TEORIA ELEMENTARE DELLE ALGEBRE DI LIE

Stefano Capparelli

Università La Sapienza

Roma

TEORIA ELEMENTARE DELLE ALGEBRE DI LIE

Stefano Capparelli

Alla cara memoria di mio padre Alfredo Capparelli

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Parte Prima. Esempi e Concetti di base

Alla cara memoria di mio padre Alfredo Capparelli

Prefazione.

Questi appunti vogliono essere una introduzione ad una delle aree più affascinanti e sviluppate della matematica. Essa ebbe origine dalla scoperta di S. Lie (1842-1899), nel secolo diciannovesimo, di profonde relazioni tra le equazioni differenziali e i gruppi di trasformazioni.

Lie era stato uno studente di L. Sylow (1832-1918) e fu per lui naturale cercare di applicare la teoria dei gruppi alle equazioni differenziali cosí come Galois aveva applicato la teoria dei gruppi alle equazioni algebriche.

Importante fu anche il contributo di W. Killing (1847-1923) che introdusse il concetto di algebra di Lie indipendentemente da Lie e formulò il problema della classificazione delle algebre di Lie di dimensione finita sui reali, (v. [Hawkins1]). Killing arrivò a questa teoria per una strada diversa: egli era interessato alle geometrie non euclidee in dimensione n.

La classificazione delle algebre di Lie semisemplici fu ottenuta da E. Cartan (1869-1951) nella sua tesi di dottorato del 1894. È per questo scopo che egli definì le sottoalgebre di Cartan.

Le teorie dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie furono sviluppate ulteriormente agli inizi del ventesimo secolo principalmente ad opera di E. Cartan e H. Weyl (1885-1955) nel corso dei loro studi di geometria differenziale, di equazioni differenziali, di topologia, fisica, e delle rappresentazioni dei *gruppi classici.* Per la teoria dei gruppi di Lie si veda ad esempio [Chevalley], [Hochschild], [Helgason].

Il quinto dei problemi elencati da Hilbert nella sua famosa conferenza del 1900 ([Hilbert]) riguarda i gruppi di Lie. Esso può essere enunciato nella maniera seguente: Se G è un gruppo localmente euclideo allora G ha una struttura di gruppo di Lie? Nel 1952 la risposta affermativa a tale problema fu data da Gleason ([Gleason]) e da Montgomery e Zippin ([MZ]).

Nel 1902 in Italia L. Bianchi presentava un corso sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni ([Bianchi]). Nella prefazione al suo testo del 1918 Bianchi scrive: "[...] La nozione di *gruppo* [...] manifestò tutta la sua efficacia colle immortali ricerche di GALOIS, [...] Dal campo algebrico, evolvendosi in due sensi, questo concetto di *gruppo di operazioni* era destinato ad assumere in tutta la matematica, nell'analisi come nella geometria, un'importanza fondamentale. [...] In un secondo senso, profondamente diverso, si svolse il concetto di gruppo col passaggio dal discreto al *continuo*, estendendosi a gruppi di operazioni (trasformazioni) che dipendono da parametri suscettibili di variare in modo continuo. Qui si svolse, nella seconda metà del secolo scorso, la mirabile opera di SOPHUS LIE. Movendo da concetti geometrici, associati allo studio dei problemi d'integrazione, Egli riconobbe l'importanza fondamentale, per la geometria e per l'analisi, della considerazione di questi gruppi *continui*, e concepì ed attuò l'ardito disegno di costruirne la teoria generale che doveva estendere al campo continuo la teoria dei gruppi di sostituzioni e quivi compiere, per le teorie d'integrazione nell'analisi, un'opera di *classificazione* analoga a quella della teoria di GALOIS nello studio delle irrazionalità algebriche". Ed in una nota a pié pagina aggiunge: "Nel modo più espressivo trovasi caratterizzata l'opera del Lie come continuatore di GALOIS nell'articolo che il LIE stesso pubblicò, in onore del grande matematico francese, nel volume edito in occasione del Centenario della Scuola Normale superiore di Parigi (Paris, Hachette 1895)."

Numerose sono le applicazioni della Teoria delle Algebre di Lie in altri campi della matematica e della fisica. In fisica, essa, ad esempio, è impiegata nello studio delle particelle elementari ([Georgi]). Il concetto fondamentale, infatti, è quello di

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

simmetria che in matematica si traduce in gruppi di trasformazioni, o, nel caso di gruppi continui, nelle loro algebre di trasformazioni infinitesimali. In [Ibragimov] l'autore dice:"In my later work I saw over and over how effective a tool Lie theory is for solving complicated problems. It significantly widens and sharpens the intuitive notion of symmetry, supplies concrete methods to apply it, guides one to the proper formulation of problems, and often discloses possible approaches to solving them." ("Nel mio lavoro successivo ho visto più e più volte quanto efficace sia lo strumento della teoria di Lie per risolvere problemi complicati. Essa precisa ed amplia in maniera significativa la nozione intuitiva di simmetria, fornisce metodi concreti per applicarla, guida alla opportuna formulazione dei problemi, e spesso svela possibili approcci alla loro soluzione").

Oltre a gettare le fondamenta moderne della teoria dei gruppi di Lie nella sua opera, C. Chevalley (1909-1984) introdusse lo studio dei gruppi algebrici (v. [SCh], [Borel-Bass]). Scoprì inoltre i *gruppi di Lie finiti* detti anche *gruppi di Chevalley*, importantissimi nella teoria dei gruppi finiti, [Carter]. Per un legame di tipo diverso tra le algebre di Lie e i gruppi finiti v. [G] Cap.5.

L'interscambio culturale tra la matematica e la fisica è andato accelerando in queste ultime decine di anni. Nuovi campi di ricerca si sono aggiunti. Alcuni nuovi sviluppi matematici della teoria hanno avuto origine a partire dalla classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse per mezzo delle matrici di Cartan. Ciò ha portato da una parte alle algebre di Kac-Moody, (v. [Kac] e [MoPi]), una generalizzazione spesso di dimensione infinita, e dall'altra ai gruppi quantici, (v. [Lusztig]). Ulteriori sviluppi si sono avuti con le algebre di vertice. Nell'Appendice A ho illustrato molto brevemente un esempio di algebra di Kac-Moody affine e la costruzione di una sua rappresentazione tramite un primo esempio di operatore di vertice. Si veda anche a questo proposito l'ottima introduzione alla monografia [FLM].

Un articolo di R. Howe del 1983, ([Howe]), può essere usato come introduzione alle teorie di Lie. Tuttavia la trattazione di Howe fa uso di una quantità di nozioni di topologia e di analisi che la rende più adatta a studenti ad un livello più avanzato di quelli a cui sono rivolti questi appunti. Lungo le stesse linee di [Howe] si sviluppa il testo [Baker].

Attraverso il lavoro di molti matematici, lo sviluppo della teoria è diventato via via più semplice cosicché per la presente introduzione alla Teoria delle algebre di Lie si richiede solo qualche conoscenza di algebra lineare e di algebra moderna. In particolare, occorre conoscere la forma canonica di Jordan e il prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Qualche richiamo necessario è comunque sviluppato all'interno di questi appunti. Cosicchè questo corso risulta adatto ad una prima introduzione alla teoria delle algebre di Lie anche per studenti che non abbiano un grosso bagaglio culturale. Potrebbe costituire il contenuto di un modulo di un corso di Istituzioni di algebra superiore. È richiesta tuttavia una certa maturità e capacità di saper muovere da soli qualche passo in un nuovo campo della matematica. Come riferimenti per i prerequisiti si possono consultare ad esempio [Artin], [Lang1], [Lang2], [Jacobson2].

Nella prima parte vengono introdotti i concetti di base e gli esempi importanti. Nella seconda parte vengono illustrati i risultati principali della teoria elementare delle algebre di Lie: il Teorema di Lie, il Teorema di Engel, la teoria dei pesi ed i criteri di Cartan per la risolubilità e la semisemplicità.

È qui che la trattazione devia dal trattamento standard e segue il trattamento di J. Lepowsky [LM]. Innanzitutto, si osserva che la teoria degli insiemi di operatori che commutano tra loro fornisce la motivazione ed al tempo stesso unifica il Teorema di Lie, il Teorema di Engel e la teoria dei pesi, (v. il paragrafo 2.1 e l'inizio del 2.2). In secondo luogo, viene presentata una forma generale del criterio di Cartan che immediatamente implica una lunga lista di teoremi standard importanti, inclusi i criteri di Cartan per la semisemplicità e la risolubilità, e criteri per dimostrare la semisemplicità delle algebre di Lie. Le sottoalgebre di Cartan sono motivate sia dalla teoria dei pesi che dal ruolo da esse svolto nella dimostrazione del criterio di Cartan generalizzato. Nell'ultimo paragrafo della seconda parte, sono fornite diverse caratterizzazioni e proprietà di base delle algebre di Lie semisemplici e riduttive. Infine nella terza parte vengono dati alcuni cenni sulla classificazione delle algebre di Lie semisemplici a coefficienti complessi. La trattazione è elementare e segue il testo classico di Humphreys [Humphreys], a cui si rimanda per la dimostrazione di alcuni risultati che qui sono solamente enunciati. Nell'Appendice A viene dato qualche cenno agli operatori di vertice. Infine, nell'Appendice B è definito il concetto di algebra di Lie geometrica nato recentemente dall'adottare un punta di vista nuovo per un concetto "classico", [Huang].

In chiusura, vorrei riconoscere il mio debito a Claudio Procesi dal quale ho appreso i primi rudimenti della teoria delle algebre di Lie, e soprattutto ai molti corsi e alle molte conversazioni avute con Robert L. Wilson e Jim Lepowsky. Un pensiero a parte desidero rivolgere a Nathan Jacobson, recentemente scomparso, per gli incoraggiamenti da lui ricevuti. Alcune parti di questi appunti sono prese quasi parola per parola dalle loro varie lezioni, e la loro influenza è ovvia ovunque. Mi sono anche servito dei molti testi ed articoli elencati nella Bibliografia.

Un ringraziamento va anche a P. Maroscia per i suoi commenti e le sue osservazioni ad una stesura preliminare di questi appunti. Grazie infine anche agli studenti di dottorato del Me.Mo.Mat. che hanno frequentato le mie lezioni.

Sarò grato a chiunque volesse segnalarmi gli inevitabili errori ed omissioni, o comunque farmi avere dei suggerimenti per migliorare il testo.

Stefano Capparelli, Roma, settembre 2002

capparelli@dmmm.uniroma1.it

Notazioni

Fissiamo un campo κ arbitrario una volta per tutte. Salvo esplicito avviso del contrario, tutti gli spazi vettoriali, incluse le algebre di Lie ed i loro moduli, si assumono di dimensione finita su κ, benché alcune delle argomentazioni si adattino anche al caso di dimensione infinita.

La seguente è una lista dei simboli importanti e delle notazioni che useremo: **R** e **C** denotano il campo dei numeri reali e complessi, rispettivamente. Il simbolo *char* κ indica la caratteristica del campo κ; in alcune parti di questi appunti supporremo che sia zero. Se X e Y sono insiemi, $X \subset Y$ significa che X è un sottoinsieme (non necessariamente proprio) di Y. Inoltre,

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y$$

significa che f è una funzione di X in Y che porta un elemento qualunque $x \in X$ nell'elemento $y \in Y$, specificato nel contesto. Se X e Y sono delle strutture algebriche, $X \simeq Y$ significa che X e Y sono isomorfi. Se V e W sono due spazi vettoriali su κ, allora $dimV$ indica la dimensione di V; $V \oplus W$ la somma diretta di V e W; $Hom(V, W)$ oppure $Hom_\kappa(V, W)$ lo spazio delle applicazioni lineari da V a W; $End\ V$ oppure $End_\kappa V$ lo spazio delle applicazioni lineari di V in se stesso (endomorfismi); $Bil\ V$ oppure $Bil_\kappa V$ lo spazio delle forme bilineari su V, cioè lo spazio delle applicazioni bilineari dal prodotto cartesiano $V \times V$ a K; $V \otimes W$ oppure $V \otimes_\kappa W$ il prodotto tensoriale di V e W; V^* il duale di V; e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il naturale accoppiamento bilineare di $V^* \times V$ in κ. Per ogni $f \in Hom(V, W)$, $ker f$ è il nucleo di f. Se $V_1, \ldots, V_n$ sono spazi vettoriali, $\coprod_{i=1}^n V_i$ denota la loro somma diretta. Se A è una matrice quadrata o un endomorfismo di uno spazio vettoriale, trA indica la traccia di A e $detA$, il determinante di A. Infine, $f \circ g$ o fg denota la composizione delle funzioni f e g (con g applicata prima), e $f|X$ denota la restrizione di f al sottoinsieme X del suo dominio.

PRIMA PARTE. Nozioni Elementari

1.0 Introduzione. In questa introduzione vogliamo fare qualche conto informale che ci dia qualche motivazione e qualche assaggio della teoria che vogliamo studiare. Vogliamo anche esporre in maniera informale, nella seconda parte di questa introduzione, alcuni cenni di una teoria completamente diversa ma che è sorprendentemente collegata alla teoria delle algebre di Lie: la teoria delle partizioni di interi, (cfr. [Andrews], [LW]). Tale collegamento sarà oggetto di spiegazione ed approfondimento in un'altra raccolta di appunti che è in preparazione. Una rotazione nello spazio tridimensionale attorno all'asse z si rappresenta con una matrice 3×3 del tipo

$$\begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha & 0 \\ sen\ \alpha & cos\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pensiamo di approssimare con Taylor le funzioni $sen\ \alpha\ cos\ \alpha$ di questa matrice, possiamo approssimare questa rotazione, per piccoli angoli α con la matrice $I + \alpha T_z$ dove I è la matrice identità e T_z è

$$T_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente abbiamo per le rotazioni attorno agli altri assi

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo verificare che le rotazioni di partenza si ottengono esponenziando le matrici T_x, T_y, T_z, cioè considerando la matrice che si ottiene come somma della serie

$$\sum_n \frac{A^n}{n!}$$

dove A è una delle tre matrici T_x, T_y, T_z. Poiché il prodotto di due rotazioni è ancora una rotazione ci possiamo porre il problema di esprimere il prodotto

$$exp(\alpha T_x)exp(\beta T_y)$$

come un unico esponenziale $exp(T)$ dove T è una combinazione lineare di T_x, T_y, T_z. La difficoltà sta nel fatto che ovviamente le matrici T_x e T_y non commutano e dunque il prodotto di due esponenziali non è uguale all'esponenziale della somma. Si può comunque calcolare:

$$exp(\alpha T_x)exp(\beta T_y) = (1 + \alpha T_x + \frac{(\alpha T_x)^2}{2} + \dots)(1 + \beta T_y + \frac{(\beta T_y)^2}{2} + \dots)$$
$$= 1 + (\alpha T_x + \beta T_y) + \frac{1}{2}(\alpha^2 T_x^2 + \beta^2 T_y^2 + 2\alpha T_x \beta T_y) + \dots$$

Ora, per via della non commutatività, la parte quadratica non è il quadrato della somma bensì è il quadrato della somma più il commutatore tra le due rotazioni cioè viene

$$1 + (\alpha T_x + \beta T_y) + \frac{1}{2}(\alpha T_x + \beta T_y)^2 + \frac{1}{2}[\alpha T_x, \beta T_y] + \dots$$

Questo è un caso molto particolare della formula di Campbell-Baker-Hausdorff (v. ad esempio [V]) che in un certo senso ci dice che per trovare T basta calcolare il valore dei commutatori come quello appena visto e non i particolari prodotti $T_x T_y$. Gli elementi T_x, T_y, T_z sono a volte detti *rotazioni infinitesimali*. Risulta plausibile da quanto detto che un oggetto importante da studiare è lo spazio vettoriale generato da queste rotazioni infinitesimali. Più precisamente ci interessa lo spazio vettoriale insieme con la struttura indotta dalla moltiplicazione "bracket" data dai commutatori. Nel nostro esempio, infatti, possiamo calcolare che lo spazio generato dalle rotazioni infinitesimali è chiuso rispetto all'operazione bracket. Infatti abbiamo:

$$[T_x, T_y] = T_z, [T_y, T_z] = T_x, [T_z, T_x] = T_y, \tag{1}$$

(questo ci dovrebbe far venire in mente il prodotto vettoriale). Tale prodotto purtroppo, o per fortuna, non è associativo ma soddisfa invece la seguente relazione che sostituisce l'associatività

$$[T_1, [T_2, T_3]] + [T_2, [T_3, T_1]] + [T_3, [T_1, T_2]] = 0 \tag{2}$$

per ogni T_i appartenente allo spazio delle rotazioni infinitesimali.

Questa identità si dice **identità di Jacobi** . Diremo allora che queste rotazioni infinitesimali costituiscono una **algebra di Lie** .

È importante anche considerare algebre su campi diversi da quello reale. Per esempio, in testi di meccanica quantistica si è soliti considerare la "complessificazione" dell'algebra di Lie appena vista considerando $T_z, T_+ = T_x + iT_y, T_- = T_x - T_y$. Si verifica allora che

$$[T_z, T_+] = T_+, [T_z, T_-] = -T_-, [T_+, T_-] = 2T_z$$

Ora, ogniqualvolta abbiamo un insieme di trasformazioni lineari o di matrici che soddisfano le identità (1) e (2) parleremo di **rappresentazione** dell'algebra di Lie in questione.

Partizioni di interi

Una partizione di un intero non negativo n è un modo di scrivere n come somma di interi positivi detti parti della partizione. L'ordine degli addendi è irrilevante. Per esempio ci sono 7 partizioni di 5:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.$$

Denoteremo con $p(n)$ il numero delle partizioni di n. Per esempio $p(5) = 7$. Il primo matematico che scoprì proprietà importanti di $p(n)$ fu Eulero intorno alla metà del settecento. Può sembrare che la definizione di $p(n)$ è talmente semplice da non poter offrire aspetti interessanti e certamente sarebbe sorprendente che ci fossero legami col calcolo differenziale. È infatti molto sorprendente trovare una formula esatta dovuta a Hardy e Ramanujan (1917) che dà l'esatto valore di $p(n)$. Il primo termine della serie è

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\{\frac{exp\ (\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}})}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\}$$

La funzione $p(n)$ ha una crescita astronomica. Ad esempio, il valore di $p(200)$ è 3.972.999.029.388.

Eulero dimostrò il seguente bel teorema

TEOREMA. *Il numero delle partizioni di n in parti dispari è uguale al numero delle partizioni di n in parti tutte distinte.*

Ad esempio: 5,3+1+1,1+1+1+1+1 sono le tre partizioni di 5 in parti dispari; mentre 5,4+1,3+2 sono le tre partizioni di 5 in parti distinte. Per dare l'elegante ma semplice dimostrazione di Eulero di questo teorema ci occorre introdurre alcune funzioni come fece Eulero stesso. Data una variabile formale q, Eulero considerava la "funzione"

$$\phi(q) = \prod_{j\geq 1}(1-q^j) = \sum a_n q^n$$

Quale sarà il significato di a_n? Esercizio[1]: Verificare che se $c(n)$ = numero delle partizioni di n in un numero pari di parti distinte, e $b(n)$ = numero delle partizioni di n in un numero dispari di parti distinte allora $a_n = c(n) - b(n)$. Ancora più interessante è considerare il reciproco della funzione di Eulero:

$$\phi(q)^{-1} = \prod_{j\geq 1}(1-q^j)^{-1} = \sum_{n\geq 0} b_n q^n$$

Qual è il significato di b_n? Risulta che $b_n = p(n)$ è proprio il numero delle partizioni di n. Diremo allora che $\phi(q)^{-1}$ è la funzione generatrice di $p(n)$ nel senso che il suo sviluppo in serie ha $p(n)$ come coefficienti.

Con questa tecnologia procediamo ora alla promessa dimostrazione del Teorema di Eulero enunciato sopra. Cominciamo con l'osservare che

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+q^j)$$

è la funzione generatrice delle partizioni in parti distinte mentre

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j-1})^{-1}$$

è la funzione generatrice delle partizioni in parti dispari; abbiamo allora

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{\infty}(1+q^j) = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1+q^j)(1-q^j)}{(1-q^j)} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2j})}{(1-q^j)} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{2j})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2j})(1-q^{2j-1})} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{2j-1})}
\end{aligned}$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro si ottiene la conclusione desiderata.

Qual è il legame tra la teoria delle partizioni e la teoria delle algebre di Lie?

Come abbiamo visto le partizioni di interi sono intimamente legate alle serie infinite e ai prodotti infiniti. D'altra parte in un secondo corso sulle algebre di Lie vedremo che un ruolo importante nella teoria delle algebre di Lie è svolto dalle

[1]Una soluzione si trova in appendice C

formule di Weyl per il "denominatore" e per il "carattere". La formula del denominatore di Weyl ad esempio assume in qualche caso la forma

$$\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha}) = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\ \sigma)e^{\sigma\rho-\rho}$$

La somiglianza anche solo superficiale di questa formula con le formule viste sopra dovrebbe indicare una qualche sorta di parentela.

Qualche calcolo nell'algebra $\mathfrak{sl}(n,\kappa)$

Come vedremo, $\mathfrak{sl}(n,\kappa)$, l'insieme delle matrici $n\times n$ a coefficienti in un campo κ e a traccia nulla, è un esempio di algebra di Lie. Consideriamo $\mathfrak{d}$ lo spazio delle matrici diagonali di ordine n e sia $\mathfrak{h}$ il sottospazio delle matrici diagonali a traccia nulla. La base standard per $\mathfrak{d}$ è $\{e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}\}$ dove e_{ij} è la matrice che ha 1 nel posto ij e zero altrove. Consideriamo la base duale di $\mathfrak{d}^*$: $\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n,\}$ Le restrizioni $\gamma_i' = \gamma_i|\mathfrak{h}$ sono dei generatori di $\mathfrak{h}^*$ ma non sono una base. Due espressioni sono uguali $\sum c_i\gamma_i' = \sum d_i\gamma_i'$ se esolo se $c_i - d_i = a$ indipendentemente da i. Infatti esse sono uguali se e solo se la differenza si annulla su $\mathfrak{h}$ ossia si trova nel nucleo dell'applicazione restrizione, il quale nucleo è unidimensionale. Poiché $\gamma_1+\cdots+\gamma_n$ è nel nucleo in quanto la traccia è nulla, ne risulta che $\sum(c_i-d_i)\gamma_i = a(\gamma_1+\cdots+\gamma_n)$ e dunque $c_i - d_i = a$ per ogni i. In altre parole le due espressioni sono uguali se e solo se i coefficienti differiscono per una stessa costante, ovvero, detto in altro modo, l'elemento di $\mathfrak{h}^*$ espresso da $\sum c_i\gamma_i'$ non cambia se agggiungiamo o sottraiamo $\sum_{i=1}^n \gamma_i'$.

Poniamo dunque

$$\Delta_+ = \{\gamma_i' - \gamma_j' | i < j\} \subset \mathfrak{h}^*$$

detto insieme delle radici positive. Si osserva che

$$[h, e_{ij}] = (\gamma_i' - \gamma_j')(h)e_{ij}$$

per ogni $h\in\mathfrak{h}$ dunque le radici positive appaiono quando si calcolano i commutatori di elementi di $\mathfrak{h}$ con matrici unità strettamente sopratriangolari.

