3t}{2}, t, 0\right)$ (piani incidenti); impossibile (piani paralleli); $\left(\frac{t}{3}, \frac{4}{9}t, \frac{2}{3}t, t\right)$ (iperpiani incidenti in una retta – nello spazio a 4 dimensioni).

Es. 29. Risolvere il seguente sistema; interpretare geometricamente le equazioni.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \end{cases} .$$

Sol. $\{(t\,,\,t\,,\,-2t): t\in\mathbf{R}\}$. Abbiamo studiato l'intersezione di quattro piani distinti (sono distinti perché le equazioni sono a due a due non proporzionali); poiché l'intersezione trovata è una retta, tali piani appartengono a un fascio proprio (di piani).

Es. 30. Stabilire se i punti $A:(-3\pi,1,5)$, $B:(0,3,5)$ e $C:(9\pi,9,6)$ sono allineati. Stabilire se essi sono complanari.

Sol. Tre punti sono sempre complanari! Invece, questi non sono allineati perché formano due vettori non proporzionali (ad es. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$).

Es. 31. Stabilire se i punti $(\sqrt{2},2,3)$, $(1,-1,1)$, $(\sqrt{2},1,0)$ sono allineati. Stabilire se tali punti, insieme a $(0,0,1)$, sono complanari.

Sol: Entrambe le risposte sono negative, poiché i vettori formati dai punti (risp. due vettori e tre vettori) sono linearmente indipendenti in entrambi i casi. In dettaglio, scegliamo $(\sqrt{2},2,3)$ come punto di applicazione e consideriamo prima i vettori $(\sqrt{2}-1,3,2)$, $(0,1,3)$ (non proporzionali), poi aggiungiamo il terzo vettore $(\sqrt{2},2,2)$ e notiamo che il relativo determinante non è nullo (vale $3\sqrt{2}+4$).

Es. 32. Scrivere un'equazione del piano passante per $(0,1,0)$, $(-1,-2,-3)$ e parallelo al vettore $(0,2,1)$.

Sol. Imponiamo che il piano passi per un punto e sia parallelo a due vettori (uno dei quali deve essere costruito a partire dai due punti dati):

$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, da cui si ha: $3x+y-2z-1=0$.

Es. 33. Determinare un'equazione del piano contenente l'asse x e passante per $(4,4,7)$.

Sol: $7y - 4z = 0$ (fascio di piani contenente la retta di equazioni $y = z = 0$, ecc. ; oppure possiamo scrivere l'equazione del piano passante per $(4,4,7)$ e per due punti scelti sull'asse x.)

Es. 34. Scrivere equazioni cartesiane della retta avente equazioni parametriche: $x = 3t - 1$, $y = 3t + 1$, $z = 8$. Stabilire se essa è contenuta nel piano $\pi : x + 1 = 0$.

Sol. $y - x - 2 = 0 = z - 8$; $3t - 1 + 1 \neq 0$ (al variare di t), quindi la retta interseca π soltanto nel punto $(-1,1,8)$, per $t = 0$; essa non è contenuta nel piano.

Es. 35. Tra i piani passanti per $(1,1,1)$ e $(0,0,1)$ determinare quello parallelo alla retta $r : x - y - 5 = y + z + 4 = 0$.

Sol. Nell'equazione generica, $ax + by + cz + d = 0$, imponiamo prima il passaggio per i due punti; otteniamo: $a + b + c + d = 0$ e $c + d = 0$. Dunque $d = -c$, e $b = -a - c - d = -a$. Restano da bloccare la a e la c, nell'equazione $ax - ay + cz - c = 0$. Imponendo che si annulli il determinante della matrice incompleta del sistema retta-piano, otteniamo $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & -a & c \end{vmatrix} = 0$, cioè $c = 0$. Come accade spesso, restiamo con un parametro illusorio, qui a, che può essere fissato arbitrariamente (il piano non dipende dalle nostre scelte, ma dobbiamo evitare $a = 0$!). L'equazione finale più semplice è: $x = y$. In alternativa, possiamo scrivere l'equazione di un piano passante per due punti e parallelo a un vettore, in questo caso il vettore direttore $(1,1,-1)$.

Es. 36. Determinare equazioni cartesiane, e anche parametriche, della retta passante per $(8,0,1)$ e parallela al vettore $(0,10,0)$.

Sol: $x - 8 = z - 1 = 0$; $x = 8, y = t, z = 1$.

Es. 37. Scrivere equazioni parametriche della retta r passante per $A = (1,2,3)$ e $B = (3,4,-5)$. Utilizzando tali equazioni, aggiungere una condizione per descrivere parametricamente il *segmento* AB.