Consideriamo ora un importante elemento di $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]$ (algebra gruppale):

$$D = \prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})$$

Definiamo anche

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha \in \mathfrak{h}^*$$

Sussiste allora la seguente formula del denominatore di Weyl (cfr. [Jacobson1], [Humphreys])

$$D = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\ \sigma)e^{\sigma\rho-\rho}$$

dove S_n è il gruppo simmetrico su n lettere. S_n agisce su $\mathfrak{h}^*$ con $\sigma\gamma_i' = \gamma_{\sigma(i)}'$. Per dare una dimostrazione di questa formula nel caso della nostra algebra osserviamo che

$$\rho = \frac{1}{2}[(n-1)\gamma_1' + (n-3)\gamma_2' + \cdots - (n-3)\gamma_{n-1}' - (n-1)\gamma_n']$$

Per quanto visto, i γ_i' sono generatori ma non costituiscono una base; inoltre possiamo sottrarre una stessa costante a tutti i coefficienti ottenendo ancora una espressione per lo stesso elemento ρ. Dunque

$$\rho = \frac{1}{2}[0\gamma_1' - 2\gamma_2' - 4\gamma_3' + \cdots - 2(n-1)\gamma_n']$$

Ciò detto, se consideriamo la sommatoria

$$\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\ \sigma) e^{\sigma\rho}$$

questa può essere pensata come il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-\gamma_1'} & e^{-\gamma_2'} & \dots & e^{-\gamma_n'} \\ e^{-2\gamma_1'} & e^{-2\gamma_2'} & \dots & e^{-2\gamma_n'} \\ \vdots & & & \\ e^{-n\gamma_1'} & e^{-n\gamma_2'} & \dots & e^{-n\gamma_n'} \end{pmatrix}$$

ma questo è un determinante di Vandermonde e quindi vale

$$\begin{aligned} &\prod_{i<j} (e^{-\gamma_j'} - e^{-\gamma_i'}) = \prod_{i<j} e^{-\gamma_j'} (1 - e^{\gamma_j' - \gamma_i'}) \\ &= e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha}) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi l'uguaglianza

$$e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha}) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\ \sigma) e^{\sigma\rho}$$

e moltiplicando per $e^{-\rho}$ otteniamo la formula desiderata.

1.1 Definizione ed esempi di algebre di Lie.

Sia $\mathfrak{g}$ uno spazio vettoriale. Una struttura di **algebra** (non necessariamente associativa) su $\mathfrak{g}$ è una applicazione bilineare, detta **moltiplicazione,** da $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$. Denoteremo la moltiplicazione con $[\cdot,\cdot]$ (detta "bracket" o, a volte, commutatore). Ciò è equivalente ad assegnare una applicazione lineare da $\mathfrak{g}$ a $End\ \mathfrak{g}$, denotata $x \mapsto ad\ x$ (detta "aggiunta"), data da $adx(y) = [x, y]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. (Questa notazione si usa convenzionalmente solo per le algebre di Lie le quali costituiscono il nostro interesse principale in questi appunti).

La moltiplicazione è detta **alterna** se $[x, x] = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$. Questo implica $[x, y] = -[y, x]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. Infatti,

$$0 = [x + y, x + y] - [x, x] - [y, y] = [x, y] + [y, x] \tag{1.1.1}$$

Il viceversa è vero solo se la caratteristica di κ non è 2.

$\alpha \in End\ \mathfrak{g}$ si chiama **derivazione** di $\mathfrak{g}$ se

$$\alpha[x, y] = [\alpha x, y] + [x, \alpha y] \tag{1.1.2}$$

per tutti gli $x, y \in \mathfrak{g}$. Sia $Der\ \mathfrak{g}$ lo spazio di tutte le derivazioni di $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.1.1. $\mathfrak{g}$ è una **algebra di Lie** se
(1) la moltiplicazione è alterna,
(2) $ad\ x \in Der\ \mathfrak{g}$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$.

Osservazione 1.1.1. La seconda condizione stabilisce che

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \tag{1.1.3}$$

per ogni $x, y, z, \in \mathfrak{g}$. Osserviamo che in presenza della condizione (1) nella precedente definizione la (1.1.3) è equivalente alla **identità di Jacobi** , e cioè

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \tag{1.1.4}$$

per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$. (Si osservi che i termini sono in relazione tramite una permutazione ciclica).

Le algebre di Lie potrebbero essere definite su anelli commutativi invece di campi, ma non ci occuperemo di questa generalizzazione. Alcuni dei risultati più elementari che vedremo si applicano chiaramente nel caso più generale di dimensione infinita o nel caso di anelli commutativi, (cfr.[K]).

Le algebre di Lie vengono spesso denotate $\mathfrak{g}$ per via del loro legame con i gruppi di Lie, quando $\kappa = \mathbf{R}$ o $\kappa = \mathbf{C}$. Non tratteremo questo legame in questi appunti. Osserviamo solo che le teorie dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie scorrono parallele per un lungo tratto e che la teoria delle algebre di Lie è importantissima per ottenere profondi risultati sui gruppi di Lie.

Definizione 1.1.2. Una applicazione lineare $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ (con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ algebre di Lie) si dice un **omomorfismo** se $\phi[x, y] = [\phi x, \phi y]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. ϕ è un **isomorfismo** se inoltre è biunivoco. $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ sono algebre di Lie **isomorfe** se esiste un isomorfismo da una all'altra.

Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono sottoinsiemi di $\mathfrak{g}$, sia $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ lo spazio generato da tutti i "bracket" $[x, y], x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$.

Definizione 1.1.3. Una **sottoalgebra** di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è un sottospazio $\mathfrak{a}$ tale che $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, o equivalentemente, un sottoinsieme $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ che è una algebra di Lie con la struttura lineare e con il bracket indotti da $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.1.4. Una algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è **abeliana** o **commutativa** se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Osservazione 1.1.2. In un qualunque spazio vettoriale V possiamo porre

$$[x, y] = 0$$

per ogni $x, y \in V$ ed in tal modo è banalmente definita una struttura di algebra di Lie abeliana.

Osservazione 1.1.3. Se *char* $\kappa \neq 2$, un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è abeliana se e solo se $[x, y] = [y, x]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$ (cioè $\mathfrak{g}$ è abeliana nel "solito" senso).

Osservazione 1.1.4. Se $\{x_i\}$ è una base di una algebra $\mathfrak{g}$, allora la struttura di $\mathfrak{g}$ è determinata dai bracket degli elementi della base. Chiaramente $\mathfrak{g}$ è alterna se e solo se $[x_i, x_i] = 0$ e $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ per ogni i, j. Un'algebra alterna è un'algebra di Lie se e solo se l'identità di Jacobi è soddisfatta da ogni terna di elementi distinti della base.

Esempi di algebre di Lie

1. Il campo stesso degli scalari può essere pensato come algebra di Lie abeliana in modo banale. In genere, se *dim* $\mathfrak{g} = 1$ allora $\mathfrak{g}$ è necessariamente abeliana giacché ogni $x \in \mathfrak{g}$ soddisfa $[x, x] = 0$, perché la moltiplicazione è alterna, e quindi $[x, y] = 0$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. In altre parole, tutte le algebre di Lie unidimensionali sono isomorfe.

2. Prendiamo uno spazio vettoriale di dimensione 2; per esempio, $\mathbf{R}^2$, e supponiamo che $\{x, y\}$ sia una base di $\mathbf{R}^2$. Definiamo la struttura di algebra di Lie determinando il bracket degli elementi della base, ponendo $[x, y] = y$ e ponendo anche, obbligatoriamente, $[x, x] = 0$ e $[y, y] = 0$. Ciò dà a $\mathfrak{g}$ una struttura di algebra di Lie. Infatti, la moltiplicazione è alterna per costruzione e l'identità di Jacobi è verificata in quanto, secondo l'osservazione precedente basta verificarla per ogni terna di elementi distinti della base. Ma non ci sono terne di elementi distinti della base. Dunque la verifica è vuota. Ogni algebra di Lie non abeliana di dimensione 2 è isomorfa a questa algebra di Lie. (Esercizio)[2]

3. Sia $\mathfrak{g} = \mathbf{R}^3$ lo spazio vettoriale tridimensionale reale, e si prenda la solita base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Allora, ponendo $[x, y] = x \wedge y$, dove con $\wedge$ indichiamo il prodotto vettoriale solito si può verificare che si ottiene una algebra di Lie di dimensione 3. Infatti la moltiplicazione è ovviamente alterna, e la verifica dell'identità di Jacobi si riduce, in questo caso, alla verifica seguente

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + \mathbf{j} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}) + \mathbf{k} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = 0$$

ma questa espressione è nulla in quanto ciascun addendo è nullo.

Ci sono altre algebre di Lie tridimensionali non abeliane. La seguente è quasi certamente la più importante algebra di Lie in tutta la teoria. Ciò si vedrà chiaramente nella teoria della struttura e nella teoria delle rappresentazioni delle algebre di Lie semisemplici.

4. Sia *dim* $\mathfrak{g} = 3$ con base $\{e, f, h\}$ e con le relazioni

$$[h, e] = 2e \tag{1.1.5}$$

$$[h, f] = -2f \tag{1.1.6}$$

$$[e, f] = h \tag{1.1.7}$$

[2] Vedi Appendice C

Queste relazioni definiscono un'algebra di Lie. Osserviamo che $ad\ h$ è diagonalizzabile su $\mathfrak{g}$, con autovalori $2, 0, -2$, infatti h stesso è un autovettore di $ad\ h$ con autovalore 0. Questa algebra di Lie è isomorfa all'algebra $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$, vedi più avanti all'esempio **10.**

5. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni C^∞ di variabile reale a valori complessi e sia $\mathfrak{g}$ lo spazio vettoriale generato dai seguenti tre operatori su V: X, la moltiplicazione di una funzione $f \in V$ per la variabile reale x, $Y = \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx}$, l'operatore di derivazione rispetto alla variabile x moltiplicato per una costante (h è la costante di Planck), infine Z, la moltiplicazione di una funzione f per la costante $-\frac{h}{2\pi i}$. Abbiamo allora che $dim\ \mathfrak{g} = 3$, con base $\{X, Y, Z\}$ e soddisfa le relazioni $[X, Y] = Z, [Z, X] = 0, [Z, Y] = 0$. $\mathfrak{g}$ è una algebra di Lie detta *algebra di Heisenberg.* (In fisica, X viene interpretato come la posizione, Y come il *momento* ed il fatto che il commutatore $[X, Y]$ non sia nullo ma uguale a $\frac{hi}{2\pi}$ esprime il principio di indeterminazione di Heisenberg.) Osserviamo che se $char\ \kappa = 2$, l'algebra dell'esempio **4.** è isomorfa a quella dell'esempio **5.**, ma non altrimenti.

6. Il seguente esempio ci fornisce un metodo per costruire molte algebre di Lie. Sia A una algebra associativa qualunque. Per esempio l'agebra delle matrici $n \times n$ su un campo κ (si veda più sotto). Allora si definisce una struttura di Lie su A ponendo la condizione che $[x, y]$ sia il commutatore $xy - yx$ per ogni $x, y \in A$. Prima di dare la dimostrazione, si osservi che A è commutativa se e solo se l'algebra di Lie indotta è commutativa.

Per vedere che $[\cdot, \cdot]$ definisce una struttura di Lie, osserviamo dapprima che $[\cdot, \cdot]$ è alterna. Sia poi $ad_\ell : A \to End\ A$ l'applicazione "ad" per $[\cdot, \cdot]$, e sia $Der_a A$ lo spazio delle derivazioni associative di A, e $Der_\ell A$ lo spazio delle derivazioni di $[\cdot, \cdot]$ cioè di Lie. Allora per ogni $x \in A$, $ad_\ell x \in Der_a A$. Infatti, per ogni $y, z \in A$

$$[x, yz] = xyz - yzx = [x, y]z + y[x, z]. \tag{1.1.8}$$

Inoltre, $ad_\ell x \in Der_\ell A$, perché

$$[x, zy] = [x, z]y + z[x, y] \tag{1.1.9}$$

cosicché

$$[x, [y, z]] = [[x, y]z] + [y, [x, z]] \tag{1.1.10}$$

(sottraendo). (Un calcolo simile mostra che ogni derivazione associativa è una derivazione di Lie). Abbiamo dimostrato che A è una algebra di Lie (cioè che $ad_\ell\ A \subset Der_\ell\ A$) e che $ad_\ell\ A \subset Der_a\ A$.

Si osservi che ogni sottoalgebra associativa di A fornisce una sottoalgebra di Lie di A. Il viceversa è però falso. Per esempio:

7. Sia $\mathfrak{a}$ una algebra e sia A l'algebra associativa $End\ \mathfrak{a}$ vista anche come algebra di Lie. Allora $Der\ \mathfrak{a} \subset A$ è una sottoalgebra di Lie di A, ma non necessariamente una sottoalgebra associativa. Infatti, se $\xi, \eta \in Der\ \mathfrak{a}$, e $a, b \in \mathfrak{a}$ allora

$$\eta(ab) = (\eta a)b + a(\eta b) \tag{1.1.11}$$

$$\xi\eta(ab) = (\xi\eta a)b + (\eta a)(\xi b) + (\xi a)(\eta b) + a(\xi\eta b). \tag{1.1.12}$$

Analogamente,

$$\eta\xi(ab) = (\eta\xi a)b + (\xi a)(\eta b) + (\eta a)(\xi b) + a(\eta\xi b). \tag{1.1.13}$$

Sottraendo,

$$[\xi,\eta](ab) = ([\xi,\eta]a)b + a([\xi,\eta]b) \tag{1.1.14}$$

e quindi $Der\ \mathfrak{a}$ è una sottoalgebra di Lie. Per finire[3], lasciamo per esercizio al lettore di trovare un elemento x in una qualche algebra di Lie $\mathfrak{g}$ tale che $(ad\ x)^2$ non sia in $Der\ \mathfrak{g}$.

8. Se $\mathfrak{a}$ nel punto precedente è l'algebra (commutativa, associativa) di dimensione infinita delle funzioni C^∞ su una varietà differenziabile, l'algebra di Lie di dimensione infinita $Der\ \mathfrak{a}$ è l'algebra di Lie di tutti i campi vettoriali C^∞ sulla varietà. Se la varietà è un gruppo di Lie reale, allora la sua algebra di Lie è la sottoalgebra di Lie di $Der\ \mathfrak{a}$ che consiste dei campi vettoriali invarianti a sinistra (v. [Helgason]). Storicamente, la notazione bracket fu introdotta per queste algebre di Lie.

9. Sia A un'algebra associativa con una involuzione, cioè un endomorfismo

$$\begin{aligned} A &\to A \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

tale che

(1) $(a^*)^* = a$
(2) $(ab)^* = b^*a^*$

Prendiamo poi $A^- = \{a \in A | a^* = -a\}$, l'insieme degli elementi antisimmetrici. Allora A^- è un'algebra di Lie di A anzi è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dell'esempio **6.** Per verificarlo basta mostrare che A^- è chiuso rispetto alla moltiplicazione bracket. Siano dunque $a, b \in A^-$, allora

$$\begin{aligned} (ab-ba)^* &= (ab)^* - (ba)^* = b^*a^* - a^*b^* \\ &= (-b)(-a) - (-a)(-b) = ba - ab = -(ab-ba) \end{aligned}$$

dunque $[a, b]$ appartiene ancora a A^-.

Mostriamo ora alcuni esempi importanti di algebre di Lie "classiche". Esse sono tutte sottoalgebre di Lie dell'algebra associativa delle matrici $n \times n$ su κ, ma non sono sottoalgebre associative. Denoteremo questa algebra con $M(n, \kappa)$ quando la pensiamo come algebra associativa e con $\mathfrak{gl}(n, \kappa)$ (**"general linear"**) quando la pensiamo come algebra di Lie.

Sia dunque $M(n, \kappa)$ l'insieme delle matrici $n \times n$ sul campo κ. Se $X \in M(n, \kappa)$, $X = (x_{ij})$ si definisce traccia di X

$$tr(X) = x_{11} + x_{22} + \cdots x_{nn}$$

Si verifica direttamente che $tr(XY) = tr(YX)$ per ogni $X, Y \in M(n, \kappa)$.

10. Sia $\mathfrak{g}$ l'insieme delle matrici a traccia nulla in $M(n, \kappa)$. Allora $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie poiché la traccia del commutatore di due qualunque matrici è zero. $\mathfrak{g}$ si denota $\mathfrak{sl}(n, \kappa)$ (**"special linear"**). Il gruppo corrispondente è il gruppo speciale lineare, gruppo delle matrici $n \times n$ a determinante uguale a 1. (Per algebre di Lie di matrici, "speciale" significa "a traccia nulla", e per i gruppi di matrici "speciale" significa "a determinante 1".)

Sia ora $n = 2$ in questo esempio. Allora $\mathfrak{g}$ ha per base

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.1.15}$$

[3]Vedi Appendice C

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.16}$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.17}$$

Calcolando i commutatori di queste matrici vediamo immediatamente che

$$[h, e] = 2e \tag{1.1.18}$$

$$[h, f] = -2f \tag{1.1.19}$$

$$[e, f] = h \tag{1.1.20}$$

Il lettore attento riconoscerà l'algebra dell'esempio **4.** che in effetti avevamo chiamato $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$.

11. Sia $\mathfrak{g} = \{x \in M(n, \kappa) | x + x^t = 0\}$ ove t denota la trasposta. Questo è lo spazio delle matrici antisimmetriche. È una algebra di Lie perché per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$[x, y]^t = (xy - yx)^t = (-y)(-x) - (-x)(-y) = -[x, y]. \tag{1.1.21}$$

$\mathfrak{g}$ è indicata con $\mathfrak{o}(n, \kappa)$ (**"ortogonale"**), e quando *char* $\kappa \neq 2$, anche con $\mathfrak{so}(n, \kappa)$ (**"speciale ortogonale"**) perché in tal caso, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(n, \kappa)$. Sia il gruppo ortogonale che il gruppo ortogonale speciale corrispondono a questa algebra di Lie.

OSSERVAZIONE 1.1.5. Supponiamo di avere su κ^n una forma bilineare B e sia j la sua matrice in una base fissata. Tale forma si dice $\epsilon-$simmetrica, con $\epsilon = \pm 1$, se si ha

$$B(x, y) = \epsilon B(y, x)$$

o, equivalentemente, se $j^t = \epsilon j$, dove t denota la trasposta. Per ogni forma bilineare $\epsilon-$simmetrica è definita una involuzione ad essa associata data dalla formula

$$B(Xx, y) = B(x, X^* y)$$

che definisce in modo unico X^* nell'ipotesi che la forma sia non degenere ossia che *det* $j \neq 0$. In altre parole data $X \in M(n, \kappa)$ esiste un unica $X^* \in M(n, \kappa)$ tale che valga la relazione precedente per ogni x, y e inoltre l'applicazione $X \mapsto X^*$ è una involuzione. Usando la matrice j in una base fissata di κ^n abbiamo

$$B(Xc, y) = (Xx)^t jy = x^t X^t jy = x^t jj^{-1} X^t jy$$

(poiché j è invertibile essendo B non degenere). Possiamo dunque porre

$$X^* = j^{-1} X j$$

allora è certamente $B(Xx, y) = B(x, X^* y)$ infatti

$$x^t X^t jy = x^t j(j^{-1} X^t j) y = B(x, X^* y).$$

L'esempio **11.** corrisponde al caso in cui j è la matrice identità.

12. Sia $j \in M(n,\kappa)$ e poniamo $\mathfrak{g} = \{x \in M(n,\kappa) | jx + x^t j = 0\}$. $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie poiché per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$
\begin{aligned}
j[x,y] + [x,y]^t j &= jxy - jyx + y^t x^t j - x^t y^t j \\
&= jxy - jyx - y^t jx + x^t jy \\
&= jxy - jyx + jyx - jxy \\
&= 0 \qquad (1.1.22)
\end{aligned}
$$

Il gruppo corrispondente è il gruppo delle matrici non singolari x tali che $x^t jx = j$.

Quando n è pari e j è della forma

$$
\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.1.23)
$$

(Questa è una matrice antisimmetrica non singolare; I_n denota la matrice identità $n \times n$), $\mathfrak{g}$ è indicata con $\mathfrak{sp}(n,\kappa)$ (**" algebra simplettica"**). Qui la "s" non significa "speciale" ma è una coincidenza fortunata che le matrici simplettiche sono in effetti a traccia nulla, cioè $\mathfrak{sp}(n,\kappa) \subset \mathfrak{sl}(2n,\kappa)$, come si verifica facilmente.

Risulta dal Teorema di Classificazione che in questa lista sono comprese quasi tutte le algebre di Lie semplici (v. definizione §3), con l'eccezione di cinque algebre di Lie dette per l'appunto **eccezionali** .

Per finire altri esempi di sottoalgebre di Lie di $M(n,\kappa)$ sono T_n, l'insieme delle matrici sopratriangolari, Δ_n, l'insieme delle matrici diagonali, U_n, l'insieme delle matrici strettamente sopratriangolari.

1.2 Rappresentazioni e moduli.
Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e sia V uno spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 1.2.1. Un omomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ (ove $End\ V$ è visto come algebra di Lie) si dice una **rappresentazione** di $\mathfrak{g}$ su V, e V si dice **$\mathfrak{g}$-modulo** rispetto all'azione π.

Si osservi che la condizione che l'applicazione lineare π sia una rappresentazione consiste nella relazione $\pi[x, y] = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x)$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$.
Ogni algebra di Lie ha una rappresentazione naturale su se stessa, detta **rappresentazione aggiunta** :

PROPOSIZIONE 1.2.1. *L'applicazione $ad : \mathfrak{g} \to End\ \mathfrak{g}$ è una rappresentazione.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$ad\ [x, y]z = [[x, y]z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (ad\ x\ ad\ y - ad\ y\ ad\ x)z \tag{1.2.1}$$

□

OSSERVAZIONE 1.2.1. Questa dimostrazione evidenzia che se $\mathfrak{g}$ è un'algebra con moltiplicazione definita dalla applicazione lineare $ad\ : \mathfrak{g} \to End\ \mathfrak{g}$, allora ad è un omomorfismo di $\mathfrak{g}$ verso l'algebra di Lie $End\ \mathfrak{g}$ se e solo se $ad\ x$ è una derivazione di $\mathfrak{g}$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$ (la seconda condizione nella definizione di algebra di Lie). In particolare, un'algebra alterna è un'algebra di Lie se e solo se ad è una rappresentazione.
Notazione. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie e $\pi\ : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$, denoteremo spesso la corrispondente azione di modulo con un punto, cioè,

$$x \cdot v = \pi(x)v \tag{1.2.2}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, v \in V$.

DEFINIZIONE 1.2.2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, V e W due $\mathfrak{g}$-moduli. Una applicazione lineare $\phi : V \to W$ è un **omomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli** oppure una **$\mathfrak{g}$-applicazione** se $\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v)$ per ogni $x \in \mathfrak{g}, v \in V$.

DEFINIZIONE 1.2.3. ϕ è un **isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli** o un'**equivalenza di $\mathfrak{g}$-moduli** se ϕ è biunivoca.

DEFINIZIONE 1.2.4. V e W sono **isomorfi** o **equivalenti** se esiste un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli dall'uno all'altro.

Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie e V un $\mathfrak{g}$-modulo, e se $\mathfrak{h}$ è un sottospazio di $\mathfrak{g}$ e W un sottospazio di V, denotiamo con $\mathfrak{h} \cdot W$ il sottospazio di V generato da tutti i vettori del tipo $x \cdot w, x \in \mathfrak{h}, w \in W$.

DEFINIZIONE 1.2.5. Un **sottomodulo** di un $\mathfrak{g}$-modulo V è un sottospazio W di V tale che $\mathfrak{g} \cdot W \subset W$, o equivalentemente, un sottoinsieme W di V che è un $\mathfrak{g}$-modulo per le strutture lineare e di $\mathfrak{g}$-modulo indotte da V.

DEFINIZIONE 1.2.6. Un sottospazio W di V è **invariante** (per $\mathfrak{g}$) se è un sottomodulo.

OSSERVAZIONE 1.2.2. Ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ possiede un unico (a meno di equivalenza) **modulo banale unidimensionale** , corrispondente alla rappresentazione nulla su uno spazio di dimensione uno.
Oltre alla rappresentazione aggiunta e alla rappresentazione banale unidimensionale, abbiamo i seguenti ulteriori importanti esempi di rappresentazioni (e moduli):
1. I moduli unidimensionali V di una data algebra di Lie $\mathfrak{g}$ corrispondono precisamente (a meno di equivalenze) agli omomorfismi di algebre di Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \kappa$,

ove κ è pensato come un'algebra di Lie unidimensionale. La corrispondenza è data dalla relazione $x \cdot v = \phi(x)v$ per ogni $x \in \mathfrak{g}, v \in V$. Gli omomorfismi ϕ sono a loro volta precisamente le applicazioni lineari di $\mathfrak{g}$ in κ che annullano $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Queste applicazioni lineari sono dette **caratteri** di $\mathfrak{g}$.

2. Supponiamo che A sia un'algebra associativa e $\pi : A \to End\ V$ una rappresentazione qualunque di A su uno spazio vettoriale V; cioè π è un omomorfismo di algebre associative. Allora se A e $End\ V$ sono pensate come algebre di Lie, π è anche un omomorfismo di algebre di Lie, cioè una rappresentazione dell'algebra di Lie A. In particolare, se $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra di A, allora $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ è una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

3. Come caso speciale di **2.**, se V è uno spazio vettoriale, allora ogni sottoalgebra di Lie dell'algebra di Lie $End\ V$ ha una rappresentazione naturale su V. Prendendo $V = \kappa^n$, osserviamo che ogni sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \kappa)$ ha una rappresentazione naturale nello spazio cartesiano n-dimensionale κ^n. In particolare otteniamo una rappresentazione naturale di $\mathfrak{gl}(n, \kappa)$, $\mathfrak{sl}(n, \kappa)$, $\mathfrak{so}(n, \kappa)$ e $\mathfrak{sp}(n, \kappa)$ (v. paragrafo 1.1). (La rappresentazione di $\mathfrak{sp}(n, \kappa)$ è su κ^{2n}).

4. Sia V un qualunque spazio vettoriale e $\alpha \in End\ V$ arbitrario. Allora otteniamo una rappresentazione dell'algebra di Lie unidimensionale κ su V per mezzo dell'applicazione lineare da κ a $End\ V$ che porta $1 \in \kappa$ in α.

Esercizio[4]: Calcolare esplicitamente la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(2, k)$.

In paragrafi successivi discuteremo ulteriori aspetti dei moduli per le algebre di Lie. Qui introdurremo semplicemente altre definizioni.

Definizione 1.2.7. Un modulo (o rappresentazione) di un'algebra di Lie si dice **semplice** (o **irriducibile**) se non ha nessun sottomodulo proprio non banale (cioè non zero) e se non è lo spazio vettoriale nullo.

Esercizio[5]: Verificare che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(2, k)$ è una rappresentazione irriducibile.

Definizione 1.2.8. Una **bandiera** F in uno spazio vettoriale V è una successione di sottospazi

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0 \tag{1.2.3}$$

tale che ogni V_{i+1} ha codimensione 1 in V_i $(i = 0, \ldots, n-1)$.

Definizione 1.2.9. Una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V **supporta** F se $\{v_1, \ldots, v_i\}$ è una base di V_{n-i} per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Definizione 1.2.10. Un operatore $\alpha \in End\ V$ **lascia invariante** F (rispettivamente **fortemente invariante**) se $\alpha V_i \subset V_i$ (rispettivamente $\alpha V_i \subset V_{i+1}$) per ogni $i = 0, \ldots, n-1$.

Osservazione 1.2.3. Nelle stesse notazioni, α lascia invariante F se e solo se la matrice di α rispetto ad una qualunque base che supporta F è triangolare superiore (sopratriangolare), e α lascia F fortemente invariante se e solo se la matrice di α rispetto ad una qualunque base che supporta F è strettamente sopratriangolare (cioè triangolare superiore con la diagonale nulla). In particolare, α ammette una bandiera invariante (risp. fortemente invariante) se e solo se α può essere triangolarizzata superiormente (risp. triangolarizzata superiormente in senso stretto).

Definizione 1.2.11. Supponiamo che V sia un $\mathfrak{g}$-modulo ($\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie). Una bandiera

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0 \tag{1.2.4}$$

[4] V. appendice C

[5] V. appendice C

si dice **invariante** (rispettivamente **fortemente invariante**) se ciascun V_i è un $\mathfrak{g}$-sottomodulo (risp. se $\mathfrak{g} \cdot V_i \subset V_{i+1}$ per ogni $i = 0, \ldots, n-1$).

OSSERVAZIONE 1.2.4.
(1) Se $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ è la rappresentazione corrispondente a V, la bandiera data è invariante (risp. fortemente invariante) se e solo se essa è invariante (risp. fortemente invariante) per $\pi(x)$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$. Questo accade se e solo se per ogni $x \in \mathfrak{g}$, la matrice di $\pi(x)$ rispetto ad una qualunque base che supporti la bandiera è triangolare superiore (risp. strettamente triangolare superiore).
(2) In particolare, un $\mathfrak{g}$-modulo V ammette una bandiera invariante (risp. fortemente invariante) se e solo se esiste una base di V per cui le matrici corrispondenti a $\pi(x)$ ($x \in \mathfrak{g}$) sono simultaneamente sopratriangolari (risp. strettamente sopratriangolari). Dunque il linguaggio delle bandiere invarianti è un modo di discutere il concetto di triangolarizzazione simultanea di operatori, (v. [L2], Cap. 10)
(3) I concetti di bandiere invarianti e fortemente invarianti per moduli V di algebre di Lie includono i concetti corrispondenti per singoli operatori in $End\ V$, secondo la costruzione dell'esempio **4.** precedente.

1.3 Ideali e quozienti.

DEFINIZIONE 1.3.1. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora un sottospazio $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ è detto **ideale** di $\mathfrak{g}$ se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

OSSERVAZIONI 1.3.1. Gli ideali sono sottoalgebre.

OSSERVAZIONI 1.3.2. Non è necessario distinguere tra ideali destri e sinistri.

OSSERVAZIONI 1.3.3. Gli ideali di $\mathfrak{g}$ sono precisamente i sottomoduli di $\mathfrak{g}$ per la rappresentazione aggiunta.

OSSERVAZIONI 1.3.4. Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ è un omomorfismo di algebre di Lie allora il suo nucleo $Ker\ \phi = \{x \in \mathfrak{g}$ tali che $\phi(x) = 0\}$ è un ideale.

Se $\mathfrak{a}$ è un sottospazio di $\mathfrak{g}$ lo spazio vettoriale quoziente è definito da $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \{x + \mathfrak{a} | x \in \mathfrak{g}\}$ con le operazioni indotte da $\mathfrak{g}$. Se il sottospazio è anche un ideale allora, come nel caso delle algebre associative, gli ideali corrispondono ad algebre di Lie quozienti:

PROPOSIZIONE 1.3.1. *Sia $\mathfrak{a}$ un sottospazio dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. Allora la formula*

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a} \tag{1.3.1}$$

($x, y \in \mathfrak{g}$) fornisce una moltiplicazione ben definita sullo spazio vettoriale quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ se e solo se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$. In tal caso, $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è un'algebra di Lie, detta **algebra di Lie quoziente** *di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{a}$, e la proiezione $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ che associa a ciascun $x \in \mathfrak{g}$ la sua classe laterale $x + \mathfrak{a}$ è un omomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre dimostrare che la definizione di operazione è ben posta, che sono soddisfatte le condizioni della definizione di algebra di Lie, e che, infine, con queste definizioni la proiezione è un omomorfismo. Siano dunque x, x' tali che $x' = x + a$, $a \in \mathfrak{a}$ e y, y', tali che $y' = y + b$, $b \in \mathfrak{a}$ allora $[x', y'] = [x', y'] + [a, y] + [x, b] + [a, b]$ e dunque $[x', y'] - [x, y] \in \mathfrak{a}$ e la definizione è ben posta. Lasciamo al lettore il compito di verificare gli assiomi di algebra di Lie. □

PROPOSIZIONE 1.3.2. *Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie, gli ideali di $\mathfrak{g}$ sono precisamente i nuclei degli omomorfismi di $\mathfrak{g}$ verso algebre di Lie.*

DIMOSTRAZIONE. Il nucleo di un omomorfismo è chiaramente un ideale, e per la Proposizione 1.3.1, ogni ideale è il nucleo di un omomorfismo, e cioè di π. □

Non c'è alcuna difficoltà per dimostrare il solito "teorema di isomorfismo" per le algebre di Lie:

PROPOSIZIONE 1.3.3. *Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie, allora esiste uno ed un solo isomorfismo $\phi^* : \mathfrak{g}/Ker\ \phi \to Im\ \phi$ tale che $\phi^* \circ \pi = \phi$, ove π è la proiezione canonica di $\mathfrak{g}$ nel suo quoziente. In particolare le algebre quozienti di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sono precisamente le immagini di $\mathfrak{g}$ attraverso omomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $\phi^*(x + \mathfrak{a}) = \phi(x)$. Questa definizione è ben posta: se $x - y \in Ker\ \phi$ allora $\phi(x) = \phi(y)$. Si verifica inoltre altrettanto facilmente (esercizio) che ϕ^* è biunivoca, e che infine ϕ^* è un omomorfismo. Inoltre, per come è stata definita, è ovvio che essa soddisfa la condizione $\phi^* \circ \pi = \phi$. □

Possiamo anche estendere un po' la proposizione precedente:

PROPOSIZIONE 1.3.4. *Se $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie e $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ contenuto in $Ker\ \phi$, esiste esattamente un omomorfismo $\psi : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to h$ tale che $\phi = \psi \circ \pi$, ove $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ è l'omomorfismo naturale.*

DIMOSTRAZIONE. Che la definizione sia ben posta segue come nel caso precedente. Le altre verifiche sono pure elementari. (Esercizio) □

PROPOSIZIONE 1.3.5. *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra e* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *sono ideali di* $\mathfrak{g}$ *con* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$*, allora* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ *è naturalmente isomorfo a* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$*. Inoltre, ogni ideale di* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *è della forma* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *dove* $\mathfrak{b}$ *è un ideale di* $\mathfrak{g}$ *contenente* $\mathfrak{a}$*. Analogamente esiste una corrispondenza tra le sottoalgebre di* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *e le sottoalgebre di* $\mathfrak{g}$ *contenenti* $\mathfrak{a}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo la Proposizione 1.3.3. Dimostriamo l'esistenza di un epimorfismo (omomorfismo suriettivo) da $\mathfrak{g}$ a $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ con nucleo $\mathfrak{b}$. Si può verificare che la composizione delle proiezioni canoniche di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ e di $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ su $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ è effettivamente un epimorfismo di nucleo $\mathfrak{b}$. Le altre verifiche sono lasciate al lettore. □

PROPOSIZIONE 1.3.6. *Se* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *sono ideali di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*, allora* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *sono ideali di* $\mathfrak{g}$*, e* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ *è naturalmente isomorfa a* $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$*.*

DIMOSTRAZIONE. L'ultima affermazione segue ancora dalla Proposizione 1.3.3 se consideriamo la restrizione della proiezione canonica di $\mathfrak{g}$ su $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ all'ideale $\mathfrak{b}$; il nucleo di questa restrizione è chiaramente $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. □

Otterremo un ideale particolarmente importante di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ prendendo il nucleo della rappresentazione aggiunta (v. Proposizione 1.3.2). Questo ideale è il **centro** di $\mathfrak{g}$, indicato con *Cent* $\mathfrak{g}$, e

$$Cent\ \mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}. \tag{1.3.2}$$

Esercizio: Verificare direttamente dalla definizione che *Cent* $\mathfrak{g}$ è un ideale.

OSSERVAZIONE 1.3.5. Se $char\ \kappa \neq 2$,

$$Cent\ \mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = [y, x] \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}, \tag{1.3.3}$$

cioè, *Cent* $\mathfrak{g}$ è il centro di $\mathfrak{g}$ nel senso solito.

Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono ideali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, sappiamo che $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ sono ancora ideali. Per mostrare che $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ è un ideale, annotiamo il seguente utile fatto:

PROPOSIZIONE 1.3.7. *(Identità di derivazione per sottospazi). Siano* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{c}$ *dei sottospazi di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$*. Allora*

$$[\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \subset [[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}]]. \tag{1.3.4}$$

Questo segue immediatamente dalla corrispondente identità per elementi.

Quindi:

PROPOSIZIONE 1.3.8. *Il bracket di due ideali di un'algebra di Lie è ancora un ideale.*

Perciò $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è sempre un ideale di $\mathfrak{g}$. Si dice ideale **commutatore** o **algebra derivata** ed è legato agli omomorfismi di $\mathfrak{g}$ verso le algebre di Lie **abeliane** :

PROPOSIZIONE 1.3.9. *Se* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *è un omomorfismo suriettivo di algebre di Lie, allora* $\mathfrak{h}$ *è abeliana se e solo se* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset Ker\ \pi$*.*

PROPOSIZIONE 1.3.10. *Ogni sottospazio di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *che contiene* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *è un'ideale, e tali sottospazi sono precisamente i nuclei degli omomorfismi di* $\mathfrak{g}$ *verso algebre di Lie abeliane.*

Di nuovo le dimostrazioni sono semplici. Il seguente corollario della Proposizione 1.3.9 è abbastanza interessante:

PROPOSIZIONE 1.3.11. *Supponiamo che* $\mathfrak{g}$ *sia un'algebra di Lie tale che* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Allora ogni* $\mathfrak{g}$*-modulo unidimensionale è quello banale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su uno spazio unidimensionale V. Allora $End\ V$ è un'algebra di Lie abeliana, e dunque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset Ker\ \pi$ per la Proposizione 1.3.9 oppure 1.3.10. Dunque $\pi = 0$. □

DEFINIZIONE 1.3.2. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semplice se 0 e $\mathfrak{g}$ sono i suoi soli ideali e se $dim\ \mathfrak{g} > 1$.

Si osservi che ciò accade se e solo se la rappresentazione aggiunta è irriducible e $ad\ \mathfrak{g} \neq 0$. Il motivo per cui si sceglie di non considerare l'algebra di Lie unidimensionale come semplice sarà chiaro in seguito. La definizione facilmente implica la seguente:

PROPOSIZIONE 1.3.12. *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie semplice, allora* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *e* $Cent\ \mathfrak{g} = 0$.

Osserviamo che se $Cent\ \mathfrak{g} = 0$ allora $\mathfrak{g}$ è isomorfa ad una sottoalgebra di $End\ \mathfrak{g}$. In effetti, sussiste più in generale il Teorema di Ado che non dimostriamo, per cui ogni algebra di Lie di dimensione finita è isomorfa ad una sottoalgebra di matrici. (cfr.[Jacobson1], [Bourbaki]).

1.4 Prodotti diretti e semidiretti.

Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ delle algebre di Lie. Come possiamo costruire una nuova algebra di Lie a partire da $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$? La maniera più semplice è formare il **prodotto diretto** $\mathfrak{g}$ di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, come segue:

Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ come spazi vettoriali, pensiamo a $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ contenute in $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ e manteniamo le originali moltiplicazioni bracket su $\mathfrak{a}$ e su $\mathfrak{b}$, e stabiliamo che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ commutino tra loro. Il risultato è un'algebra di Lie, e $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono chiaramente ideali di $\mathfrak{g}$. Scriveremo $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ come algebre di Lie.

In effetti, possiamo formare il **prodotto diretto** $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ di una famiglia arbitraria finita di algebre di Lie $\mathfrak{a}_i$, nello stesso modo.

Facciamo ora la seguente digressione per chiarire un punto un po' delicato: $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ è il prodotto diretto delle a_i nella categoria delle algebre di Lie, nel senso che andiamo a precisare. Se $\mathfrak{c}$ è un'algebra di Lie dotata di due omomorfismi ϕ e ψ

$$\phi : \mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$$
$$\psi : \mathfrak{c} \to \mathfrak{b}$$

allora esiste un unico omomorfismo $f : \mathfrak{c} \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, "Id"] & \mathfrak{a} \\
\mathfrak{c} \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
\mathfrak{b} \arrow[r, "Id"] & \mathfrak{b}
\end{tikzcd}$$

Quello definito sopra è un prodotto diretto di algebre di Lie ma non una somma diretta di esse. La nozione di somma diretta è la nozione duale di quella appena vista. La somma diretta (o coprodotto) $\mathfrak{s}$ di due algebre di Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ è invece un'algebra di Lie con delle applicazioni iniettive i_1 e i_2

$$i_1 : \mathfrak{a} \to \mathfrak{s}$$
$$i_2 : \mathfrak{b} \to \mathfrak{s}$$

tali che se $\mathfrak{c}$ è un'algebra di Lie e ϕ e ψ sono due omomorfismi

$$\phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{c}$$
$$\psi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$$

allora esiste un unico omomorfismo $g : \mathfrak{s} \to \mathfrak{c}$ tale che il diagramma seguente sia commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[d, "\phi"'] & \mathfrak{a} \arrow[l, "Id"'] \arrow[d, "i_1"] \\
\mathfrak{c} & \mathfrak{s} \arrow[l, "f"'] \\
\mathfrak{b} \arrow[u, "\psi"] & \mathfrak{b} \arrow[l, "Id"'] \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

ossia lo stesso diagramma di prima con tutte le frecce invertite. Quindi l'algebra definita sopra è un prodotto diretto ma non una somma diretta delle algebre di Lie. Purtroppo, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ è stata spesso chiamata **somma diretta** di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ed è spesso indicata con $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Noi cercheremo di evitare quest'uso.

Nel caso degli spazi vettoriali somma diretta e prodotto diretto coincidono.

Esiste una maniera più generale, molto più delicata e non simmetrica di mettere insieme $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, che si basa su un fissato omomorfismo $\pi : \mathfrak{a} \to Der\ \mathfrak{b}$ (ricordiamo che $Der\ \mathfrak{b}$ è un'algebra di Lie), cioè una rappresentazione di $\mathfrak{a}$ come derivazioni di $\mathfrak{b}$. Si chiama **prodotto semidiretto di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ rispetto a π,** e si indica con $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$. Risulta che $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ coincide con $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ quando π è l'applicazione nulla. La costruzione di $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ è data nella seguente

PROPOSIZIONE 1.4.1. *Esiste una ed una sola struttura di algebra di Lie $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ sullo spazio vettoriale $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ che conserva la struttura di bracket originaria su $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, e tale che per ogni $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{b}$, $[x, y] = \pi(x)y$. Inoltre, $\mathfrak{b}$ è un ideale in $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo lo spazio vettoriale somma diretta $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ occorre definire il bracket $[x+y, x'+y']$ che per linearità prendiamo $[x+y, x'+y'] = [x, x']_{\mathfrak{a}} + [y, y']_{\mathfrak{b}} + [x, y'] + [y, x']$. Basterà allora porre $[x, y'] = \pi(x)y'$ e $[y, x'] = -\pi(x')y$. La moltiplicazione che ne risulta è allora chiaramente alterna. È sufficiente dimostrare l'identità di Jacobi e cioè

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \tag{1.4.1}$$

per ogni $x, y, z \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Per linearità possiamo prendere x, y, z o in $\mathfrak{a}$ o in $\mathfrak{b}$. Poiché $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ mantengono la loro vecchia struttura di algebre di Lie, possiamo supporre che due tra x, y, z sono in $\mathfrak{a}$ (risp. $\mathfrak{b}$) e il rimanente è in $\mathfrak{b}$ (risp. $\mathfrak{a}$). Per simmetria, non importa quale dei due. Ci sono dunque due casi:

(1) $x, y \in \mathfrak{a}, z \in \mathfrak{b}$;
(2) $x \in \mathfrak{a}, y, z \in \mathfrak{b}$.

L'identità di Jacobi nel caso (1) dice semplicemente che π è un omomorfismo di algebre di Lie:

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \\
&[x, \pi(y)z]] - [y, \pi(x)z]] - \pi([x, y])z = 0 \\
&\pi(x)\pi(y)z - \pi(y)\pi(x)z = \pi([x, y])z
\end{aligned}$$

L'identità di Jacobi per il caso (2) dice che $\pi(x)$ è una derivazione per ogni $x \in \mathfrak{a}$.

$$\begin{aligned}
&[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \\
&\pi(x)[y, z] - [y, \pi(x)z] + [z, \pi(x)y] = 0 \\
&\pi(x)[y, z] = [y, \pi(x)z] + [\pi(x)y, z]
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione che $\mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ è un'algebra di Lie. $\mathfrak{b}$ è chiaramente un ideale: se $z = x + y \in \mathfrak{g}, v \in \mathfrak{b}$ allora $[z, v] = [x + y, v] = [x, v] + [y, v]$. Ora $[x, v] = \pi(x)v \in \mathfrak{b}$ per come è definito il bracket, e $[y, v] \in \mathfrak{b}$ in quanto entrambi elementi di $\mathfrak{b}$. $\square$

Diamo ora due caratterizzazioni di prodotto semidiretto. La prima è:

PROPOSIZIONE 1.4.2. *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è il prodotto semidiretto di due sue sottoalgebre $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ se e solo se $\mathfrak{g}$ è lo spazio vettoriale prodotto diretto di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, e $\mathfrak{b}$*

è un ideale di $\mathfrak{g}$*. In tal caso,* $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$*, dove, per ogni* $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}, \pi(x)y = [x, y]$*;* π *è in effetti una rappresentazione di* $\mathfrak{a}$ *come derivazioni di* $\mathfrak{b}$*.*

Dim. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ allora $\mathfrak{g}$ è somma diretta di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ come spazio vettoriale e $\mathfrak{b}$ è un ideale come si è visto nella proposizione precedente.

Viceversa, se $\mathfrak{g}$ è somma diretta di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ come spazio vettoriale ma $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono anche sottoalgebre e $\mathfrak{b}$ è per di più un ideale di $\mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ per qualche rappresentazione π. Precisamente basta definire $\pi : \mathfrak{a} \to Der\ \mathfrak{b}$ come $\pi(x) = ad\ x$. Il fatto che $ad\ x$ stabilizza $\mathfrak{b}$ è garantito dall'ipotesi che $\mathfrak{b}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$. Allora

$$\begin{aligned}
&[x + y, x' + y'] = [x, x'] + [y, y'] + [x, y'] + [y, x'] \\
&= [x, x'] + [y, y'] + ad\ x(y') - ad\ x'(y) \\
&= [x, x'] + [y, y'] + \pi(x)y' - \pi(x')y.
\end{aligned}$$

□

Dunque un prodotto semidiretto è la stessa cosa che il prodotto diretto di spazi vettoriali tra una sottoalgebra e un ideale.

La seconda caratterizzazione di prodotto semidiretto ci viene dal concetto di estensione fattorizzata, che ora definiamo:

Definizione 1.4.1. Una successione di omomorfismi

$$\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\sigma_1} \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\sigma_2} \mathfrak{g}_3 \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{g}_4 \xrightarrow{\sigma_4} \mathfrak{g}_5 \cdots$$

si dice **esatta** se $Im\ \sigma_i = ker\ \sigma_{i+1}$.

Con questo linguaggio

$$0 \to \mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g}$$

è esatta se e solo se ϕ è un monomorfismo;

$$\mathfrak{b} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{g} \to 0$$

è esatta se e solo se ϕ è un epimorfismo;

$$0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\phi} \mathfrak{h} \to 0$$

è esatta se e solo se ϕ è un isomorfismo.

Definizione 1.4.2. Sia

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{h} \to 0 \tag{1.4.2}$$

una successione esatta di algebre di Lie. Ciò significa che l'omomorfismo $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ è iniettivo, l'omomorfismo $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{h}$ è suriettivo e l'immagine del primo omomorfismo coincide con il nucleo del secondo. Diremo in tal caso che $\mathfrak{g}$ è una **estensione di** $\mathfrak{h}$ **tramite** $\mathfrak{b}$**.** La successione si fattorizza se esiste un omomorfismo $\tau : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ tale che $\sigma\tau$ è l'identità su $\mathfrak{h}$. In questo caso diremo che $\mathfrak{g}$ è una **estensione fattorizzata di** $\mathfrak{h}$ **tramite** $\mathfrak{b}$.