Sol. Poiché $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$, come equazioni parametriche possiamo utilizzare $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 - 8t$, con $t \in \mathbf{R}$ (le equazioni parametriche dell'*intera* retta r possono essere scritte, vettorialmente, come $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, $\forall t \in \mathbf{R}$). Ora, l'insieme dei punti di r *compresi* tra A e B (appunto, il segmento in oggetto) si ottiene limitando la scelta di t tra 0 e 1, cioè aggiungendo alle equazioni parametriche la condizione $0 \leq t \leq 1$. Infatti, per ogni t_0 che rispetti questo vincolo, il vettore $t_0\overrightarrow{AB} = (2t_0, 2t_0, -8t_0)$ è proporzionale ad $\overrightarrow{AB}$ ed assume tutte le lunghezze possibili tra 0 e $\overline{AB}$, oltre ad avere lo stesso verso; tale vettore, sommato ad $\overrightarrow{OA}$, dà quindi un vettore $\overrightarrow{OC}$ il cui punto finale C è all'interno del segmento, arbitrariamente.

Es. 38. Calcolare la distanza tra il piano $\pi : x - 4y = 9$ e il punto d'intersezione tra l'asse y e la retta di equazioni parametriche: $x = t, y = t + 1, z = t$.

Sol. $\frac{13}{\sqrt{17}}$ (il punto è $(0,1,0)$).

Es. 39. Stabilire se il vettore $(4,5,1)$ e la retta $r : x - y = y - 2z - 3 = 0$ formano un angolo di 60 gradi.

Sol. NO, perché il coseno dell'angolo acuto formato da $(2,2,1)$ e $(4,5,1)$ non è uguale a $\frac{1}{2}$ (vale $\frac{19}{3\sqrt{42}}$).

Es. 40. Tra i punti della retta $r : x + z + 4 = x + y + z - 1 = 0$, determinare quelli distanti 5 dal piano $\alpha : x - z = 10$, poi quelli distanti 5 dal punto $(-2,1,1)$.

Sol: Una forma parametrica di r è $(t, 5, -t - 4)$. Imponendo la prima condizione si trova $t = 3 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$. Nel secondo caso si ha: $t = -2$, $t = -5$.

Es. 41. Calcolare il coseno positivo dell'angolo θ formato dall'asse x con la retta di equazione $x - 3y = y - z + 3 = 0$. Stabilire se θ è minore di 60 gradi.

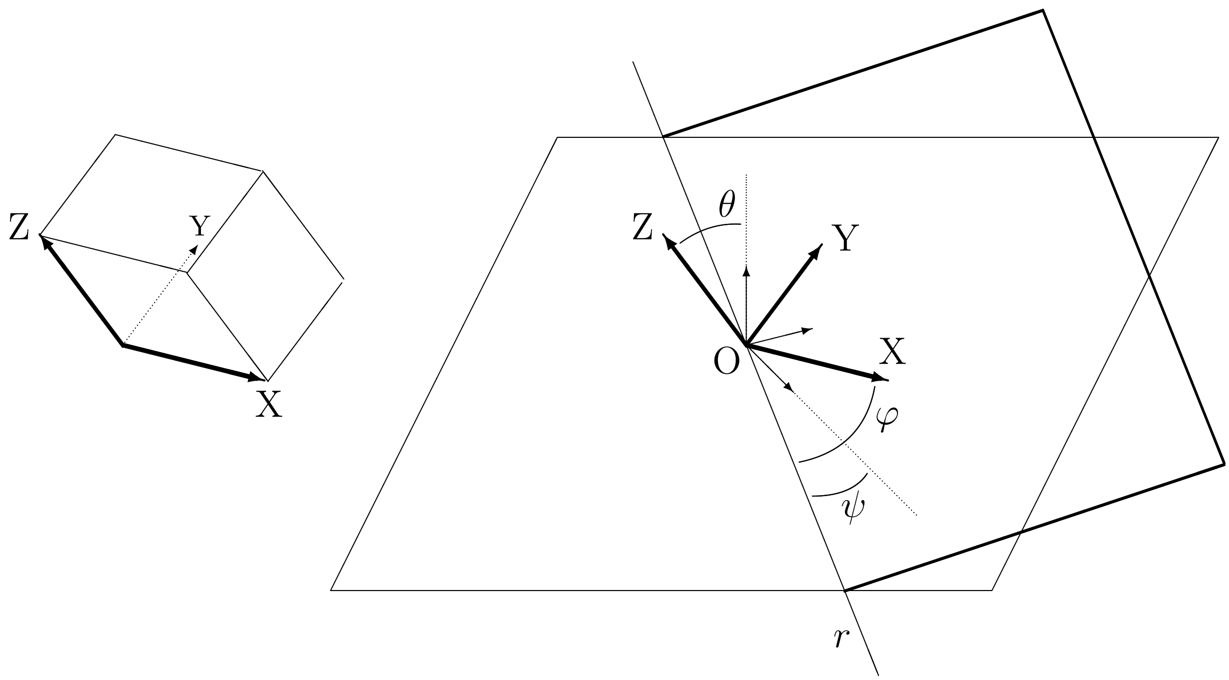
Sol. $\cos\theta = \frac{(1,0,0)\times(3,1,1)}{\sqrt{1}\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$. Dobbiamo stabilire se $\frac{3}{\sqrt{11}} > \frac{1}{2}$, cioè se $\frac{9}{11} > \frac{1}{4}$. La risposta conclusiva è SÌ, perché $36 > 11$ (in effetti θ è anche più piccolo di 30 gradi, perché $36 > 33$).