Osserviamo che il fattorizzarsi di una estensione data dalla successione

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{h} \to 0 \tag{1.4.3}$$

è equivalente precisamente allo specificare una sottoalgebra $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ complementare all'ideale $\mathfrak{b}$, ed in tal caso $\sigma : \mathfrak{a} \to \mathfrak{h}$ è un isomorfismo. Vediamo ora che un prodotto semidiretto è sostanzialmente la stessa cosa che una successione esatta corta fattorizzata.

Proposizione 1.4.3. *Se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono algebre di Lie e $\pi : \mathfrak{a} \to Der\ \mathfrak{b}$ un omomorfismo, allora abbiamo una successione esatta naturale*

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \to 0, \tag{1.4.4}$$

e questa successione si fattorizza in modo naturale. Viceversa, se

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \to 0 \tag{1.4.5}$$

è una successione esatta di algebre di Lie, allora esiste una sottoalgebra $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g}$ è il prodotto semidiretto di $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{b}$ se e solo se la successione si fattorizza. Questo succede se e solo se $\mathfrak{b}$ ha una sottoalgebra complementare $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$.

Dim. La dimostrazione è un utile esercizio sulle definizioni. Limitiamoci a dimostrare, per esempio, che se

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \to 0$$

è una estensione fattorizzata, allora allora $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times_\pi \mathfrak{b}$ per una opportuna rappresentazione $\pi : \mathfrak{b} \to Der\ \mathfrak{a}$. Basterà prendere $\mathfrak{a} = \tau(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}$ e porre $\pi(x) = ad\ x$. Si verifica infatti che $ad\ x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, come segue. Sia $y \in \mathfrak{a}$, dunque $y = \tau(z), z \in \mathfrak{h}$. Voglio mostrare che $[x, \tau(z)] \in \mathfrak{a}$. Infatti se prendiamo $[\sigma(x), z] \in \mathfrak{h}$ ed applichiamo τ otteniamo

$$\tau([\sigma(x), z]) = [\tau\sigma(x), \tau(z)] = [x, \tau(z)]$$

cioè, per definizione, $[x, \tau(z)] \in \mathfrak{a}$. □

Dunque prodotti semidiretti equivalgono a estensioni fattorizzate.

Si faccia attenzione che non ogni successione si fattorizza. Ad esempio: Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Heisenberg (Esempio **5.** di 1.1) e sia $\mathfrak{b}$ lo spazio generato da z. Allora $\mathfrak{h}$ nella successione

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{h} \to 0 \tag{1.4.6}$$

è chiaramente un'algebra di Lie bidimensionale abeliana, poiché $\mathfrak{b} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Se la successione si fattorizzasse, allora $\mathfrak{g}$ conterrebbe un'algebra di Lie complementare a $\mathfrak{b}$. Ma poiché $\mathfrak{b} = Cent\ \mathfrak{g}$, avremmo allora che $\mathfrak{g}$ sarebbe abeliana il che è una contraddizione.

Osservazione 1.4.1. L'algebra di Lie dell'esempio (2) (in 1.1) è il prodotto semidiretto di due algebre di Lie unidimensionali: lo spazio generato da x e quello generato da y.

Osservazione 1.4.2. L'algebra di Heisenberg è il prodotto semidiretto di una sottoalgebra unidimensionale - lo spazio generato da x - con un ideale abeliano di dimensione 2 - lo spazio generato da y e da z.

Ci sono due tipi speciali di prodotto semidiretto che vale la pena di mettere in evidenza:

a. Sia $\mathfrak{a}$ una qualunque algebra di Lie e $\pi : \mathfrak{a} \to End\ V$ una sua qualunque rappresentazione. Allora V può essere considerato come un'algebra di Lie abeliana. Poiché $Der\ \mathfrak{g} = End\ \mathfrak{g}$ per ogni algebra di Lie abeliana $\mathfrak{g}$, abbiamo $\pi : \mathfrak{a} \to Der\ V$, e possiamo dunque formare $\mathfrak{a} \times_\pi V$.

b. Sia $\mathfrak{b}$ un'algebra di Lie qualunque e α una sua derivazione. Abbiamo allora che l'applicazione lineare da κ a $Der\ \mathfrak{b}$ che porta 1 in α è una rappresentazione dell'algebra di Lie unidimensionale κ come derivazioni su $\mathfrak{b}$. Denotiamo questa rappresentazione con α. Allora possiamo formare $\kappa \times_\alpha \mathfrak{b}$. Diremo allora di **aver aggiunto una derivazione α a $\mathfrak{b}$.** Illustriamo questo fatto ancora con la seguente:

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Con le notazioni date,* $\mathfrak{b}$ *è un ideale di codimensione 1 in* $\kappa \times_\alpha \mathfrak{b}$. *Viceversa, sia* $\mathfrak{g}$ *una qualunque algebra di Lie e* $\mathfrak{b}$ *un ideale di codimensione 1 in* $\mathfrak{g}$. *Allora* $\mathfrak{g}$ *è isomorfa a* $\kappa \times_\alpha \mathfrak{b}$ *per un'opportuna derivazione* α. *Infatti, possiamo prendere* $\alpha = ad\ x|\mathfrak{b}$ *per ogni* $x \in \mathfrak{g}, x \notin \mathfrak{b}$. *Ogni estensione di un'algebra di Lie unidimensionale si fattorizza, ovvero, equivalentemente, ogni ideale di codimensione uno in un'algebra di Lie ha una sottoalgebra complementare, e cioè un qualunque sottospazio complementare.*

Tutto ciò è chiaro grazie alla fondamentale, anche se banale, osservazione che un qualunque sottospazio unidimensionale di un'algebra di Lie è in effetti una sottoalgebra.

OSSERVAZIONE 1.4.3. Come caso speciale sia di (a) che di (b) prendiamo un qualunque spazio vettoriale di dimensione finita V e un qualunque operatore lineare $\alpha \in End\ V$, e formiamo l'algebra di Lie $\kappa \times_\alpha \mathfrak{b}$ (nelle notazioni di (b)). Si osservi che gli esempi (2) e (5) di 1.1 sono entrambi di questo tipo.

1.5 Algebre di Lie risolubili e semisemplici.

Le algebre di Lie risolubili saranno proprio quelle algebre di Lie che possono essere costruite con la successiva aggiunta di derivazioni a partire dall'algebra di Lie nulla. Tuttavia la definizione standard è differente, ed ora procediamo a darla.

Sia $\mathfrak{g}$ una qualunque algebra di Lie, e sia $\mathfrak{g}_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ l'ideale di $\mathfrak{g}$ definito induttivamente da $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j]$. Allora $\mathfrak{g}_1$ è il commutatore di $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots$. Questa successione, che si stabilizza perché $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita, si dice la **successione dei commutatori** .

DEFINIZIONE 1.5.1. $\mathfrak{g}$ è **risolubile** se $\mathfrak{g}_k = 0$ per qualche κ, cioè se la successione dei commutatori si stabilizza a 0.

Esempi.

1. Gli esempi **2.** e **5.** di 1.1 sono algebre di Lie risolubili.

2. Sia $\mathfrak{g} = T_n$ il sottospazio di $M(n, \kappa)$ definito da $\{x \in M(n, \kappa) | x_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$, cioè lo spazio delle matrici triangolari superiori. Definiamo inoltre $\mathfrak{g}_{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ come $\{x \in M(n, \kappa) | x_{ij} = 0 \text{ se } i > j - k\}$. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)}$, e $\mathfrak{g}_{(k)}$ è lo spazio delle matrici triangolari superiori che hanno solo zeri sotto la k-esima "diagonale corta" parallela alla diagonale principale. Una osservazione cruciale è che $\mathfrak{g}_{(k)} \mathfrak{g}_{(\ell)} \subset \mathfrak{g}_{(k+\ell)}$ per ogni $k, \ell = 0, 1, 2, \dots$. In particolare, $[\mathfrak{g}_{(k)}, \mathfrak{g}_{(\ell)}] \subset \mathfrak{g}_{(k+\ell)}$. Perciò ciascun $\mathfrak{g}_{(k)}$ è un ideale associativo della sottoalgebra associativa $\mathfrak{g}$ di $M(n, \kappa)$, e ciascun $\mathfrak{g}_{(k)}$ è anche un ideale di Lie della sottoalgebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathfrak{gl}(n, k)$. Sia $\mathfrak{d} = \delta_n$ lo spazio di tutte le matrici diagonali di $M(n, k)$. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{g}_{(1)}$. Inoltre $\mathfrak{d}$ è una sottoalgebra di Lie abeliana di $\mathfrak{g}$, e $[\mathfrak{d}, \mathfrak{g}_{(1)}] \subset [\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(1)}] \subset \mathfrak{g}_{(1)}$. Dunque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_{(1)}$, ed è chiaro da questo e da quanto precede che $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie risolubile.

OSSERVAZIONE 1.5.2. Ogni algebra di Lie che coincide col suo commutatore è non risolubile.

Per dimostrare la suddetta caratterizzazione di algebre di Lie risolubili, dobbiamo dare la seguente rilevante definizione:

DEFINIZIONE 1.5.2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Una **successione elementare** in $\mathfrak{g}$ è una successione di sottoalgebre

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_n = 0, \tag{1.5.1}$$

dove ogni $\mathfrak{a}_{i+1}$ è un ideale di codimensione 1 in $\mathfrak{a}_i (i = 0, \dots, n-1)$.

Allora le algebre di Lie che ammettono successioni elementari sono precisamente quelle che si possono costruire aggiungendo successivamente derivazioni all'algbera di Lie nulla.

Ancora una definizione che ci sarà utile:

DEFINIZIONE 1.5.3. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_0 \supset \mathfrak{b}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{b}_m = 0, \tag{1.5.2}$$

un successione di sottospazi strettamente decrescente. Un **raffinamento** di questa successione è un'altra successione di sottospazi strettamente decrescente,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_0 \supset \mathfrak{c}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{c}_\ell = 0, \tag{1.5.3}$$

tale che ciascun $\mathfrak{b}_i$ è incluso tra i $\mathfrak{c}_j$. Il raffinamento si dice **completo** se ciascun $\mathfrak{c}_{i+1}$ ha codimensione uno in $\mathfrak{c}_i (i = 0, 1, \dots, \ell - 1)$.

Il legame tra questi due concetti è il seguente:

PROPOSIZIONE 1.5.1. *Un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$ *è risolubile se e solo se possiede una successione elementare. In tal caso, ogni raffinamento completo della successione dei commutatori, considerato come successione finita arrestata al più piccolo intero* j *tale che* $\mathfrak{g}_j = 0$, *è una successione elementare. (Si osservi che la successione dei commutatori è infatti strettamente decrescente.)*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\mathfrak{g}$ abbia una successione elementare

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0. \tag{1.5.4}$$

Allora per ogni $i = 0, \ldots, n-1, [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$, poiché $\mathfrak{a}_i$ è la somma diretta dell'ideale $\mathfrak{a}_{i+1}$ e di un complemento unidimensionale. Ne segue ora facilmente per induzione che $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{a}_i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Ma allora $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{a}_n = 0$ e dunque $\mathfrak{g}$ è risolubile.

Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia risolubile, e sia j il più piccolo intero tale che $\mathfrak{g}_j = 0$. Sia

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0, \tag{1.5.5}$$

un qualunque raffinamento completo della successione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_j = 0. \tag{1.5.6}$$

Dato $i = 0, \ldots, n-1$ esiste $k = 0, \ldots, j-1$ tale che

$$\mathfrak{g}_k \supset \mathfrak{a}_i \supset \mathfrak{a}_{i+1} \supset \mathfrak{g}_{k+1}. \tag{1.5.7}$$

Ma allora $\mathfrak{a}_{i+1} \supset \mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] \supset [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$, e dunque $\mathfrak{a}_{i+1}$ contiene il commutatore di $\mathfrak{a}_i$. Dunque $\mathfrak{a}_{i+1}$ è in effetti un ideale di $\mathfrak{a}_i$, e dunque gli $\mathfrak{a}_i$ formano una successione elementare. Questo dimostra la proposizione. $\square$

Le seguenti sono due osservazioni generali sulle algebre di Lie risolubili.

PROPOSIZIONE 1.5.2. *Ogni sottoalgebra di un'algebra di Lie risolubile è risolubile.*

La dimostrazione è ovvia.

PROPOSIZIONE 1.5.3. *Sia*

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \to 0 \tag{1.5.8}$$

una successione esatta di algebre di Lie. Allora $\mathfrak{g}$ *è risolubile se e solo se entrambe* $\mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{a}$ *sono risolubili.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{g}$ è risolubile, allora $\mathfrak{b}$ è risolubile per la Proposizione 1.5.2. Inoltre, $\mathfrak{a}$ è risolubile poiché $\pi(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{a}_j$ per ogni j, ove π è l'applicazione da $\mathfrak{g}$ ad $\mathfrak{a}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ siano risolubili. Se $\mathfrak{a}_j = 0$, allora $\pi(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{a}_j = 0$ cosicché $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{b}$. Ma $\mathfrak{b}_k = 0$ per qualche k, e $\mathfrak{g}_{j+k} = (\mathfrak{g}_j)_k$. Quindi $\mathfrak{g}_{j+k} = 0$, e $\mathfrak{g}$ è risolubile. $\square$

COROLLARIO 1. *Ogni immagine omomorfa di un'algebra di Lie risolubile è risolubile.*

COROLLARIO 2. *Ogni prodotto semidiretto di algebre di Lie risolubili è risolubile.*

OSSERVAZIONE 1.5.3. Il Corollario 2 e la Proposizione 1.4.4 forniscono un'altra dimostrazione di quella parte della Proposizione 1.5.1 che dice che ogni algebra di Lie che ammette una successione elementare è risolubile.

Siamo ora pronti a dimostrare un fatto molto importante per la struttura di un'algebra di Lie qualunque: l'esistenza di un unico ideale risolubile massimale, il radicale. La dimostrazione dipende dalla:

PROPOSIZIONE 1.5.4. *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie, e* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *ideali risolubili di* $\mathfrak{g}$*. Allora* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *è ancora un ideale risolubile di* $\mathfrak{g}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo mostrare che l'ideale $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ è un'algebra risolubile. Ma $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, e dunque abbiamo una successione esatta

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \to (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \to 0 \tag{1.5.9}$$

Ma $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ è un immagine omomorfa di $\mathfrak{b}$ (v. la Proposizione 1.3.6), e dunque è risolubile per il Corollario 1. Dunque $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ è risolubile per la Proposizione 1.5.3. □

PROPOSIZIONE 1.5.5. *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie. Allora* $\mathfrak{g}$ *ha un unico ideale massimale risolubile, cioè un ideale risolubile che contiene ogni ideale risolubile.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita, $\mathfrak{g}$ ha chiaramente un ideale massimale risolubile. Se ce ne fossero due distinti, la loro somma sarebbe ancora un ideale risolubile per la Proposizione 1.5.4, e questa è una contraddizione. □

DEFINIZIONE 1.5.2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. L'unico ideale risolubile massimale di $\mathfrak{g}$ si dice il **radicale** di $\mathfrak{g}$, e si indica con *rad* $\mathfrak{g}$.

Possiamo ora dare la definizione standard di un tipo di algebre di Lie importantissimo:

DEFINIZIONE 1.5.3. Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ si dice **semisemplice** se *rad* $\mathfrak{g} = 0$, cioè se $\mathfrak{g}$ non ha ideali risolubili non nulli.

Abbiamo già definito algebre di Lie semplici (1.3). Per giustificare quella terminologia e quest'ultima definizione, dovremmo almeno dimostrare che algebre di Lie semplici sono semisemplici. Questo è una parte di quello che ora faremo. Incidentalmente, una ragione per non chiamare semplice un'algebra di Lie unidimensionale è che una tale algebra di Lie non è semisemplice.

OSSERVAZIONE 1.5.4. Siano $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ delle algebre di Lie, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Allora ogni ideale di $\mathfrak{a}$ o di $\mathfrak{b}$ è chiaramente un ideale di $\mathfrak{g}$.

PROPOSIZIONE 1.5.6. *Siano* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *delle algebre di Lie, e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$*. Allora* $\mathfrak{g}$ *è semisemplice se e solo se* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *sono semisemplici.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{a}$ oppure $\mathfrak{b}$ ha un ideale risolubile non nullo, allora lo ha anche $\mathfrak{g}$, per l'ultima osservazione. Viceversa, sia $\mathfrak{c}$ un ideale risolubile non nullo di $\mathfrak{g}$. Allora le proiezioni di $\mathfrak{c}$ su $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono ideali risolubili di $\mathfrak{a}$ e di $\mathfrak{b}$, rispettivamente, e almeno una di queste proiezioni è non zero. Questo dimostra la proposizione. □

PROPOSIZIONE 1.5.7. *Un'algebra di Lie semplice è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{g}$ è semplice, allora *rad* $\mathfrak{g}$ deve essere 0 oppure $\mathfrak{g}$. Ma se *rad* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile, contraddicendo il fatto che $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (Proposizione 1.3.12). Dunque $\mathfrak{g}$ è semisemplice. □

PROPOSIZIONE 1.5.8. *Il prodotto diretto di un numero finito di algebre di Lie semplici è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Combinare le Proposizioni 1.5.6 e 1.5.7. □

Uno degli scopi di questi appunti è di dimostrare il viceversa della Proposizione 1.5.8, quando *char* $\kappa = 0$. In effetti, la maggior parte di ciò che faremo ha come scopo lo studio delle algebre di Lie semisemplici, che riprenderemo nel paragrafo 2.5.

Infine abbiamo la seguente importante relazione tra il radicale e la semisemplicità in un'algebra di Lie qualunque:

PROPOSIZIONE 1.5.9. *Se* $\mathfrak{g}$ *è un'algebra di Lie allora l'algebra di Lie quoziente* $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ *è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{h}$ un qualunque ideale risolubile di $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$, e sia $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ la proiezione canonica. Allora $\mathfrak{a} = \pi^{-1}(\mathfrak{h})$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, ed abbiamo una successione esatta

$$0 \to rad\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \to 0$$

Ma $\mathfrak{h}$ e $rad\ \mathfrak{g}$ sono risolubili, e quindi $\mathfrak{a}$ è risolubile. Quindi $\mathfrak{a} = rad\ \mathfrak{g}$ per definizione di $rad\ \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} = 0$. $\square$

Questo ci mostra che ogni algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è una estensione di un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ tramite un'algebra risolubile $rad\ \mathfrak{g}$. Il teorema di decomposizione di Levi afferma che se $char\ \kappa = 0$, questa estensione si spezza sempre, cosicché $\mathfrak{g}$ è il prodotto semidiretto di un'algebra di Lie semisemplice con $rad\ \mathfrak{g}$. Non dimostreremo tuttavia questo teorema (v. [Serre1] e [SSL]).

1.6 Algebre di Lie nilpotenti.

Il lettore osservi il parallelo tra questa sezione e la discussione di algebre di Lie risolubili in 1.5.

Le algebre di Lie nilpotenti costituiscono una classe importante di algebre di Lie risolubili. Precisamente, sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, e sia $\mathfrak{g}^j (j = 0, 1, 2, \dots)$ l'ideale di $\mathfrak{g}$ definito induttivamente da $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^j]$. Allora $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots$. Questa è la **serie centrale discendente** di $\mathfrak{g}$ e si stabilizza poiché $\mathfrak{g}$ ha dimensione finita.

Definizione 1.6.1. $\mathfrak{g}$ si dice **nilpotente** se $\mathfrak{g}^k = 0$ per qualche k, cioè se la serie centrale discendente si stabilizza a 0.

Osservazione 1.6.1. $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se esiste m tale che

$$[x_1, [x_2, \dots [x_{m-1}, x_m] \dots]] = 0 \tag{1.6.1}$$

per ogni $x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}$.

Osservazione 1.6.2. L'osservazione precedente implica che se $\mathfrak{g}$ è nilpotente, allora $ad\ x$ è un endomorfismo nilpotente di $\mathfrak{g}$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$.

Proposizione 1.6.1. *Ogni algebra di Lie nilpotente è risolubile.*

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}^i$ per ogni $i = 0, 1, 2, \dots$, e questo a sua volta è facilmente dimostrato per induzione. □

Esempi.

1. L'esempio **5.** di 1.1 è nilpotente, ma l'esempio **2.** di 1.1 è risolubile ma non nilpotente.

2. Lo spazio delle matrici triangolari superiori in senso stretto di $M(n, k)$ (lo spazio $\mathfrak{g}_{(1)}$ dell'esempio **2.** di 1.5) è un'algebra di Lie nilpotente, in virtù di quanto discusso in quell'esempio. Ma l'algebra risolubile $\mathfrak{g}_{(0)}$ di tutte le matrici triangolari superiori non è nilpotente, giacché $[\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(0)}] = \mathfrak{g}_{(1)}$ e $[\mathfrak{g}_{(0)}, \mathfrak{g}_{(1)}] = \mathfrak{g}_{(1)}$. (Esercizio: Dimostrare queste due ultime uguaglianze).

Osservazione 1.6.3. Un'algebra di Lie non nulla nilpotente $\mathfrak{g}$ ha sempre un centro non nullo. Infatti, se k è minimo tale che $\mathfrak{g}^k = 0$, allora $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = \mathfrak{g}^k = 0$, e $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$.

Questa osservazione ci serve per dare altre due caratterizzazioni di algebre di Lie nilpotenti, come ora mostreremo. Poniamo $\mathfrak{b}_0 = 0$ e $\mathfrak{b}_1 = Cent\ (\mathfrak{g})$. Se $\mathfrak{g} \neq 0$ per quanto precede $\mathfrak{b}_1 \neq 0$. Consideriamo allora $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_1$ che è ancora nilpotente, in quanto quoziente di un'algebra nilpotente, e dunque, se non è nulla, possiede un centro non nullo necessariamente della forma $\mathfrak{b}_2/\mathfrak{b}_1$, dove $\mathfrak{b}_2$ è un ideale di $\mathfrak{g}$. Anche $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_2$ è nilpotente dunque possiamo ripetere l'argomentazione. Otteniamo una successione di ideali di $\mathfrak{g}$ sempre crescente. Poiché la dimensione di $\mathfrak{g}$ è finita si dovrà ad un certo punto ottenere $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{g}$. Questa successione di ideali si dice **serie centrale ascendente** di $\mathfrak{g}$.

Le due ulteriori caratterizzazioni sono date da:

Proposizione 1.6.2. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{g}$ *è nilpotente.*
(2) *La serie centrale ascendente di* $\mathfrak{g}$ *termina a* $\mathfrak{g}$.
(3) *La rappresentazione aggiunta di* $\mathfrak{g}$ *ammette una bandiera fortemente invariante.*

DIMOSTRAZIONE. (1) $\implies$ (2): Questo lo abbiamo discusso già.

(2) $\implies$ (3) : La serie centrale ascendente è fortemente invariante poiché infatti per ogni $x \in \mathfrak{g}$ si ha $[x, \mathfrak{b}_{i+1}] \subset \mathfrak{b}_i$ per definizione di $\mathfrak{b}_{i+1}$, in quanto $\mathfrak{b}_{i+1}/\mathfrak{b}_i$ è il centro di $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_i$. Dunque essa ha quasi tutti i requisiti per essere una bandiera fortemente invariante: manca solo la proprietà che ogni spazio sia di codimensione 1 nel precedente. Ma allora ogni raffinamento completo della successione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_j \supset \mathfrak{b}_{j-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{b}_0 = 0 \tag{1.6.2}$$

ove j è il più piccolo indice tale che $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{g}$, è chiaramente una bandiera fortemente invariante per la rappresentazione aggiunta.

(3) $\implies$ (1): Sia

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0 \tag{1.6.3}$$

una bandiera fortemente invariante per la rappresentazione aggiunta. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}_1$, infatti essendo la bandiera fortemente invariante $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0] \subset \mathfrak{a}_1$. Continuando: $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{a}_2$ e dunque, per induzione, $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{a}_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$. Ciò mostra che $\mathfrak{g}$ è nilpotente. □

OSSERVAZIONE 1.6.4. L'equivalenza tra (1) e (3) nella Proposizione 1.6.2 suggerisce una domanda analoga per algebre di Lie risolubili: È vero che un'algebra di Lie è risolubile se e solo se la rappresentazione aggiunta ammette una bandiera invariante? Come vedremo in 2.2, questo è spesso vero.

La dimensione finita di $\mathfrak{g}$ è stata usata nella precedente dimostrazione. Tuttavia sia la serie centrale discendente che quella ascendente possono essere definite in una qualunque algebra di Lie anche di dimensione infinita, e la corrispondente generalizzazione dell'equivalenza tra (1) e (2) della Proposizione 1.6.2 è vera.

La seconda affermazione nella proposizione seguente è stata già usata per dimostrare la Proposizione 1.6.2:

PROPOSIZIONE 1.6.3. *Ogni sottoalgebra ed ogni quoziente di un'algebra di Lie nilpotente è nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è ovvia, e la seconda segue dal fatto che se $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ è un omomorfismo suriettivo di algebre di Lie, allora $\pi(\mathfrak{g}^j) = \mathfrak{a}^j$ per ogni j. □

D'altra parte, le proposizioni analoghe alla Proposizione 1.5.3 ed anche del Corollario 2 di 1.5.3 non sono vere per algebre nilpotenti.

Vale tuttavia la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 1.6.4. *Se $\mathfrak{g}/Cent\ \mathfrak{g}$ è nilpotente allora $\mathfrak{g}$ è nilpotente.*

DIM. Esercizio. □

Esercizio: Calcolare $Cent\ U_n$.

Esiste un analogo nilpotente del radicale, il nilradicale. Ha però minore importanza del radicale. Per costruirlo, ci serve la seguente:

PROPOSIZIONE 1.6.5. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, e $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali nilpotenti di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ è ancora un ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le serie centrali discendenti $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0 \supset \mathfrak{a}^1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}^m = 0$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^0 \supset \mathfrak{b}^1 \supset \ldots \supset \mathfrak{b}^n = 0$. Tutti i termini di queste serie sono ideali di $\mathfrak{g}$. Per l'Osservazione (1) che precede la Proposizione 1.6.1, basta mostrare che

$$[x_1, [x_2, \ldots [x_{m+n-2}, x_{m+n-1}] \ldots]] = 0 \tag{1.6.4}$$

per ogni $x_1, \dots, x_{m+n-1} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. È chiaramente sufficiente assumere che ciascun x_i sia o in $\mathfrak{a}$ o in $\mathfrak{b}$. Ne abbiamo scelti in numero appena sufficiente per assicurarci che o m di essi sono in $\mathfrak{a}$ oppure n di essi sono in $\mathfrak{b}$. Una piccola riflessione ci convincerà che se m degli x_i sono in $\mathfrak{a}$, allora il membro a sinistra di (1.6.4) è contenuto in $\mathfrak{a}^m = 0$. L'altro caso è simile. $\square$

PROPOSIZIONE 1.6.6. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora $\mathfrak{g}$ possiede un unico ideale nilpotente massimale, cioè un ideale nilpotente che contiene ogni ideale nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è la stessa della Proposizione 1.5.5, tranne che per la sostituzione di "risolubile" con "nilpotente". $\square$

DEFINIZIONE 1.6.2. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. L'unico ideale nilpotente massimale di $\mathfrak{g}$ si dice **nilradicale** di $\mathfrak{g}$, e si indica con *nilrad* $\mathfrak{g}$.

1.7 Forme traccia e la forma di Killing.

Associata ad un modulo per un'algebra di Lie c'è una certa forma bilineare importante. Prima di definirla, ricordiamo che una forma bilineare $B : V \times V \to \kappa$ su uno spazio vettoriale V è non singolare se il **radicale sinistro** di B, definito da $\{v \in V | B(v,w) = 0 \ \ \forall w \in V\}$ è zero. Altrimenti B è **singolare**. B è **simmetrica** se $B(v,w) = B(w,v)$ per ogni $v, w \in V$. Supponiamo di essere in questo caso, allora $rad\ B$, il radicale di B, è definito come il radicale sinistro di B e naturalmente B è non singolare se e solo se $rad\ B = 0$.

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, possiamo associare alla forma bilineare B la sua matrice, il cui coefficiente di posto i, j è $B(v_i, v_j)(i, j = 1, \ldots, n)$. Allora B è simmetrica se e solo se la sua matrice è simmetrica, e B è non singolare se e solo se la sua matrice è non singolare. Si osservi che anche se κ è il campo dei numeri reali, una forma bilineare simmetrica non singolare non è necessariamente definita positiva o definita negativa (B è **definita positiva** se $v \neq 0$ implica che $B(v,v) > 0$, e corrispondentemente per **definita negativa**). Infatti, B può essere non singolare eppure esistere un vettore non nullo $v \in V$ tale che $B(v,v) = 0$. Per esempio, se B è una forma su uno spazio vettoriale di dimensione 2 di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.7.1}$$

rispetto ad una qualche base, allora B è non singolare, ma se v è la somma dei vettori della base, allora $B(v,v) = 0$. Questo esempio vale su di un campo qualunque.

Definizione 1.7.1. Un operatore $\alpha \in End\ V$ si dice che lascia **invariante** una forma bilineare B su V se

$$B(\alpha v, w) + B(v, \alpha w) = 0 \tag{1.7.2}$$

per ogni $v, w \in V$.

Se fissiamo una base di V e prendiamo j come matrice di B e x come matrice di α, allora la condizione diventa

$$jx + x^t j = 0, \tag{1.7.3}$$

dove t denota la trasposta. Il lettore riconoscerà questa condizione dagli esempi delle algebre di Lie date in 1.1, gli esempi **11.** e **12.**, per la precisione. Vediamo ora che quegli esempi sono formulazioni matriciali di un tipo di esempio più "astratto": l'insieme degli endomorfismi di V che lascia invariante una fissata forma bilineare. Infatti, la seguente osservazione è altrettanto facile da verificare nel presente contesto quanto quella dell'Esempio **12.** di 1.1:

Proposizione 1.7.1. *L'insieme degli endomorfismi di uno spazio vettoriale V che lasciano invariante una fissata forma bilineare su V è una sottoalgebra di Lie di $End\ V$.*

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale V sia un modulo per l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, con rappresentazione corrispondente π, e sia B una forma bilineare su V. Siamo interessati soprattutto al caso in cui $\pi(\mathfrak{g})$ è una sottoalgebra dell'algebra di Lie della Proposizione 1.7.1, cioè il caso in cui B è **$\mathfrak{g}$-invariante**. Questo significa naturalmente che

$$B(x \cdot v, w) + B(v, x \cdot w) = 0 \tag{1.7.4}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}$ e $v, w \in V$.

Consideriamo l'importante caso speciale in cui $V = \mathfrak{g}$ e $\pi = ad$. Una parte considerevole della teoria della struttura dell'algebra di Lie si basa su alcune forme bilineari su $\mathfrak{g}$ ben scelte che sono *ad*-invarianti. La condizione di *ad*-invarianza di B è la seguente:

$$B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = 0 \tag{1.7.5}$$

o equivalentemente,

$$B([x,y],z) = B(x,[y,z]) \tag{1.7.6}$$

per ogni $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Questa ultima formulazione della condizione asserisce la **associatività** di B.

Ecco qui di seguito due esempi interessanti di forme bilineari simmetriche *ad*-invarianti:

1. Consideriamo l'algebra di Lie tridimensionale del prodotto vettoriale (Esempio **3** in 1.1). Sia B la forma bilineare "prodotto scalare" su $\mathfrak{g}$, definita in maniera tale che $\{x, y, z\}$ diventi una base ortonormale. Allora B è una forma bilineare *ad*-invariante su $\mathfrak{g}$. Infatti, se per un momento denotiamo la moltiplicazione di Lie con il classico "$\times$" e B con un punto allora la *ad*-invarianza di B risulta espressa dalla relazione classica:

$$a \times b \cdot c = a \cdot b \times c \tag{1.7.7}$$

per il prodotto misto $a \times b \cdot c$ $(a, b, c \in \mathfrak{g})$.

2. Sia $\mathfrak{g}$ una qualunque algebra di Lie di matrici, o equivalentemente, una qualunque sottoalgebra di Lie di $End\ V$ per qualche spazio vettoriale V. Sia B la forma bilineare su $\mathfrak{g}$ definita da $B(x,y) = tr\ xy$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. Allora B è simmetrica, ed è facile verificare che B è *ad*-invariante. Il risultato seguente generalizza questo calcolo.

PROPOSIZIONE 1.7.2. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione. Definiamo la forma bilineare B_π su $\mathfrak{g}$ tramite la formula $B_\pi(x,y) = tr\ \pi(x)\pi(y)$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. Allora B_π è una forma bilineare simmetrica invariante.*

DIMOSTRAZIONE. B_π è simmetrica perché la traccia di ogni commutatore è zero. Per verificare l'invarianza, sia $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Dobbiamo mostrare che

$$B_\pi([x,y],z) = B_\pi(x,[y,z]) \tag{1.7.8}$$

cioè che

$$tr\ (\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x))\pi(z) = tr\ \pi(x)(\pi(y)\pi(z) - \pi(z)\pi(y)). \tag{1.7.9}$$

Ma questo segue di nuovo dal fatto che la traccia di ogni commutatore è zero, in questo caso il commutatore di $\pi(y)$ con $\pi(x)\pi(z)$. $\square$

DEFINIZIONE 1.7.2. Nelle notazioni della Proposizione 1.7.2, B_π si dice la **traccia** del $\mathfrak{g}$-modulo V, o della rappresentazione π.

OSSERVAZIONE 1.7.1. B_π dipende solo dalla classe di equivalenza di π.

Si osservi che l'Esempio **2.** suddetto è un esempio di traccia; là π è la rappresentazione identità.

Da forme bilineari $\mathfrak{g}$-invarianti siamo stati condotti a considerare forme bilineari *ad*-invarianti B_π su $\mathfrak{g}$, associate con i moduli. Supponiamo di specializzare ulteriormente al $\mathfrak{g}$-modulo $\mathfrak{g}$ stesso e sia $\pi = ad$. La traccia risultante è la più importante forma bilineare di tutta la teoria di Lie.

DEFINIZIONE 1.7.3. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. La forma bilineare B_{ad} su $\mathfrak{g}$ si chiama **forma di Killing** o **forma di Cartan-Killing** di $\mathfrak{g}$; è data da

$$B_{ad}(x,y) = tr\ ad\ x\ ad\ y \tag{1.7.10}$$

per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$.

La forma di Killing di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sarà indicata spesso semplicemente da B. Si osservi che per la Proposizione 1.7.2, la forma di Killing è una forma bilineare, simmetrica e invariante su $\mathfrak{g}$.

Si può verificare che nell'esempio **1.** qui sopra la forma di Killing è -2 moltiplicato per il solito prodotto scalare su $\mathbf{R}^3$ e dunque possiamo dire che mentre la struttura generale di algebra di Lie può essere vista come una generalizzazione della moltiplicazione di prodotto vettoriale nello spazio vettoriale euclideo tridimensionale, la forma di Killing e le forme traccia possono essere pensate come generalizzazioni del prodotto scalare dello spazio tridimensionale. E la formula del prodotto misto dell'esempio **1.** qui sopra è una relazione che si generalizza ad algebre di Lie arbitrarie e a tracce arbitrarie.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni ulteriori semplici ma utili osservazioni sulle forme bilineari.

Sia V uno spazio vettoriale. Lo spazio vettoriale duale di V è lo spazio vettoriale $Hom\ (V, \kappa)$, e si indica con V^*. Inoltre, l'accoppiamento naturale tra V^* e V si indica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'insieme di tutte le forme bilineari su V forma uno spazio vettoriale che è isomorfo in maniera canonica a $Hom(V, V^*)$; la corrispondenza porta la forma bilineare B nell'applicazione lineare $\phi : V \to V^*$ definita da

$$\langle \phi(v), w \rangle = B(v, w) \tag{1.7.11}$$

per ogni $v, w \in V$. Allora B è non singolare se e solo se ϕ è un isomorfismo; infatti, $Ker\ \phi$ è il radicale sinistro di B.

OSSERVAZIONE 1.7.2. L'enfasi sul radicale sinistro qui non significa nulla giacché il radicale destro (definito in maniera ovvia) ha la stessa dimensione del radicale sinistro. Per vedere questo, si osservi che il radicale destro è l'insieme dei vettori annullati dall'immagine di ϕ.

Supponiamo che B sia una forma bilineare simmetrica su V. Per ogni sottospazio U di V, sia $U^\perp$ il sottospazio

$$U^\perp = \{v \in V | B(v, u) = 0 \ \ \forall u \in U\}. \tag{1.7.12}$$

Allora per esempio $V^\perp = rad\ B$. Se U è un sottospazio, è chiaro che $U \cap U^\perp = rad\ (B|U)$, dove $B|U$ denota la restrizione di B a U. Si osservi che anche se B è non singolare su V, possono esistere dei sottospazi non nulli U tali che $rad(B|U) \neq 0$, cioè, tali che B è singolare su U. In particolare, $U^\perp$ può non essere un complemento lineare di U. Questo accade per la forma bilineare associata con la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.7.13}$$

vista prima. Tuttavia:

PROPOSIZIONE 1.7.3. *Se B è una forma bilineare simmetrica non singolare su uno spazio vettoriale V di dimensione n e $U \subset V$ un sottospazio, allora $dim\ U + dim\ U^\perp = dim\ V$. Se B non è necessariamente non singolare, allora $dim\ U + dim\ U^\perp \geq dim\ V$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{u_1, \ldots, u_r\}$ sia una base di U e completiamola fino ad ottenere una base di V. Allora $U^\perp$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $B(v, u_i) = 0, i = 1, \ldots, r$. Esplicitamente, se (b_{ij}) è la matrice associata a B in questa base e se $(x_1, \ldots, x_n)$ sono le coordianate di v le equazioni sono

$$x_1 b_{1j} + x_2 b_{2j} + \cdots + x_n b_{nj} = 0$$

per $j = 1, \ldots, r$ che ha evidentemente rango r nell'ipotesi in cui B è non degenere, ma allora $dim\ U^\perp = n - r = n - dim\ U$. Se invece B è qualunque allora il sistema ha rango minore p di r e quindi $dim\ U^\perp = n - p > n - dim\ U$.
□

Osservazione 1.7.3. Nelle stesse notazioni, $U^\perp$ è un complemento lineare di U se e solo se $U \cap U^\perp = 0$, cioè se e solo se $B|U$ è non singolare. In vista della Proposizione 1.7.3, ciò è vero anche se B è singolare.

Osservazione 1.7.4. Se B è non singolare, allora $(U^\perp)^\perp = U$, di nuovo per la Proposizione 1.7.3, poiché $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Supponiamo ora che B è una forma bilineare invariante simmetrica (non necessariamente non singolare) su un $\mathfrak{g}$-modulo V, ove $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie. Allora

Proposizione 1.7.4. *Se $U \subset V$ è un $\mathfrak{g}$-sottomodulo anche $U^\perp$ lo è. In particolare, $V^\perp = rad\ B$ è un $\mathfrak{g}$-sottomodulo.*

La dimostrazione è banale come quella del seguente corollario:

Corollario. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, B la sua forma di Killing. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, allora lo è anche $\mathfrak{a}^\perp$ (rispetto a B). In particolare, rad B è un ideale. Queste affermazioni restano vere, più in generale se B è sostituito da una qualunque traccia o da una forma bilineare simmetrica invariante su $\mathfrak{g}$.*

1.8 Ancora sulle rappresentazioni e sui moduli.
Questo paragrafo è dedicato a diverse costruzioni importanti di moduli che non abbiamo ancora discusso. Fissiamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Sia V un $\mathfrak{g}$-modulo e $U \subset V$ un sottomodulo. Allora V/U diventa un $\mathfrak{g}$-modulo in maniera naturale per mezzo dell'azione

$$x \cdot (v + U) = x \cdot v + U \tag{1.8.1}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, v \in V$. V/U si dice **modulo quoziente** di V tramite U, e la corrispondente rappresentazione si dice **rappresentazione quoziente** .

Siano U_1 e U_2 due $\mathfrak{g}$-moduli. Allora la somma diretta $U_1 \oplus U_2$ degli spazi vettoriali diventa un $\mathfrak{g}$-modulo in maniera naturale, denotato ancora $U_1 \oplus U_2$, ove l'azione è data da

$$x \cdot (u_1, u_2) = (x \cdot u_1, x \cdot u_2) \tag{1.8.2}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$. $U_1 \oplus U_2$ si dice **somma diretta** dei moduli U_1 e U_2, e la corrispondente rappresentazione si dice **somma diretta** delle due rappresentazioni. Abbiamo anche una nozione di somma diretta di un numero finito di moduli ed useremo la notazione $\coprod_{i=1}^n$ per esprimerla. Quei lettori che conoscono la teoria delle categorie dovrebbero dimostrare che $\coprod_{i=1}^n U_i$ è sia somma diretta che prodotto diretto dei $\mathfrak{g}$-moduli U_i, nella categoria dei $\mathfrak{g}$-moduli.

Osservazione 1.8.1. Per certi aspetti, la teoria dei moduli è più semplice della teoria delle algebre di Lie. Per esempio, se V è un modulo e U un sottomodulo, nessuna condizione ulteriore è richiesta affinché V/U sia un modulo in maniera naturale. Ma nel caso delle algebre di Lie, "sottoalgebra" non è sufficiente ed occorre "ideale". Inoltre, non c'è alcuna distinzione tra somma diretta e semidiretta di moduli, mentre c'è un'importante distinzione tra prodotti diretti e semidiretti di algebre di Lie. Si veda tuttavia l'Osservazione seguente.

Se $0 \to U \to V \xrightarrow{\sigma} V/U \to 0$ è una successione esatta di $\mathfrak{g}$-moduli, la successione si può fattorizzare oppure no, cioè può esistere oppure no un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli $\tau : V/U \to V$ tale che $\sigma \circ \tau = 1$ su V/U. La successione si fattorizza se e solo se U ha un sottomodulo complementare in V; in tal caso, V è isomorfo alla somma diretta di U e del sottomodulo complementare.

Si osservi che se V è un $\mathfrak{g}$-modulo che ammette una bandiera invariante

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0, \tag{1.8.3}$$

allora V dà luogo a n caratteri di $\mathfrak{g}$: le rappresentazioni di $\mathfrak{g}$ sugli spazi unidimensionali $V_i/V_{i+1} (i = 0, \ldots, n-1)$. Si osservi inoltre che la bandiera è fortemente invariante se e solo se questi caratteri sono tutti nulli. In generale, gli n caratteri sono i coefficienti sulla diagonale di una realizzazione matriciale della rappresentazione rispetto ad una base che la supporta. Ma anche se *dim* $V = 2$ e $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 = 0$ è una bandiera fortemente invariante, la successione esatta

$$0 \to V_1 \to V \to V/V_1 \to 0 \tag{1.8.4}$$

può non fattorizzarsi. Per esempio, sia $\mathfrak{g} = \kappa$ e $1 \in \kappa$ agisca su V tramite un endomorfismo che ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8.5}$$

È chiaro che lo spazio generato dal primo vettore della base (che è $\mathfrak{g}$-invariante) non possiede un complemento $\mathfrak{g}$-invariante.

Osservazione 1.8.2. Questo è un aspetto della teoria dei moduli che è più delicato del corrispondente aspetto della teoria delle algebre di Lie; (v. l'Osservazione precedente e la Proposizione 1.4.4).

Se V è un $\mathfrak{g}$-modulo, allora per ogni sottomodulo U di V la successione $0 \to U \to V \to V/U \to 0$ si fattorizza se e solo se ogni sottomodulo di V ha un sottomodulo complementare. Questa è una proprietà importantissima di un modulo V, e in seguito vedremo che ogni $\mathfrak{g}$-modulo V ha questa proprietà se e solo se $\mathfrak{g}$ è semisemplice (quando $char\ \kappa = 0$). A questo punto osserveremo che questa proprietà di un modulo V ha due altre caratterizzazioni importanti.

Definizione 1.8.1. Un $\mathfrak{g}$-modulo V si dice **semisemplice** oppure **completamente riducibile** se è somma diretta di sottomoduli semplici. (Qui consideriamo ammissibile anche la somma vuota in modo che $\{0\}$ sia considerato un modulo semisemplice).

Proposizione 1.8.1. *Sia V un $\mathfrak{g}$-modulo. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(i) V è semisemplice.
(ii) V è somma (non necessariamente diretta) di sottomoduli semplici.
(iii) Ogni sottomodulo di V ha un sottomodulo complementare.

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii) è banale.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sia U_0 un sottomodulo di V. Se U_0 è proprio, si scelga un sottomodulo semplice V_1 non contenuto in U_0. Poniamo $U_1 = U_0 + V_1$. Allora questa somma è diretta poiché V_1 è semplice. Analogamente si definisca V_i e U_i induttivamente fino ad arrivare a j tale che $U_j = V$. Allora $V_1 + \ldots + V_j$ è un complemento di U_0.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Si scelga un sottomodulo non nullo V_1 di V di dimensione minimale. Allora V_1 è chiaramente semplice. Ora si prenda un complemento U_1 di V_1 per (3). Dentro U_1 si scelga un sottomodulo semplice V_2 come prima. Analogamente si prenda un sottomodulo semplice di un complemento di $V_1 \oplus V_2$. Continuiamo fino ad esaurire V. Al passo j-esimo, diciamo, V è somma diretta dei sottomoduli semplici $V_1, \ldots, V_j$. $\square$

Se V e W sono $\mathfrak{g}$-moduli, allora il duale V^* diventa un $\mathfrak{g}$-modulo in maniera naturale, come pure $Hom\ (V, W)$ e $V \otimes W$. Risulterà che ci sono relazioni interessanti tra questi concetti. Prima trattiamo il duale.

Sia V il $\mathfrak{g}$-modulo. Definiamo un'azione di $\mathfrak{g}$ su V^* con

$$\langle x \cdot v^*, v\rangle = -\langle v^*, x \cdot v\rangle \tag{1.8.6}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, v^* \in V^*$ e $v \in V$. È facile verificare che questa azione è ben definita e che rende V^* un $\mathfrak{g}$-modulo. V^* si dice il $\mathfrak{g}$-modulo **contragradiente** di V, e la stessa parola è usata per la rappresentazione corrispondente. Si osservi che se π indica la rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su V e π^* la rappresentazione contragradiente, allora per ogni $x \in \mathfrak{g}, \pi^*(x) = -\pi(x)^t$ (ove t indica la trasposta o l'aggiunta).

Esiste una maniera interessante di motivare la definizione di modulo contragradiente. Supponiamo di tentare di dare una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su V^* usando la formula data in precedenza senza il segno meno. Cioè supponiamo di tentare la definizione "naturale" $\pi^*(x) = \pi(x)^t$ per ogni $x \in V$.

Allora risulterebbe (come si verifica facilmente) che π^* non sarebbe una rappresentazione ma soddisferebbe invece l'identità

$$\pi^*[x, y] = [\pi^*(y), \pi^*(x)] \tag{1.8.7}$$

per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$, cioè π^* sarebbe una **antirappresentazione** di $\mathfrak{g}$. Si può usare questa procedura in grande generalità per definire una stuttura di antirappresentazione sul duale di ogni modulo per un'algebra non necessariamente associativa, per un gruppo, etc. In quali circostanze possiamo fare dell'azione duale una vera rappresentazione? La risposta ragionevole è che possiamo comporre π^* con un **antiautomorfismo** dell'algebra, del gruppo, etc, se ne esistono, per ottenere una rappresentazione; per un'algebra $\mathfrak{g}$, un antiautomorfismo è un automorfismo lineare $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tale che $A[x,y] = [A(y), A(x)]$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. Un'algebra di Lie possiede in effetti un antiautomorfismo particolarmente naturale: l'applicazione che porta ogni ogni elemento al suo negativo. Usando questa otteniamo la definizione precedente del $\mathfrak{g}$-modulo contragradiente V^*. (Incidentalmente, anche un gruppo ha un antiautomorfismo naturale: l'applicazione che manda un elemento nel suo inverso. Otteniamo dunque la definzione standard del contragradiente di un modulo V per un gruppo G: per ogni $g \in G$, definiamo $\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^t$; qui π è la rappresentazione di G su V e π^* è l'azione di G su V^*. Questi due antiautomorfismi si corrispondono tramite la corrispondenza Gruppi di Lie – Algebre di Lie).