⑥

$\langle$ *Cambiamenti di coordinate nello spazio cartesiano* $\rangle$

- **Cambiamento di coordinate nello spazio: formule di Eulero**

La convivenza di due sistemi ortogonali di coordinate nello spazio (con l'origine comune) è in genere rappresentata come nella figura seguente, a destra:



A sinistra vediamo il cubo relativo al nuovo riferimento. Il vecchio riferimento, O_{xyz} , dà luogo a un cubo che possiamo immaginare (è appoggiato sul piano O_{xy}, le relative frecce sono più piccole e sottili). Emerge in modo naturale la retta r, detta *asse dei nodi*. Essa è l'intersezione del piano O_{xy} col piano O_{XY}. I tre angoli evidenziati hanno un ruolo speciale: consentono di formalizzare completamente il cambiamento di coordinate da un sistema all'altro. Si tratta degli *angoli di Eulero*: φ indica la *rotazione propria* del riferimento O_{XY} intorno all'asse Z, movimento che porta l'asse X sull'asse dei nodi; θ è invece la *nutazione*, cioè la rotazione (attorno all'asse dei nodi) che porta i due piani a coincidere; infine ψ è la *precessione* e indica la discrepanza tra l'asse dei nodi e l'asse x.

La composizione $\psi \circ \theta \circ \varphi$ consente di sovrapporre i due riferimenti. Esisterebbero altri modi per effettuare questo movimento complessivo, ma le tre rotazioni sopra descritte possono essere facilmente rappresentate e manipolate per mezzo di matrici. Inoltre i tre angoli sono già visibili nella figura, senza che occorra introdurre nuovi angoli di transizione.

Esaminiamo le tre matrici corrispondenti. Attenzione: non siamo in presenza di matrici artificiali come potrebbe invece avvenire nel caso bidimensionale! Infatti in questo contesto i punti e i vettori sono rappresentati da tre numeri, non due.

La rotazione propria segue la legge

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} .$$

Osserviamo che l'angolo φ è antiorario (il verso di rotazione ha uno stretto legame con alcuni segni della matrice).

Dopo aver applicato φ l'asse dei nodi si colloca sull'asse delle ascisse $\bar{X}$. La nutazione è quindi descritta dalla formula

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} .$$

Infine la precessione ruota gli assi $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ (intorno all'asse $\hat{Z}$) fino a sovrapporli agli assi x e y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} .$$

Mettendo insieme le tre rotazioni otteniamo il cambiamento di coordinate complessivo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} .$$

Potremmo effettuare i prodotti matriciali per arrivare alla forma compatta in cui figurano i tre angoli simultaneamente. Si tratta di un semplice esercizio di routine, complicato ma non complesso, che viene lasciato come approfondimento.

È interessante notare che...

... il movimento totale è in realtà una semplice ROTAZIONE attorno a un asse che dipende dai tre angoli; tale asse non è immediato da calcolare, ma intanto è importante riflettere su questa sorprendente semplicità! Siamo giunti all'importante

Teorema di Eulero.

Ogni isometria tridimensionale che preserva l'orientazione è in effetti una rotazione attorno a un asse opportuno.

Per dimostrarlo, lasciando vari dettagli come approfondimento, consideriamo gli autovalori della matrice M ottenuta come prodotto delle tre matrici relative alle rotazioni elementari. In queste righe possiamo anche trascurare il fatto che M proviene da un tale prodotto; ciò che conta adesso è ricordare che M realizza un cambiamento di coordinate isometrico, quindi essa non altera le lunghezze o più in generale il prodotto scalare. Insomma, siamo in presenza di una matrice *ortogonale*. Formalmente, abbiamo che $M(\overrightarrow{u}) \times M(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}$ per ogni scelta del vettore $\overrightarrow{u}$.