Siano ora V e W due $\mathfrak{g}$-moduli. Per dimostrare che $V \otimes W$ e $Hom\ (V, W)$ possono essere dotati di struttura di $\mathfrak{g}$-moduli, dimostriamo il seguente utile lemma:

LEMMA 1.8.2. *Siano π_1 e π_2 due rappresentazioni di $\mathfrak{g}$ su uno spazio vettoriale U. Se $\pi_1(\mathfrak{g})$ e $\pi_2(\mathfrak{g})$ commutano elemento per elemento, allora $\pi_1 + \pi_2$ è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ su U.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in \mathfrak{g}$. Allora

$$\begin{aligned}(\pi_1 + \pi_2)[x, y] &= \pi_1[x, y] + \pi_2[x, y] \\ &= \pi_1(x)\pi_1(y) - \pi_1(y)\pi_1(x) + \\ &+ \pi_2(x)\pi_2(y) - \pi_2(y)\pi_2(x) \\ &= (\pi_1 + \pi_2)(x)(\pi_1 + \pi_2)(y) - \\ &- (\pi_1 + \pi_2)(y)(\pi_1 + \pi_2)(x) \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

poiché i termini misti si cancellano a causa dell'ipotesi di commutatività. □

Definamo ora una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su $V \otimes W$ con la condizione

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w \tag{1.8.9}$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, v \in V$ e $w \in W$. Questa è ben definita per via della proprietà universale del prodotto tensoriale; rimane da dimostare che essa definisce una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo. Ma la condizione

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w \tag{1.8.10}$$

definisce chiaramente una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo, come pure la condizione

$$x \cdot (v \otimes w) = v \otimes x \cdot w. \tag{1.8.11}$$

Poiché le due rappresentazioni corrispondenti commutano elemento per elemento, il Lemma 1.8.2 implica che (1.8.9) definisce una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo. $V \otimes W$ è detta **prodotto tensoriale** dei $\mathfrak{g}$-moduli V e W; analogamente per le corrispondenti rappresentazioni.

In modo simile possiamo trattare $Hom\ (V, W)$: Definiamo un'azione di $\mathfrak{g}$ su $Hom\ (V, W)$ con

$$x \cdot \alpha = \pi_W(x)\alpha - \alpha\pi_V(x), \tag{1.8.12}$$

ove π_V e π_W indicano le rappresentazioni di $\mathfrak{g}$ su V e W, e ove $x \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in Hom\ (V, W)$. Come sopra, (1.8.12) esprime l'azione di x come somma di due azioni date da $\alpha \mapsto \pi_W(x)\alpha$ e $\alpha \mapsto -\alpha\pi_V(x)$. Le corrispondenti rappresentazioni di $\mathfrak{g}$ commutano elemento per elemento. Dunque, di nuovo per il Lemma 1.8.2, (1.8.12) definisce una rappresentazione di $\mathfrak{g}$. Il $\mathfrak{g}$-modulo risultante si indica con $Hom\ (V, W)$.

La somiglianza tra $V \otimes W$ e $Hom\ (V, W)$ è qualcosa di più di una coincidenza. Infatti, $Hom\ (V, W)$ è isomorfo in maniera canonica a $V^* \otimes W$ come spazio vettoriale. La corrispondenza è data assegnando a $v^* \otimes w$ ($v^* \in V^*, w \in W$) l'omomorfismo da V a W che porta $v \in V$ in $\langle v^*, w\rangle w$. Possiamo descrivere questo fatto come segue:

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\to Hom\ (V, W) \\ v^* \otimes w &\mapsto (v \mapsto \langle v^*, v\rangle w). \end{aligned} \tag{1.8.13}$$

PROPOSIZIONE 1.8.3. *L'isomorfismo canonico*

$$i : V^* \otimes W \to Hom\ (V, W) \tag{1.8.14}$$

è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli.

DIMOSTRAZIONE. Sia $v^* \in V^*, w \in W, v \in V$ e $x \in \mathfrak{g}$. Allora

$$\begin{aligned} &i(x \cdot (v^* \otimes w))(v) = i(x \cdot v^* \otimes w + v^* \otimes x \cdot w)(v) \\ &= \langle x \cdot v^*, v\rangle w + \langle v^*, v\rangle x \cdot v \\ &= -\langle v^*, x \cdot v\rangle w + x \cdot (\langle v^*, v\rangle w) \\ &= (x \cdot i(v^* \otimes w))(v). \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

□

Ora consideriamo $V^* \otimes V^*$. Notiamo dapprima che questo è linearmente isomorfo allo spazio delle forme bilineari su V. L'isomorfismo naturale porta $v^* \otimes w^*$ ($v^*, w^* \in V^*$) nella forma bilineare che manda la coppia $(v, w) \in V \times V$ in $\langle v^*, v\rangle\langle w^*, w\rangle$. Come sopra ci prendiamo la libertà di scrivere

$$\begin{aligned} V^* \otimes V^* &\to Bil\ (V) \\ v^* \otimes w^* &\mapsto ((v, w) \mapsto \langle v^*, v\rangle\langle w^*, w\rangle), \end{aligned} \tag{1.8.16}$$

ove $Bil\ (V)$ indica lo spazio delle forme bilineari su V. Chiamiamo j questo isomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.8.4. *Esiste un'unica struttura di $\mathfrak{g}$-modulo su $Bil\ (V)$ che rende j un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli. Essa è data come segue: per ogni $B \in Bil\ (V), x \in \mathfrak{g}$ e $v, w \in V$,*

$$(x \cdot B)(v, w) = -B(x \cdot v, w) - B(v, x \cdot w). \tag{1.8.17}$$

DIMOSTRAZIONE. L'unica cosa da dimostrare è la seconda affermazione, e per fare ciò è sufficiente dimostrarla quando B ha la forma speciale $j(v^* \otimes w^*)$ ($v^*, w^* \in V^*$), per linearità. Abbiamo

$$\begin{aligned} &(x \cdot (j(v^* \otimes w^*)))(v, w) = (j \cdot (x \cdot (v^* \otimes w^*)))(v, w) \\ &= \langle x \cdot v^*, v\rangle\langle w^*, w\rangle + \\ &+ \langle v^*, v\rangle\langle x \cdot w^*, w\rangle + \\ &= -\langle v^*, x \cdot v\rangle\langle w^*, w\rangle - \\ &- \langle v^*, v\rangle\langle w^*, x \cdot w\rangle \\ &= -(j(v^* \otimes w^*))(x \cdot v, w) - \\ &- (j(v^* \otimes w^*))(v, x \cdot w). \end{aligned} \tag{1.8.18}$$

□

Naturalmente, avremmo potuto definire prima una struttura di $\mathfrak{g}$-modulo sullo spazio delle applicazioni bilineari da $V \times W$ in κ con una formula analoga a quella delle Proposizione 1.8.4 (usando il Lemma 1.8.2 per dimostrare che l'azione definisce una rappresentazione), e poi dimostrare che la struttura di modulo è equivalente a quella di $V^* \times W^*$, nello spirito della Proposizione 1.8.3.

Dato il $\mathfrak{g}$-modulo V, abbiamo il seguente diagramma di $\mathfrak{g}$-moduli e $\mathfrak{g}$-applicazioni:

$$\begin{tikzcd} V^* \otimes V^* \arrow[r, "j"] & Bil\ (V) \arrow[d, "h"] \\ & Hom\ (V, V^*) \end{tikzcd}$$

Qui h è l'isomorfismo lineare dato in 1.7, che porta B nella applicazione ϕ definita da $\langle \phi(v), w \rangle = B(v, w)$ $(v, w \in V)$.

PROPOSIZIONE 1.8.5. *Il diagramma precedente è un diagramma commutativo di* $\mathfrak{g}$-*isomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Le Proposizioni 1.8.3 e 1.8.4 implicano che i e j sono isomorfismi di $\mathfrak{g}$-moduli. È facile vedere che h rende il diagramma commutativo, cosicché h è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli. Ma è anche facile vedere direttamente che h è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli. Infatti, per $B \in Bil\ (V), x \in \mathfrak{g}$ e $v, w \in V$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle h(x \cdot B)(v), w \rangle &= (x \cdot B)(v, w) \\ &= -B(x \cdot v, w) - B(v, x \cdot w) \\ &= -\langle h(B)(x \cdot v), w \rangle - \\ &- \langle h(B)(v), x \cdot w \rangle \\ &= -\langle h(B)(x \cdot v), w \rangle + \\ &+ \langle x \cdot (h(B)(v)), w \rangle \\ &= \langle (x \cdot (h(B)))(v), w \rangle, \end{aligned} \tag{1.8.20}$$

cosicché

$$h(x \cdot B) = x \cdot (h(B)). \tag{1.8.21}$$

□

La prossima definizione getterà nuova luce su un vecchio concetto:

DEFINIZIONE 1.8.2. L'insieme degli **invarianti** nel $\mathfrak{g}$-modulo U è l'insieme $\{u \in U | x \cdot u = 0 \ \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$. Si indica con $U^{\mathfrak{g}}$.

Osserviamo che $U^{\mathfrak{g}}$ è il $\mathfrak{g}$-sottomodulo di U che consiste degli elementi annullati da $\mathfrak{g}$. Nella corrispondenza Gruppi di Lie – Algebre di Lie corrisponde all'insieme degli elementi fissati da un gruppo di Lie.

PROPOSIZIONE 1.8.6. *$Hom\ (V, W)^{\mathfrak{g}}$ è precisamente l'insieme delle applicazioni di $\mathfrak{g}$-moduli da V a W. $Bil\ (V)^{\mathfrak{g}}$ è precisamente l'insieme delle forme bilineari $\mathfrak{g}$-invarianti su V. Con le notazioni della Proposizione 1.8.5, possiamo dire che h è un isomorfismo dall'insieme delle forme bilineari $\mathfrak{g}$-invarianti su V all'insieme delle applicazioni di $\mathfrak{g}$-moduli da V a V^*. In particolare, se V ammette una forma bilineare invariante non singolare, allora V e V^* sono isomorfi come $\mathfrak{g}$-moduli.*

In tal modo diverse idee sono messe in relazione tramite il concetto di invariante di un $\mathfrak{g}$-modulo. La dimostrazione della Proposizione 1.8.6 è ovvia.

OSSERVAZIONE 1.8.3. L'ultima affermazione della Proposizione 1.8.6 implica che se $\mathfrak{g}$ ammette una forma bilineare invariante non singolare, per esempio la forma di Killing, allora la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è isomorfa alla sua rappresentazione contragradiente - detta rappresentazione **coaggiunta** - su $\mathfrak{g}$.

1.9 Ampliamenti di campi.

Sarà spesso importante lavorare su un campo algebricamente chiuso, o almeno un campo in cui certi operatori abbiano abbastanza autovalori. Ma la tecnica di ampliamento o estensione di campo ci permetterà spesso di trasportare i risultati dal caso di un campo algebricamente chiuso al caso non algebricamente chiuso. In questo paragrafo, riassumeremo i fatti salienti sugli ammpliamenti di campi di cui avremo bisogno. I dettagli omessi saranno facilmente forniti dal lettore.

Sia K una fissata estensione di campo di κ, e sia V uno spazio vettoriale su κ. Allora $K \otimes_\kappa V$ diventa uno spazio vettoriale su K in maniera naturale; K agisce come moltiplicazione sul primo fattore del prodotto tensoriale. Denotiamo questo K-spazio con V_K, e lo chiamiamo la K-estensione di V. Allora V può essere identificato con il κ-sottospazio $1 \otimes V$ di V_K, ed una qualunque κ-base di V è una K-base di V_K. Se $U \subset V$ è un κ-sottospazio, allora il K-sottospazio di V_K generato da U è isomorfo in modo naturale a $K \otimes U = U_K$ e $U_K \cap V = U$.

Se W è un altro κ-spazio vettoriale, allora ogni applicazione κ-lineare da V a W si estende univocamente ad una applicazione K-lineare da V_K a W_K. Infatti, $(Hom_\kappa\ (V,W))_K \simeq Hom_K\ (V_K, W_K)$ in modo naturale, e con questa identificazione, $Hom_\kappa\ (V,W) = \{\alpha \in Hom_K(V_K, W_K) | \alpha(V) \subset W\}$. Se $\alpha \in Hom_\kappa(V,W)$, allora il nucleo e l'immagine dell'estensione di α ad un elemento di $Hom_K\ (V_K, W_K)$ sono le estensioni del nucleo e dell'immagine di α, cosicché α è iniettiva (risp. suriettiva) se e solo se la sua estensione è iniettiva (risp. suriettiva). Se $V = W$, allora la traccia dell'estensione di α è uguale alla traccia di α.

Ogni forma κ-bilineare B su uno spazio vettoriale V si estende univocamente ad una forma K-bilineare su V_K, ed infatti $(Bil_\kappa\ (V))_K \simeq Bil_K\ (V_K)$ in modo naturale. Con questa identificazione, $Bil_\kappa\ (V) = \{B \in Bil_K\ (V_K) | B(V,V) \subset \kappa\}$. Se $B \in Bil_\kappa\ (V)$ allora B è simmetrica o non singolare se e solo se lo è la sua estensione, ed infatti il radicale dell'estensione è l'estensione di $rad\ B$. Più in generale, $(U_K)^\perp = (U^\perp)_K$ per un qualunque κ-sottospazio U di V.

Ora supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra su κ. Allora $\mathfrak{g}_K$ ha una naturale struttura di algebra su K. Se $\mathfrak{g}$ è di Lie (risp. associativa) allora $\mathfrak{g}_K$ è di Lie (risp. associativa). Inoltre, κ-omomorfismi di algebre su κ si estendono a K-omomorfismi delle algebre estese. Se $\mathfrak{g}$ è un'algebra associativa o di Lie su κ e $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ è una rappresentazione (V un κ-spazio vettoriale), allora π si estende ad una rappresentazione di $\mathfrak{g}_K$ su V_K.

Supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia un'algebra di Lie su κ, cosicché $\mathfrak{g}_K$ è un'algebra di Lie su K. Allora per ogni sottoalgebra $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_K$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}_K$, e analogamente per gli ideali. Si ha anche $(Cent\ \mathfrak{g})_K = Cent \mathfrak{g}_K$. Inoltre, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_K = [\mathfrak{g}_K, \mathfrak{g}_K]$. Più in generale, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono sottospazi di $\mathfrak{g}$, allora $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]_K = [\mathfrak{a}_K, \mathfrak{b}_K]$. In particolare, $(\mathfrak{g}_i)_K = (\mathfrak{g}_K)_i$ e $(\mathfrak{g}^i)_K = (\mathfrak{g}_K)^i$ per ogni $i = 0,1,2,\ldots$, cosicché $\mathfrak{g}$ è risolubile (risp. nilpotente, abeliana) se e solo se $\mathfrak{g}_K$ è risolubile (risp. nilpotente, abeliana). La forma di Killing di $\mathfrak{g}_K$ è l'estensione della forma di Killing di $\mathfrak{g}$. In particolare, in vista dei commenti precedenti sulle forme bilineari, la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ è non singolare se e solo se lo stesso è vero della forma di Killing di $\mathfrak{g}_K$. Commenti analoghi valgono per le tracce.

Quando $\kappa = \mathbf{R}$ e $K = \mathbf{C}$, il procedimento di estensione di campo è detta **complessificazione** di uno spazio vettoriale, algebra di Lie, modulo, etc.

Gli endomorfismi tendono a guadagnare autovalori quando il campo è esteso. Per esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9.1}$$

non ha autovalori su $\mathbf{R}$, ma quando il campo è esteso a $\mathbf{C}$, la matrice ha autovalori $\pm i$. In generale, tutti gli autovalori di una matrice data (o di un endomorfismo) su di un campo sono nel campo se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico sono nel campo. Se ciò non accade, allora possiamo estendere il campo ad un campo (come la chiusura algebrica) che comprende tutte le radici del polinomio caratteristico, cosicché tutti gli autovalori sono nel nuovo campo. Se λ è un autovalore nel campo vecchio e U è l'autospazio corrispondente, allora l'estensione di U è l'autospazio di λ rispetto al nuovo campo.

Strutture non isomorfe a volte si uniscono quando il campo è esteso. Per esempio, si può verificare (Esercizio) che le algebre di Lie negli Esempi **3.** e **4.** di 1.1 sono non isomorfe su $\mathbf{R}$ ma isomorfe su $\mathbf{C}$.

I commenti precedenti dovrebbero fornire al lettore sufficienti informazioni da permettergli di estendere campi ove necessario mentre procede tra questi appunti.

Teoria elementare delle algebre di Lie

Parte Seconda. Struttura e Teoria delle Rappresentazioni

2.0 Alcuni richiami preliminari di algebra lineare. Seguiamo in parte la trattazione di [Herstein]. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo κ e sia $End\ V$ l'algebra associativa di tutti gli endomorfismi di V come spazio vettoriale.

PROPOSIZIONE 2.0.1. *Per ogni elemento T di $End\ V$ esite un polinomio $q(x)$ a coefficienti in κ di grado minore o uguale a n^2 tale che $p(T) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, se I è l'unità di $End\ V$, si considerino gli elementi

$$I, T, T^2, \ldots, T^{n^2}$$

in $End\ V$. Questi sono $n^2 + 1$ elementi in uno spazio di dimensione n^2. Dunque esistono $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2} \in \kappa$ non tutti nulli tali che $\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0$ e cioè T soddisfa l'equazione algebrica non banale $q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n^2} x^{n^2} = 0$ di grado $\leq n^2$ in $\kappa[x]$. □

L'insieme dei polinomi che ammettono il dato endomorfismo T come soluzione costituiscono un ideale di $\kappa[x]$. Poichè $\kappa[x]$ è un dominio ad ideali principali allora questo ideale possiede un generatore monico $p(x)$ che chiameremo **polinomio minimo** di T.

TEOREMA 2.0.2. *$T \in End\ V$ è invertibile se e solo se il termine costante del polinomio minimo è non nullo; inoltre se T è invertibile T^{-1} è un'espressione polinomiale in T.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = 0$, $\alpha_k \neq 0$, il polinomio minimo di T su κ. Se $\alpha_0 \neq 0$, dato che $0 = p(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_k T^k$ si ottiene

$$\begin{aligned} 1 &= T(-\frac{1}{\alpha_o}(\alpha_1 + \alpha_2 a + \cdots + \alpha_k T^{k-1})) = \\ &= (-\frac{1}{\alpha_o}(\alpha_k T^{k-1} + \cdots + \alpha_1))T \end{aligned}$$

pertanto T è invertibile e T^{-1} è un polinomio in T. Si supponga viceversa che T sia invertibile ma che $\alpha_0 = 0$. Allora

$$0 = \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_k T^k = (\alpha_1 + \alpha_2 T + \cdots + \alpha_k T^{k-1})T$$

Moltiplicando a destra per T^{-1} si ha che

$$\alpha_1 + \alpha_2 T + \cdots + \alpha_k T^{k-1} = 0$$

contraddicendo la minimalità di $p(x)$. □

COROLLARIO 2.0.3. *Se T è singolare allora esiste $S \neq 0$ in $End\ V$ tale che $ST = TS = 0$.*

DIM. Se T è singolare allora $\alpha_0 = 0$ e dunque se $S = \alpha_1 + \cdots \alpha_k T^{k-1}$ abbiamo $S \neq 0$ (non può essere 0 perché ha grado minore del polinomio minimo di T) ed inoltre $ST = TS = 0$. □

Corollario 2.0.4. *Se T è invertibile a destra allora T è invertibile.*

Dim. Infatti, per ipotesi $TU = 1$. Se T fosse singolare per il Corollario avremmo $S \neq 0$ tale che $ST = 0$ ma allora

$$\begin{aligned} S(TU) &= S \cdot 1 \\ 0 \cdot U &= S \\ 0 &= S \end{aligned}$$

che non è possibile. Dunque T è regolare. □

Teorema 2.0.5. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *$T \in End\ V$ è singolare;*
(2) *esiste $v \neq 0$ in V tale che $Tv = 0$;*
(3) *T è suriettivo.*

Dim. È ben noto che T è invertibile se e solo se T è iniettiva, e questo a sua volta è vero se e solo se T è suriettiva. Inoltre T è iniettiva se e solo se il suo nucleo è zero. □

Quanto abbiamo appena visto ci permette di distinguere gli elementi regolari da quelli singolari, nel caso $dim\ V < +\infty$, confrontando la dimensione di $Im\ T$ con la dimensione di V. Anzi, ciò suggerisce di adoperare $dim\ Im\ T$ non solo come test di regolarità ma anche come una certa misura del grado di singolarità per un dato T. Infatti la dimensione di $Im\ T$ coincide con il rango di T, denotato $r(T)$. La seguente proposizione ci fornisce alcune importanti proprietà del rango.

Proposizione 2.0.6. *Se S e T sono endomorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita allora*

(1) $r(ST) \leq r(T)$
(2) $r(TS) \leq r(T)$
(3) $r(ST) = r(TS) = r(T)$ *se S è regolare in End V.*

Dim. (1): Supponiamo che $r(T) = m$ e che dunque $w_1, \dots, w_m$ sia una base di $T(V)$. Dunque $S(T(V)) = Im\ (ST)$ è generato da $Sw_1, \dots, Sw_m$ e quindi ha dimensione $\leq m$.

(2): $S(V) \subset V$ e $T(S(V)) \subset TV$ e quindi $dim\ TS(V) \leq dim\ TV$ ossia $r(TS) \leq r(T)$.

(3): Se S è invertibile allora $S(V) = V$ e quindi $T(S(V)) = TV$ e dunque $r(TS) = r(T)$. D'altro canto, se $T(V)$ ha base $w_1, \dots, w_m$, poiché S è invertibile anche $Sw_1, \dots, Sw_m$ sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di $Im\ (ST)$. Quindi $m = r(T) = r(ST)$. □

Corollario 2.0.7. *Nelle stesse ipotesi abbiamo che se S è regolare allora $r(T) = r(STS^{-1})$*

Dimostrazione. Applichiamo la parte (3) della Proposizione a S e TS^{-1}, abbiamo

$$r(S(TS^{-1})) = r((TS^{-1})S) = r(T)$$

□

Ricordiamo che $\lambda \in \kappa$ si dice radice caratteristica o autovalore di T se $\lambda - T$ è singolare ovvero se e solo se esiste $v \neq 0$ tale che $Tv = \lambda v$. Il vettore v si dice allora autovettore di T relativo a λ.

LEMMA 2.0.8. *Se λ è un autovalore di T e $q(x)$ è un polinomio, $q(\lambda)$ è un autovalore di $q(T)$.*

DIM. Se λ è autovalore di T, sia $v \neq 0$ tale che $Tv = \lambda v$; allora $T^2 v = \lambda^2 v$, etc., $T^k v = \lambda^k v$. Allora se $q(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \cdots \alpha_m$, abbiamo $q(T) = \alpha_0 T^m + \alpha_1 T^{m-1} + \cdots \alpha_m$ e dunque

$$q(T)v = \alpha_0 T^m v + \alpha_1 T^{m-1} v + \cdots \alpha_m v = (\alpha_0 \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_m)v$$

come richiesto. $\square$

Questo Lemma implica immediatamente come suo caso particolare:

TEOREMA 2.0.9. *Se λ è autovalore di T allora λ è radice del polinomio minimo e dunque T ha solo un numero finito di autovalori.*

DIM. Infatti applicando il Lemma nel caso in cui $q(x)$ è proprio il polinomio minimo abbiamo che $q(T) = 0$ e quindi, se v è opportuno, $0 = q(T)v = q(\lambda)v$ il che implica $q(\lambda) = 0$ (poiché $v \neq 0$). $\square$

LEMMA 2.0.10. *Se $T, S \in$ End V e S è regolare allora T e $S^{-1}TS$ hanno lo stesso polinomio minimo*

DIM. Osserviamo preliminarmente che $(S^{-1}TS)^k = S^{-1}T^kS$, $k \geq 1$ e quindi $q(S^{-1}TS) = S^{-1}q(T)S$ cosicché se $q(T) = 0$ anche $q(S^{-1}TS) = 0$. Se dunque $p(x)$ è il polinomio minimo di T esso è anche il polinomio minimo di $S^{-1}TS$. $\square$

TEOREMA 2.0.11. *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di T e $v_1, \ldots, v_k$ sono degli autovettori relativi rispettivamente a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

DIM. Supponiamo $k > 1$ altrimenti non c'è niente da dimostrare. Supponiamo per assurdo che $v_1, \ldots, v_k$ siano linearmente dipendenti e sia $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$ una loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli. Tra tutte le possibili relazioni di questo tipo ce n'è una che ha il minor numero di coefficienti non tutti nulli. Con un opportuno ordinamento dei vettori possiamo assumere che sia $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_j v_j$. Applichiamo T e otteniamo:

$$\lambda_1 \beta_1 v_1 + \cdots + \lambda_j \beta_j v_j = 0$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\lambda_1(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_j v_j) = 0$$

e sottraendo:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_2 v_2 + \cdots + (\lambda_j - \lambda_1)\beta_j v_j = 0$$

abbiamo una relazione in cui, essendo $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ e $\beta_i \neq 0$, tutti i coefficienti sono non nulli ma è più corta di quella che si supponeva la più corta. Questa contraddizione dimostra il teorema. $\square$

COROLLARIO 2.0.12. *Se dim $V = n$ allora T può avere al massimo n autovalori*

DIM. Ovvio dal Teorema precedente. $\square$

COROLLARIO 2.0.13. *Se dim* $V = n$ *e se* T *ha* n *autovalori distinti allora esiste una base di autovettori di* V.

Fissiamo ora una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V. L'azione di un endomorfismo $T \in End\ V$ è determinata dall'azione sui vettori v_i. La matrice $m(T)$ di T nella base data è la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori Tv_j nella base scelta. Al variare della base varia la matrice $m(T)$. È naturale porsi il problema di trovare una matrice che abbia una forma per qualche verso più semplice. Per esempio, nel caso in cui V abbia una base costituita da autovettori per T la matrice di T è diagonale. Si dimostra che l'insieme delle matrici $n \times n$ su κ è un'algebra associativa, $M_n(\kappa)$, ed è isomorfa a $End\ V$. Un particolare isomorfismo è dato fissando una base di V ed associando a $T \in End\ V$ la matrice $m(T)$.

Ricordiamo inoltre:

TEOREMA 2.0.14. *Se* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *e* $\{w_1, \dots, w_n\}$ *sono due basi di* V *e* $m_1(T)$ *e* $m_2(T)$ *sono le matrici di* T *rispetto alle due basi allora esiste una matrice invertibile* $C \in M_n(K)$ *tale che*

$$m_2(T) = C^{-1} m_1(T) C$$

Inoltre $C = m(S)$ *dove* S *è l'endomorfismo di* V *definito da* $Sv_i = w_i$. *Due matrici in questa relazione si dicono simili.*

DIM. $Tv_j = \sum \alpha_{ij} v_i$ e $Tw_j = \sum \beta_{ij} w_i$. Sia $Sv_i = w_i$, dunque $Tw_j = \sum \beta_{ij} w_i = \sum \beta_{ij} Sv_i$ ossia $TSv_j = \sum \beta_{ij} Sv_i = S \sum \beta_{ij} v_i$ ovvero $S^{-1}TSv_j = \sum \beta_{ij} v_i$ e dunque, per definizione di matrice,

$$m_1(S^{-1}TS) = (\beta_{ij}) = m_2(T)$$

□

Forme Canoniche. 1. Forma Triangolare

La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza. Si pone il problema di stabilire quand'è che due endomorfismi sono simili. L'idea è quella di individuare all'interno di ciascuna classe di equivalenza un elemento di tipo particolare e un procedimento per passare da un elemento qualunque della classe a questo elemento particolare, che chiameremo forma canonica. Dopodiché per stabilire se due endomorfismi sono simili basta calcolare di ciascuna la forma canonica e vedere se coincidono. Ci sono diversi modi di stabilire una forma canonica. La prima che esaminiamo è la forma triangolare.

LEMMA 2.0.15. *Se* $W \subset V$ *è invariante per* T *(cioè* $TW \subset W$*) allora* T *induce un endomorfismo* $\bar{T}$ *su* V/W *definita da* $T(v+W) = Tv + W$. *Inoltre se* T *soddisfa il polinomio* $q(x)$ *anche* $\bar{T}$ *lo soddisfa, e il polinomio minimo di* $\bar{T}$ *è un divisore di quello di* T.

DIM. La prima parte della dimostrazione è facile. Per la seconda parte, osserviamo che $(\bar{T^2}) = (\bar{T})^2$. Infatti se $\bar{v} = v + W$, $\bar{T^2}(v+W) = T^2 + W = T(Tv) + W = \bar{T}(Tv + W) = \bar{T}^2(v+W)$ e in maniera analoga

$$\bar{T^k} = (\bar{T})^k$$

per ogni $k \geq 0$, e quindi per ogni polinomio $q(\bar{T}) = q(\bar{T})$. Dunque se $q(T) = 0$ allora $q(\bar{T}) = \bar{0}$ (endomorfismo nullo su $\bar{V} = V/W$) e $q(\bar{T}) = 0$. In particolare, $\bar{T}$ soddisfa il polinomio minimo di T e dunque, per definizione, il polinomio minimo di $\bar{T}$ divide quello di T. □

Osserviamo che la matrice di T è triangolare superiore se, nella base $\{v_1, \dots, v_n\}$ Tv_i è combinazione lineare solo di v_i e dei vettori precedenti della base. Chiameremo **split**[6] un endomorfismo che ha tutti gli autovalori in κ.

[6]Per mancanza di una migliore terminologia italiana. Non ho trovato né *fattorizzabile* né *scisso* come valide alternative.

Teorema 2.0.16. *Se T è split allora esiste una base di V nella quale la matrice di T è triangolare.*

Dim. La dimostrazione si fa per induzione su *dim* V. □

Equivalentemente abbiamo:

Teorema 2.0.17. *Se $A \in M_n(K)$ ha tutte le radici caratteristiche in K, esiste una matrice $C \in M_n(K)$ tale che $C^{-1}AC$ è una matrice triangolare.*

Osservazione 2.0.1. Poiché gli autovalori di una matrice triangolare sono esattamente gli elementi sulla diagonale, risulta banalmente vero anche il viceversa dei due teoremi appena enunciati, cioè: T è split se e solo se T è triangolarizzabile.

Teorema 2.0.18. *Se T è split allora T soddisfa un polinomio di grado n.*

Dim. Sappiamo che in queste ipotesi esiste una base di V tale che $Tv_1 = \lambda_1 v_1$, $Tv_2 = \alpha_{12}v_1 + \lambda_2 v_2$, $Tv_3 = \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2 + \lambda_3 v_3$, etc. Ovvero: $(T - \lambda_1)v_1 = 0$, $(T - \lambda_2)v_2 = \alpha_{12}v_1$, $(T - \lambda_3)v_3 = \alpha_{13}v_1 + \alpha_{23}v_2$, etc. Calcoliamo $(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)v_2 = (T - \lambda_1)(\alpha_{12}v_1) = 0$ inoltre $(T - \lambda_1)$ e $(T - \lambda_2)$ commutano e dunque $(T - \lambda_1)(T - \lambda_2)v_1 = 0$. Continuando in questo modo la matrice

$$S = (T - \lambda_n)(T - \lambda_{n-1}) \cdots (T - \lambda_1)$$

annulla tutti i vettori $v_1, \ldots, v_n$ che però sono vettori di una base. Di conseguenza $S = 0$. Quindi T soddisfa il polinomio

$$(x - \lambda_n)(x - \lambda_{n-1}) \cdots (x - \lambda_1)$$

di grado n. □

Nel caso in cui un endomorfismo non abbia tutte le sue radici caratteristiche nel campo K, (non sia split), possiamo ampliare il campo ad un nuovo campo F. In generale, F dovrà essere il campo di spezzamento del polinomio minimo di T su K.

Forme canoniche: endomorfismi nilpotenti

Definizione 2.0.1. Diremo **nilpotente** un endomorfismo T se esiste un intero $n \geq 0$ tale che $T^n = 0$.

Poiché gli autovalori di T^n sono le potenze n-esime degli autovalori di T, è facile vedere che un endomorfismo nilpotente ha tutti gli autovalori nulli. Allora possiamo senz'altro applicare quanto visto in precedenza e concludere che un endomorfismo nilpotente si può sempre mettere in forma triangolare. Ma possiamo dire molto di più.

Cominciamo con un lemma semplice ma importante.

Lemma 2.0.19. *Se $T \in End\ V$ e $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ con dim $V_i = n_i$ e ciascun V_i è $T-$invariante, allora esiste una base di V tale che la matrice di T ha la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}$$

con A_i matrice $n_i \times n_i$.

Dim. Basta prendere una base di V ottenuta mettendo insieme le basi di ciascun V_i. □

LEMMA 2.0.20. *Se T è nilpotente allora la matrice*

$$\alpha_0 + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m$$

$\alpha_i \in K$, è invertibile se $\alpha_0 \neq 0$.

DIM. Supponiamo che $T^r = 0$ allora $(\alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m)^r = 0$. Se chiamiamo $S = \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m$ e se $\alpha_0 \neq 0$ allora

$$(\alpha_0 + S)(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{S}{\alpha_0^2} + \frac{S^2}{\alpha_0^3} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{S^{r-1}}{\alpha_0^r}) = 1$$

e quindi $\alpha_0 + S = \alpha_0 + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_m T^m$ è invertibile. □

DEFINIZIONE 2.0.2. Se T è nilpotente, chiamiamo **indice di nilpotenza** il minimo intero k tale che $T^k = 0$.

DEFINIZIONE 2.0.3. Se t è un intero positivo denotiamo M_t la matrice $t \times t$ del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots 0 & 1 \\ 0 & & & \dots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 2.0.21. *Se T ha indice di nilpotenza n_1, esiste una base di V tale che la matrice di T ha la forma*

$$\begin{pmatrix} M_{n_1} & 0 \dots & 0 & \\ 0 & M_{n_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & M_{n_r} \end{pmatrix}$$

con $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$ e $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = dim\ V$

DIM. V. ad esempio [Herstein] p.320-322. □

Gli interi della r-pla $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ si dicono **invarianti di** T**.**

DEFINIZIONE 2.0.4. Se T è nilpotente, un sottospazio M di V invariante per T e di dimensione M si dice **ciclico rispetto a** T se

(1) $T^m M = (0), T^{m-1}M \neq (0)$
(2) Esiste $z \in M$ tale che $z, Tz, T^2 z, \ldots, T^{m-1}z$ è una base di M.

LEMMA 2.0.22. *In queste ipotesi, dim $T^k M = m - k$, $k \leq m$.*

DIM.. Infatti se $z, Tz, T^2 z, \ldots, T^{m-1}z$ costituiscono una base di M, allora

$$T^k z, T^{k+1}z, T^2 z, \ldots, T^{m-1}z$$

costituiscono una base di $T^k M$ e ci sono $m - k$ vettori. □

Si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA 2.0.23. *Due endomorfismi nilpotenti sono simili se e solo se hanno gli stessi invarianti.*

OSSERVAZIONE 2.0.2. Gli invarianti di T dànno una partizione di $dim\ V$. Viceversa, ogni partizione di $dim\ V$ dà degli invarianti per una qualche endomorfismo nilpotente. Dunque il numero di classi di similitudine distinte di matrici nilpotenti $n \times n$ è uguale al numero $p(n)$ delle partizioni di n.

Esercizio Dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è nilpotente e trovarne gli invarianti.

Forma di Jordan. Sia $T \in End\ V$, e sia V_1 un sottospazio di V invariante per T. Allora T induce un endomorfismo T_1 su V_1. Dato un polinomio $q(x) \in K[x]$, anche l'endomorfismo $q(T)$ induce un endomorfismo su V_1 ed esso è proprio $q(T_1)$. Quindi se $q(T) = 0$ (0 su V) anche $q(T_1) = 0$ (su V_1). In altre parole T_1 soddisfa qualunque polinomio sia soddisfatto da T. Cosa si può dire nella direzione opposta?

LEMMA 2.0.24. *Se V è somma diretta di due sottospazi $T-$invarianti, $V = V_1 \oplus V_2$, e T_1, T_2 sono le rispettive restrizioni di T, allora il polinomio minimo di T è il minimo comune multiplo tra $p_1(x)$ e $p_2(x)$, polinomi minimi di T_1 e T_2 rispettivamente.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto che se $p(x)$ è il polinomio minimo di T, anche $p_1(T)$ e $p_2(T)$ sono nulli e dunque $p_1(x)|p(x)$ e $p_2(x)|p(x)$. Ma allora anche $q(x) = m.c.m(p_1, p_2)$ divide $p(x)$. Per dimostrare che $p(x)$ è proprio il $m.c.m(p_1, p_2)$ osserviamo che se prendiamo $v_1 \in V_1$, abbiamo $q(T)v_1 = q(T_1)v_1 = 0$ perché $q(x)$ è un multiplo di $p_1(x)$. Analogamente, $q(T)v_2 = 0$ per $v_2 \in V_2$. Poiché qualsiasi $v \in V$ si scrive come $v = v_1 + v_2$ ne segue che $q(T)v = q(T)v_1 + q(T)v_2 = 0$. Pertanto $q(T) = 0$ e T soddisfa $q(x)$. Dunque $p(x)|q(x)$. In conclusione $p(x) = q(x)$. $\square$

COROLLARIO 2.0.25. *Se $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, V_i invariante per T, allora il polinomio minimo di T è il $m.c.m(p_1, \ldots, p_k)$, p_i polinomio minimo di $T_i = T|V_i$.*

TEOREMA 2.0.26. *Sia $T \in End\ V$ e $p(x)$ il suo polinomio minimo. Sia poi*

$$p(x) = q_1(x)^{l_1} q_2(x)^{l_2} \ldots q_k(x)^{l_k}$$

la fattorizzazione di $p(x)$ in fattori irriducibili. Per ciascun i consideriamo

$$V_i = \{v \in V | q_i(T)^{l_i} = 0\}$$

questi sono sottospazi T-invarianti di V. Risulta $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ e il polinomio minimo di T_i è $q_i(x)^{l_i}$.

DIM. Per semplificare le notazioni svolgiamo la dimostrazione nel caso $k = 2$. Consideriamo i polinomi $h_1(x) = q_2(x)^{l_2}$ e $h_2(x) = q_1(x)^{l_1}$. Chiaramente $h_i(T) \neq 0$ e dunque esiste $v \in V$ tale che $h_i(T)v = w \neq 0$. Ma $q_i(T)^{l_i} w = q_i(T)^{l_i} h_i(T)v = p(T)v = 0$ ossia $w \neq 0$ e $w_i \in V_i$ che quindi è un sottospazio non nullo. I polinomi h_1 e h_2 sono primi tra loro e quindi esistono dei polinomi a_1 e a_2 in $K[x]$ tali che $a_1(x)h_1(x) + a_2(x)h_2(x) = 1$ e quindi $a_1(T)h_1(T) + a_2(T)h_2(T) = Id$. Per cui $v = a_1(T)h_1(T)v + a_2(T)h_2(T)v$, per ogni $v \in V$ e se poniamo $a_i(T)h_i(T)v = v_i \in V_i$ abbiamo che $V = V_1 + V_2$. Verifichiamo ora che la somma è diretta. Per far ciò supponiamo che $u_1 + u_2 = 0$, $u_i \in V_i$ e mostriamo che ciò implica che $u_i = 0$. Se infatti ad esempio $u_i \neq 0$, applichiamo $h_1(T)$ abbiamo

$$h_1(T)u_1 + h_1(T)u_2 = h_1(T)(u_1 + u_2) = h_1(T)0 = 0$$

ma $h_1(T)u_2 = 0$ (per definizione di h_1 e di V_2) e quindi abbiamo $h_1(T)u_1 = 0$ ma essendo h_1 e q_1 primi tra loro:

$$0 = b_1(T)h_1(T)u_1 + b_2(T)q_1(T)u_1 = u_1$$

dunque $u_1 = 0$ contro l'ipotesi che $u_1 \neq 0$. Dunque la somma è diretta. Rimane da far vedere che il polinomio minimo di $T - i$ su V_i è $q(x)^{l_i}$. Per definizione di V_i, il polinomio minimo di T_i deve essere un divisore di $q_i(x)^{l_i}$ e quindi della forma $q_i(x)^{f_i}$, $f_i \leq l_i$.

Ma il polinomio minimo di T è il m.c.m. di $q_1(x)^{f_1} q_2(x)^{f_2}$ che è $q_1^{f_1} q_2^{f_2}$. Essendo il polinomio minimo proprio $q_1^{f_1} q_2^{f_2}$ dobbiamo avere $f_1 \geq l_1, f_2 \geq l_2$. Queste disuguaglianze unite a quelle ottenute in precedenza mostrano che $l_i = f_i$ e dunque la dimostrazione è completa. $\square$

Nel caso in cui T è split, tutti gli autovalori di T sono in κ, il polinomio minimo di T ha la forma

$$q(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} \cdots (x - \lambda_k)^{l_k}$$

λ_i autovalori.

Corollario 2.0.27. *Se T è split, si può scrivere*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

con $V_i = \{v \in V | (T - \lambda_i)^{l_i} v = 0\}$ dove T_i ha un solo autovalore λ_i.

Nella nostra ricerca di un elemento particolare nella classe di similitudine di T ovvero di una matrice di T dalla forma particolarmente semplice, per quanto visto, possiamo limitarci agli endomorfismi i cui polinomi minimi sono potenze di polinomi irriducibili. Supponiamo ora che T sia split.

Definizione 2.0.3. La matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots\lambda & 1 \\ 0 & & & \dots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

si dice **blocco di Jordan** relativo a λ

Teorema 2.0.28. *Sia $T \in End\ V$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, tutti appartenenti a K. Esiste una base di V, detta base di Jordan, in cui la matrice di T ha la forma*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

e

$$J_i = \begin{pmatrix} B_{i_1} & & & \\ & B_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{i_{r_i}} \end{pmatrix}$$

e B_{i_j} *sono blocchi di Jordan relativi a* λ_i.

DIM. Osserviamo per prima cosa che un blocco di Jordan $m \times m$ è semplicemente $\lambda I + M_m$. Sappiamo, per il Corollario precedente, che

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

dove $V_i = \{v \in V | (T - \lambda_i)^{l_i} v = 0\}$ e quindi esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di T è

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

Possiamo ridurci al caso in cui T ha una sola radice caratteristica λ, cioè $T - \lambda$ sia nilpotente. Allora $T = \lambda + (T - \lambda)$ ed essendo $T - \lambda$ nilpotente esiste una base in cui la matrice è della forma

$$\begin{pmatrix} M_{n_1} & & & \\ & M_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{n_{r_i}} \end{pmatrix}$$

ma allora la matrice di T è della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{n_1} & & & \\ & M_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_{n_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{n_1} & & & \\ & B_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{n_r} \end{pmatrix}$$

Se ordiniamo le cose in modo che in ciascuna J_i la dimensione di B_{i_1} sia maggiore o uguale di quella di B_{i_2} e così via la matrice

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

si chiama forma di Jordan di T. $\square$

Per calcolare esplicitamente la forma canonica di Jordan ci sarà utile il seguente

TEOREMA 2.0.29. *Se* T *è split e* λ_0 *è un autovalore di* T, *definiamo*

$$s_k = rg(T - \lambda_0 I)^k.$$

Allora ogni la matrice di Jordan di T *contiene esattamente*

$$r_k = s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1}$$

blocchi relativi a λ_0 di dimensione k.

Dim. Cominciamo con l'osservare che se $J_m(\lambda)$ è un blocco di Jordan di dimensione m relativo all'autovalore λ allora ci sono due possibilità: o $\lambda \neq 0$ e quindi il blocco è invertibile, dunque di rango m ed allora anche una qualunque potenza del blocco è invertibile e quindi di rango m. Oppure $\lambda = 0$ nel qual caso il blocco è nilpotente ed il rango dipende dalla potenza a cui eleviamo il blocco. Più precisamente

$$rg(J_m(0)) = m-1; rg(J_m(0)^2) = m-2; ...; rg(J_m(0)^{m-1}) = 1; rg(J_m(0)^m) = 0$$

dopodiché tutte le ulteriori potenze sono chiaramente nulle.