Il polinomio caratteristico di M ha grado 3; per il teorema fondamentale dell'algebra, esso ammette necessariamente due radici complesse e coniugate, siano esse $a \pm bi$, e una terza radice sicuramente reale; denotiamola con $\hat{\lambda}$ e sia $\overrightarrow{p}$ un corrispondente autovettore. Ora abbiamo:

$$\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{p} = M(\overrightarrow{p}) \times M(\overrightarrow{p}) = \hat{\lambda}\overrightarrow{p} \times \hat{\lambda}\overrightarrow{p} = \hat{\lambda}^2(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{p}) ,$$

da cui segue che $\hat{\lambda}$ vale 1 o -1. Poiché il prodotto degli autovalori è uguale al determinante di M (segue dal teorema di Binet applicato alla diagonalizzazione) ed essendo tale determinante positivo per la scelta concorde delle orientazioni dei due riferimenti, abbiamo che $\hat{\lambda}(a+bi)(a-bi) = \hat{\lambda}(a^2+b^2) > 0$; dunque possiamo dedurre che $\hat{\lambda} = 1$. Il cambiamento di riferimento descritto da M non altera i punti lungo la retta $\langle \overrightarrow{p} \rangle$ e possiamo anche aggiungere che il piano ortogonale a $\overrightarrow{p}$ viene trasformato in se stesso se applichiamo M; infatti $0 = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{w} = M(\overrightarrow{p}) \times M(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{p} \times M(\overrightarrow{w})$ per ogni scelta di $\overrightarrow{w}$ in tale piano. Possiamo concludere che M consiste effettivamente di una rotazione del piano ortogonale a $\overrightarrow{p}$, trattandosi di un movimento rigido con un asse fisso, diretto secondo $\overrightarrow{p}$.

∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ ∘

Es. 42. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(2,1,0),(1,1,1)\}$ alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Utilizzarla per scrivere l'equazione della sfera definita inizialmente da $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ nel riferimento $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, poi trasformata nel nuovo riferimento $\{\mathbf{i}, 2\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$.

Sol. La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Essa dà luogo al cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} .$$

La nuova equazione della sfera è $(X+2Y+Z)^2 + (Y+Z)^2 + Z^2 - 4 = 0$, sinteticamente $X^2 + 5Y^2 + 3Z^2 + 4XY + 2XZ + 6YZ - 4 = 0$. Il polinomio caratteristico della relativa matrice è

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 1) .$$

Gli autovalori sono 1 e $4 \pm \sqrt{15}$. In questo nuovo riferimento, dunque, la sfera è vista come un ellissoide isometrico all'ellissoide di equazione $\xi^2 + (4+\sqrt{15})\eta^2 + (4-\sqrt{15})\zeta^2 - 4 = 0$. Notiamo che l'ellissoide è molto allungato rispetto all'asse ζ (il relativo coefficiente è molto piccolo rispetto agli altri due) e la sua sezione col piano $\zeta = 0$ è un'ellisse con eccentricità elevata, quasi uguale a 1. Potremmo pensare a una tavola da surf. Come è possibile che una sfera divenga una tavola da surf? Il problema è nella scelta del nuovo riferimento. Esso intanto non è ortogonale (altrimenti ritroveremmo la sfera iniziale); inoltre i tre vettori relativi agli assi sono racchiusi nell'ottante positivo, distorcendo la visualizzazione. Sarebbe interessante evidenziare altri dettagli studiando attentamente il cambiamento di coordinate in questione.

Es. 43. Sia dato un riferimento $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}_O$. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})\}$ alla base $\mathcal{A}' = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}), \frac{1}{\sqrt{14}}(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}), \frac{1}{\sqrt{42}}(-5\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})\}$. Col supporto di Matlab, calcolare autovalori e autovettori di tale matrice; in particolare, verificare che un autovalore vale 1 e calcolare la direzione dell'asse di rotazione previsto dal teorema di Eulero.

Sol. Questo cambiamento di coordinate è isometrico perché le due basi consistono di versori a due a due ortogonali. Possiamo costruire $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$ utilizzando una base di transizione: la base stessa del riferimento, $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$. Abbiamo:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}'} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{84}} & \frac{-\sqrt{3}-5}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{84}} & \frac{-2\sqrt{3}+4}{\sqrt{84}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{\sqrt{84}} & \frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{84}} \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli autovalori con l'istruzione $[H, D] = eig(M)$, dove M è la matrice ottenuta, ci restituisce i valori 1 e altri due numeri, complessi e coniugati (non reali) nella matrice diagonale D, mentre l'autovettore corrispondente a $\lambda = 1$ è la terza colonna di H, in dettaglio $-0.3053\overrightarrow{i} - 0.7758\overrightarrow{j} + 0.5523\overrightarrow{k}$. L'angolo di rotazione è deducibile dai due autovalori coniugati, ma possiamo utilizzare la formula $tr(M) = 1 + 2\cos\alpha$ sin dall'inizio, senza ricorrere agli autovalori. Avremo dunque

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{3}+5}{\sqrt{84}} - 1\right) \simeq 0.5339 ,$$

da cui segue che l'angolo è di circa 58 gradi.