Se J è la matrice di Jordan di T e λ_0 un autovalore di T, prendiamo la matrice $B = J - \lambda_0 I$. Questa matrice avrà dei blocchi di Jordan con autovalore zero laddove J aveva autovalore λ_0 mentre tutti gli altri blocchi sono invertibili. Tra i blocchi di autovalore zero ce ne sono r_1 di dimensione 1, r_2 di dimensione 2, etc. Allora, per quanto osservato sopra, avremo che ogni blocco di dimensione m elevato alla k-esima potenza ha rango $m-k$. Sia ora $m_a(\lambda_0) = \mu$ la molteplicità algebrica di λ_0. Avremo

$$s_0 = rg(I) = \sum_{i=1}^{n} (i-k) r_i + (n-\mu)$$

$$s_1 = rg(B) = \sum_{i=2}^{n} (i-k) r_i + (n-\mu)$$

$$s_2 = rg(B^2) = \sum_{i=3}^{n} (i-k) r_i + (n-\mu)$$

e in generale

$$s_k = rg(B^k) = \sum_{i=k+1}^{n} (i-k) r_i + (n-\mu)$$

per $k = 0, \ldots, n$. Quindi

$$rg(B^k) - rg(B^{k-1}) = -\sum_{i=k}^{n} r_i$$

e dunque

$$s_{k+1} - 2s_k + s_{k-1} = (s_{k+1} - s_k) - (s_k - s_{k-1}) = -\sum_{i=k+1}^{n} r_i + -\sum_{i=k}^{n} r_i = r_k$$

$\square$

Esempio. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

di cui vogliamo calcolare la forma canonica di Jordan. È evidente che il polinomio caratteristico di questa matrice è $-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$. Quindi ha autovalori $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1, $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 3. Consideriamo $S_1 = A$. Risulta $rg(A) = rg(A^2) = ... = 4$. Quindi J contiene

$$rgS_1^2 - 2rgS_1 + rgS_1^0 = 4 - 8 + 5 = 1$$

blocchi di lunghezza 1 relativi a 0. Inoltre

$$rgS_1^3 - 2rgS_1^2 + rgS_1^1 = 4 - 8 + 4 = 0$$

quindi non ci sono blocchi di lunghezza 2 relativi a 0. Prendiamo poi $S_2 = A - I$. Risulta $rg(A-I) = rg(A-I)^2 = ... = 4$. Quindi J contiene

$$rgS_2^2 - 2rgS_2 + rgS_2^0 = 4 - 8 + 5 = 1$$

blocchi di lunghezza 1 relativi a 1. Etc. Infine prendiamo $S_3 = A - 2I$. Risulta $rg(S_3) = 3, rg(S_3)^2 = rg(S_3)^3 = ... = 2$. Dunque

$$rgS_3^2 - 2rgS_3 + rgS_3^0 = 2 - 6 + 5 = 1$$

e quindi un blocco di lunghezza 1 relativa a 2. Inoltre

$$rgS_3^3 - 2rgS_3^2 + rgS_3^1 = 2 - 4 + 3 = 1$$

e quindi un blocco di lunghezza 2 relativo a 2. La forma di Jordan desiderata è dunque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2. \end{pmatrix}$$

Ci occorrerà il seguente famoso risultato:

Teorema Cinese dei resti[7] 2.0.30. *Supponiamo che $g(t)$ e $h(t)$ siano polinomi in t a coefficienti in un campo e supponiamo che siano primi tra loro. Siano ancora $u(t)$ e $v(t)$ due polinomi arbitrari. Allora esiste un polinomio $s(t)$ tale che $s(t) \equiv u(t) \mod g(t)$ e $s(t) \equiv v(t) \mod h(t)$.*

Dim. Osserviamo prima che se troviamo dei polinomi $r(t), \bar{r}(t)$ tali che $r(t) \equiv 1 \mod g(t)$ e $\bar{r}(t) \equiv 0 \mod g(t)$ mentre $r(t) \equiv 0 \mod h(t)$ e $\bar{r}(t) \equiv 1 \mod h(t)$, allora avremo che

$$ur + v\bar{r} \equiv u \mod g$$

e

$$ur + v\bar{r} \equiv v \mod h.$$

Dobbiamo in altre parole trovare

$$r(t) = p(t)h(t) \quad r(t) = q(t)g(t) + 1$$

Ma essendo h e g primi tra loro sappiamo che esistono due polinomi p', q' tali che $p'h + q'g = 1$. Prenderemo allora $p = p'$ e $q = -q'$. $\square$

Diremo che un endomorfismo T è **semisemplice** se le radici del polinomio minimo di T in κ sono tutte distinte. Nel caso in cui T sia anche split questo vuol dire che T è diagonalizzabile ossia la sua forma canonica di Jordan è diagonale. Da questo risulta evidente che se T è split semisemplice e nilpotente allora $T = 0$. Abbiamo il seguente importante

[7] Questo teorema ha una lunga storia. E' possibile dare un enunciato più generale di cui quello del testo è un caso particolare, [Lang1]

TEOREMA 2.0.31. *Se κ è algebricamente chiuso, ogni matrice $x \in M(n, \kappa)$ si può scrivere in modo unico come $x = x_s + x_n$ dove x_s è semisemplice, x_n è nilpotente, e x_n x_s commutano tra loro. Inoltre, ciò visto, esiste un polinomio $p(T)$ senza termine noto, tale che $p(x) = x_s$ e $x - p(x) = x_n$*

DIM. Cominciamo con l'osservare che l'essere semisemplice o nilpotente è una nozione invarianti per coniugazione il che è ovvio. Unicità. Sia $x = x_s + x_n = x'_s + x'_n$ allora si ha $x_s - x'_s = x'_n - x_n$. L'unicità seguirà non appena dimostreremo che questa differenza è simultaneamente nilpotente e semisemplice, perché in tal caso tale differenza è zero.

Osserviamo che se due endomorfismi semisemplici commutano allora anche la loro somma è semisemplice, il che non è vero in generale senza l'ipotesi di commutatività). Infatti x, y commuatno e dunque è facile vedere che ciascuno stabilizza gli autospazi dell'altro. Sono dunque simultaneamente diagonalizzabili e quindi in tale base anche $x + y$ è diagonale, (cf Prop. 2.1.14). Analogamente la somma di due endomorfismi nilpotenti che commutano è nilpotente: segue dalla formula del binomio di Newton. Anche per endomorfismi nilpotenti l'ipotesi che essi commutino è essenziale. Per concludere ci rimane da verificare che x_s e $-x'_s$ commutano. Se supponiamo che x_s è un polinomio in x poiché x'_s commuta con se stesso e con x'_n allora esso commuta con x e dunque con x_s in quanto polinomio in x. Duqnue l'unicità seguirà non appena dimostro che esiste un x_s che sia un polinomio. Scritta poi la x in forma canonica di Jordan si ha che la parte semisemplice è la "diagonale" e che la parte nilpotente è il "resto". Per coniugazione ottengo la decomposizione di x.

Rimane dunque da verificare l'esistenza di un polinomio.

Possiamo supporre che x sia in forma di Jordan. Siano a_i gli autovalori distinti di x di molteplicità m_i. Il polinomio caratteristico è $\prod_i (t - a_i)$. Consideriamo il sistema di congruenze

$$s(t) \equiv 1 \mod (t - a_1)^{m_1} \quad s(t) \equiv 0 \mod \prod_{i \geq 2} (t - a_i)$$

che ha soluzione $s_1(t)$ per il Teorema Cinese dei Resti. Calcolando $s_1(t)$ sulla matrice x si ha una matrice $s_1(x)$ che è tutta nulla nei blocchi dove c'erano gli autovalori $a_i, i \geq 2$ mentre il blocco dove c'era a_1 la matrice $s_1(x)$ ha la matrice unità. Ripetendo analoghi ragionamenti con gli altri autovalori $a_2, a_3, \ldots a_k$ si ottengono le analoghe matrici $s_2(x), s_3(x), \ldots s_k(x)$ con 0 ovunque e 1 dove c'era a_i. Per cui

$$x_s = a_1 s_1(x) + a_2 s_2(x) + \ldots + a_k s_k(x)$$

e questa è l'espressione polinomiale cercata per x_s. Possiamo infine vedere che è possibile fare in modo che tale polinomio abbia il termine noto uguale a zero, il che vuol dire far sì che il polinomio sia un multiplo di x. Infatti se 0 è effettivamente un autovalore, la costruzione data fornisce già un polinomio multiplo di x. Se invece 0 non è autovalore posso considerare nel sistema di congruenze visto sopra una ulteriore congruenza $s(t) \equiv 0 \mod t$ infatti in tale ipotesi t è primo con ogni $x - a_i$.

□

COROLLARIO 2.0.32. *Se $x \in End\ V$ tale che $xU_1 \subset U_2$, U_i sottospazi di V, allora anche x_s e x_n mandano U_1 in U_2.*

DIM. Infatti essi sono polinomi in x. □

COROLLARIO 2.0.33. *Se $x \in End\ V$, e $x = x_s + x_n$ è la sua decomposizione di Jordan allora $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ è la decomposizione di Jordan di $ad\ x$.*

DIM. Sappiamo già che $ad\ x_n$ è nilpotente. Per quanto riguarda la semisemplicità di $ad\ x_s$: esso è semisemplice se e solo se esiste una base $e_1, \ldots, e_n$ in cui x_s

ha forma diagonale, e precisamente $x_s e_i = \alpha_i e_i$. Infatti, sia e_{ij} la matrice che ha 1 nel posto i, j e zero altrove. Verificheremo che

$$(ad\ x_s)(e_{ij}) = (\alpha_i - \alpha_j)e_{ij}.$$

Una volta verificato questo verifichiamo che adx_s e $ad\ x_n$ commutano: questo è banale poiché, essendo ad un omomorfismo di algebre di Lie

$$[ad\ x_s, ad\ x_n] = ad[x_s, x_n] = ad\ 0 = 0.$$

Calcoliamo dunque $(ad\ x_s)(e_{ij})$. Si ha che $x_s = \sum \alpha_i e_{ii}$, matrice diagonale, allora

$$\begin{aligned}
&(ad\ x_s)(e_{ij}) = x_s e_{ij} - e_{ij} x_s = (\sum \alpha_h e_{hh})e_{ij} - e_{ij}(\sum \alpha_h e_{hh}) \\
&\alpha_i e_{ij} - \alpha_j e_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)e_{ij}
\end{aligned}$$

Quindi se x_s è diagonale, allora $ad\ x_s$ è diagonale nella base e_{ij} e ha come autovalori la differenza degli autovalori. $\square$

2.1 Insiemi commutativi di operatori.

I teoremi fondamentali generali sui moduli per algebre di Lie nilpotenti e risolubili si possono porre in un contesto molto illuminante se si comprende prima la teoria alla base degli insiemi commutativi di operatori, che tratteremo in questo paragrafo. Il materiale qui esposto è più che una semplice motivazione per la teoria delle algebre di Lie; molto di quello che vedremo ora sarà usato effettivamente in seguito. Questo primo paragrafo è indipendente dalla Parte Prima, tranne che per la terminologia delle bandiere, per la quale si rimanda al §1.2.

Fissiamo uno spazio vettoriale V su un campo κ, e assumiamo per convenienza che $V \neq 0$.

Endomorfismi nilpotenti

Un endomorfismo **nilpotente** di V è un endomorfismo α tale che $\alpha^m = 0$ per qualche $m \geq 1$. Se $W \subset V$ è un sottospazio invariante per α, allora α rimane nilpotente su W e su V/W.

PROPOSIZIONE 2.1.1. *Un endomorfismo nilpotente annulla un vettore non nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo m tale che $\alpha^{m-1}v \neq 0$ e $\alpha^m v = 0$. Allora α annulla $\alpha^{m-1}v$. □

PROPOSIZIONE 2.1.2. *Un endomorfismo è nilpotente se e solo se può essere messo in forma strettamente sopratriangolare (cioè ammette una bandiera fortemente invariante).*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue immediatamente dalla discussione delle forme canoniche del paragrafo precedente. Tuttavia possiamo anche dare una semplice dimostrazione diretta come segue. Un endomorfismo strettamente sopratriangolare è chiaramente nilpotente. Viceversa, se $\alpha \in End\ V$ è nilpotente, allora α annulla un vettore non nullo per la Proposizione 2.1.1. Prendendo il quoziente di V con lo spazio generato da quel vettore, otteniamo un endomorfismo nilpotente su uno spazio vettoriale di dimensione minore. Il risultato segue dunque per induzione su $dim\ V$. □

Per trattare insiemi commutativi di endomorfismi nilpotenti ci occorre:

LEMMA 2.1.3. *Se due endomorfismi α e β commutano, α stabilizza il nucleo di β.*

La dimostrazione è un esercizio.

PROPOSIZIONE 2.1.4. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi nilpotenti. Allora esiste un vettore non nullo annullato da ogni elemento di S (cfr. la Proposizione 2.1.1).*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in S$ generino linearmente lo stesso spazio generato da S. Si può procedere per induzione su r. Se $r = 1$ applichiamo la Proposizione 2.1.1 e quindi l'affermazione è vera in questo caso. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $r-1$ e sia W l'intersezione dei nuclei di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, cosicché, per il Lemma 2.1.3, α_r stabilizza W. Allora usando la Proposizione 2.1.1 di nuovo, possiamo concludere che esiste un vettore non nullo di W che è annullato da α_r. Questo vettore allora ha i requisiti richiesti. □

PROPOSIZIONE 2.1.5. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi. Allora ogni elemento di S è nilpotente se e solo se gli elementi di S possono essere posti simultaneamente in forma strettamente sopratriangolare (cioè S ammette una bandiera fortemente invariante).(cfr. Proposizione 2.1.2).*

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione inversa è chiara; quella diretta segue per induzione su $dim\ V$, usando la Proposizione 2.1.4 (come nella dimostrazione della Proposizione 2.1.2). □

Diamo ora gli analoghi di questi 5 risultati per una classe più ampia di operatori.

Endomorfismi split

Ricordiamo che un endomorfismo split α (sempre su V) è un endomorfismo i cui autovalori appartengono tutti a κ (cioè uno il cui polinomio caratteristico si spezza nel prodotto di fattori lineari su κ). Se $W \subset V$ è un sottospazio invariante per α, allora α rimane split su W e su V/W, poiché il prodotto dei due corrispondenti polinomi caratteristici è il polinomio caratteristico di α.

Ogni endomorfismo nilpotente è split poiché i suoi autovalori (cioè le radici del polinomio caratteristico) sono tutti nulli (per la Proposizione 2.1.2, per esempio).

Ogni endomorfismo diagonalizzabile è anche split. Si confrontino le seguenti cinque proposizioni con le Proposizioni 2.1.1-2.1.5.

PROPOSIZIONE 2.1.6. *Ogni endomorfismo split possiede un autovettore.*

DIMOSTRAZIONE. Il polinomio caratteristico ha una radice in κ. $\square$

PROPOSIZIONE 2.1.7. *Un endomorfismo è split se e solo se può essere triangolarizzato superiormente (cioè ammette una bandiera invariante).*

DIM. Anche questa Proposizione è stata dimostrata nel paragrafo precedente, ed anche qui potremmo dare una dimostrazione diretta per induzione. $\square$

Per trattare insiemi commutativi di endomorfismi split ci serve

LEMMA 2.1.8. *Se due endomorfismi α e β commutano, α stabilizza ogni autospazio di β.*

La dimostrazione è un esercizio.

PROPOSIZIONE 2.1.9. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi split. Allora S possiede un autovettore simultaneo. (cfr. Proposizione 2.1.6).*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in S$ generino linearmente lo stesso spazio generato da S. Procediamo per induzione su r. Se $r = 1$ applichiamo la Proposizione 2.1.6 e quindi l'affermazione è vera in questo caso. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $r-1$ e sia W l'intersezione degli autospazi relativi agli autovalori $c_1, \dots, c_{r-1}$ per i rispettivi endomorfismi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$, cosicché, per il Lemma 2.1.8, α_r stabilizza W. Allora usando la Proposizione 2.1.6 di nuovo, possiamo concludere che esiste un autovettore di W per α_r. Questo vettore allora ha i requisiti richiesti. $\square$

PROPOSIZIONE 2.1.10. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi. Allora ogni elemento di S è split se e solo se S può essere simultaneamente triangolarizzato (cioè S ammette una bandiera invariante) (cfr. Proposizione 2.1.7.)*

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo la Proposizione 2.1.9 e l'induzione su *dim* V.
$\square$

La Proposizione 2.1.10 può essere raffinata considerevolmente, cosa che ora faremo.

Autovalori generalizzati; pesi

DEFINIZIONE 2.1.1. Sia α un endomorfismo di V, e sia $c \in \kappa$ e $v \in V$, $v \neq 0$. Allora c si dice **autovalore generalizzato** e v un **autovettore generalizzato** per α se $(\alpha - c)^m v = 0$ per qualche $m = 1, 2, \dots$.

DEFINIZIONE 2.1.2. Per ogni $c \in \kappa$, l'insieme di tutti i $v \in V$ che sono autovalori generalizzati per c, insieme con il vettore nullo, formano un sottospazio di V detto **autospazio generalizzato** di V per α e c, e si indica con V^c, o talvolta con V^c_α. Osserviamo che $V^c \neq (0)$ se e solo se c è un autovalore generalizzato per α.

L'importanza di questi concetti deriva dal fatto che gli autovalori e gli autospazi consueti non sono sufficienti per fare piena luce sulla struttura di endomorfismi arbitrari; anche se α è un endomorfismo split di V, V può non essere la somma diretta degli autospazi di α. Tuttavia, per la teoria della forma canonica di Jordan, ogni endomorfismo split decompone V nella somma diretta dei suoi autospazi generalizzati (precisamente, $V = \coprod V^c$ ove c varia tra gli autovalori generalizzati di α), e ciascun V^c (c un autovalore generalizzato) è un sottospazio α-invariante sul quale α ha forma triangolare superiore, con tutti i coefficienti sulla diagonale uguali a c. Il promesso raffinamento della Proposizione 2.1.10 sarà anche una generalizzazione di questa struttura. Osserviamo, incidentalmente, che gli autovalori generalizzati di un endomorfismo split α coincidono con i suoi autovalori, ed α è diagonalizzabile se e solo se gli autospazi generalizzati coincidono con gli autospazi.

Osservazione 2.1.1. Nelle notazioni precedenti, α è nilpotente se e solo se $V = V^0$, cioè se e solo se ogni elemento non nullo di V è un autovettore generalizzato con autovalore generalizzato zero, ed in tal caso, α può essere posto in forma strettamente sopratriangolare (per la Proposizione 2.1.2, per esempio). Osserviamo che la teoria della forma canonica di Jordan esprime V come somma diretta di blocchi V^c su ciascuno dei quali la struttura essenziale di V^0 è mantenuta, tranne che su V^c, è $\alpha - c$ e non α che si pone in forma strettamente sopratriangolare. Così abbiamo un raffinamento della Proposizione 2.1.7 che fa uso dei blocchi con la struttura della Proposizione 2.1.2. Il raffinamento della Proposizione 2.1.10 sarà nello stesso spirito.

Una semplificazione tecnica della precedente definizione è possibile; possiamo prendere $m = dim\ V$ nell'equazione $(\alpha - c)^m v = 0$. In effetti:

Lemma 2.1.11. *Se α è un endomorfismo e $\alpha^m = 0$ per qualche $m \geq 1$, allora $\alpha^{dim\ V} = 0$. Se $v \in V$ e $\alpha^m v = 0$, allora $\alpha^{dim\ V} v = 0$.*

Dimostrazione. Se $\alpha^m = 0$, allora la successione $V \supset \alpha V \supset \alpha^2 V \supset \dots$ deve essere strettamente decrescente fino ad arrivare a zero, e dunque $\alpha^{dim\ V} = 0$. Se $\alpha^m v = 0$, sia W lo spazio generato da $v, \alpha v, \alpha^2 v, \dots, \alpha^{m-1} v$. Allora $\alpha^m W = 0$ cosicché $\alpha^{dim\ W} W = 0$ per la prima parte del lemma, dimostrando la seconda parte. $\square$

Per ottenere il risultato principale, è necessario dare una generalizzazione naturale delle definizioni precedenti.

Definizione 2.1.3. Sia S un insieme di endomorfismi di V, e sia $\lambda : S \to \kappa$ una funzione e $v \in V$, $v \neq 0$. Allora λ si dice un **peso** e v un **vettore peso** per S se $(\alpha - \lambda(\alpha))^m v = 0$ per ogni $\alpha \in S$ e qualche $m \geq 1$. (Per quanto sopra, possiamo fare la scelta uniforme $m = dim\ V$.)

Definizione 2.1.4. Per tutte le funzioni $\lambda : S \to \kappa$, l'insieme di tutti i $v \in V$ che sono vettori peso per λ, unito al vettore nullo, forma un sottospazio di V detto **spazio peso** di V per S e λ, e si indica con V^λ, o a volte V_S^λ.

Allora $V^\lambda \neq (0)$ se e solo se λ è un peso di S. Si osservi che $V_S^\lambda = \cap_{\alpha \in S} V_\alpha^{\lambda(\alpha)}$ per tutte le funzioni $\lambda : S \to \kappa$. Si osservi inoltre che V stesso è uno spazio peso per qualche funzione $\lambda : S \to \kappa$ se e solo se V è un autospazio generalizzato per ogni $\alpha \in S$. In tal caso, il peso è univocamente determinato dalla condizione che $\lambda(\alpha)$ sia l'autovalore generalizzato di α per ogni $\alpha \in S$.

Per insiemi commutativi di endomorfismi, ci occorrerà il seguente lemma la cui dimostrazione è banale:

Lemma 2.1.12. *Se due endomorfismi α e β commutano, α conserva ogni autospazio generalizzato di β.*

Ed ecco il risultato principale:

TEOREMA 2.1.13. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi split. Allora:*
(1) *L'insieme Δ dei pesi di S è finito.*
(2) $V = \coprod_{\lambda \in \Delta} V^{\lambda}$.
(3) *Ogni V^{λ} è S-invariante.*
(4) *Su ogni V^{λ}, gli $\alpha \in S$ possono essere posti simultaneamente in forma sopratriangolare, con i coefficienti sulla diagonale della matrice di α tutti uguali a $\lambda(\alpha)$.*
(5) *Se S è un sottospazio lineare di End V, ogni peso è una funzione lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo per cominciare la seguente affermazione per induzione su *dim* V: Esiste un insieme finito Δ_0 di funzioni $\lambda : S \to \kappa$ e di sottospazi S-invarianti $V^{(\lambda)} \subset V^{\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta_0$ e tale che V è la somma diretta $V = \coprod_{\lambda \in \Delta_0} V^{(\lambda)}$. Ciò è banale se *dim* $V = 1$, possiamo dunque assumere che *dim* $V > 1$. Se V stesso è uno spazio peso per qualche funzione $\lambda : S \to \kappa$ l'asserto è vero. Se V non è uno spazio peso, esiste un $\alpha \in S$ tale che V non è un autospazio generalizzato per α. Ma allora V è la somma diretta di almeno due autospazi generalizzati non nulli per α. Per il Lemma 2.1.12, ogni elemento di S stabilizza ciascuno di questi autospazi generalizzati, e le restrizioni di S a questi sottospazi costituiscono ancora un insieme commutativo di endomorfismi split. Il risultato ora segue per induzione.

Assumiamo ora che $V = \coprod_{\lambda \in \Delta_0} V^{(\lambda)}$ sia una decomposizione del tipo suddetto. Dimostreremo che $\Delta = \Delta_0$ e che $V^{(\lambda)} = V^{\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta$. Per far questo, sia $\mu \in \Delta$, e sia $v \in V^{\mu}$, $v \neq 0$. Scriviamo $v = \sum_{\lambda \in \Delta_0} v_{\lambda}$, ove $v_{\lambda} \in V^{(\lambda)}$, e scegliamo $v_{\lambda_0} \neq 0$. Per ogni $\alpha \in S$,

$$0 = (\alpha - \mu(\alpha))^{dim\ V} v = \sum_{\lambda \in \Delta_0} (\alpha - \mu(\alpha))^{dim\ V} v_{\lambda}$$

e $(\alpha - \mu(\alpha))^{dim\ V} v_{\lambda} \in V^{(\lambda)}$, essendo questa una somma diretta ne risulta $(\alpha - \mu(\alpha))^{dim\ V} v_{\lambda_0} = 0$, ossia abbiamo trovato un elemento non nullo nel nucleo di $(\alpha - \mu(\alpha))^{dim\ V}$. Ma siccome $\alpha - \lambda_0(\alpha)$ è nilpotente su $V^{(\lambda_0)}$, in quanto $V^{(\lambda_0)} \subset V^{\lambda_0}$, allora α può essere triangolarizzato su $V^{(\lambda_0)}$, con tutti i coefficienti sulla diagonale uguali a $\lambda_0(\alpha)$. Cosicché se $\mu(\alpha) \neq \lambda_0(\alpha)$ allora $(\alpha - \mu(\alpha))^m$ è non singolare su $V^{(\lambda_0)}$ per ogni $m \geq 1$, contraddicendo il fatto che il suo nucleo sia non banale. Dunque $\mu = \lambda_0$ e quindi $\Delta = \Delta_0$.

Il ragionamento precedente dimostra inoltre che una qualunque componente non nulla di $v \in V^{\mu}$ rispetto alla decomposizione $V = \coprod_{\lambda \in \Delta_0} V^{(\lambda)}$ deve appartenere a $V^{(\mu)}$, e quindi $v \in V^{(\mu)}$. Questo mostra che $V^{\mu} \subset V^{(\mu)}$. Poiché l'inclusione opposta si ha per ipotesi abbiamo l'uguaglianza: $V^{(\mu)} = V^{\mu}$ per ogni $\mu \in \Delta$. Abbiamo ora dimostrato (1),(2), e (3). Per dimostrare (4), si osservi che la Proposizione 2.1.10 implica che su ciascun V^{μ}, gli $\alpha \in S$ possono essere posti simultaneamente in forma sopratriangolare. Ma allora per ogni $\alpha \in S$, il fatto che $\alpha - \lambda(\alpha)$ è nilpotente su V^{λ} implica che i coefficienti sulla diagonale della matrice di α sono tutti uguali a $\lambda(\alpha)$. Infine (5) segue da (4) componendo l'iniezione lineare $S \to$ *End* V con l'applicazione lineare che porta un endomorfismo ad un opportuno coefficiente matriciale diagonale. Questo completa la dimostrazione del teorema. □

OSSERVAZIONE 2.1.2. Osserviamo che il Teorema 2.1.13 rafforza effettivamente la Proposizione 2.1.10. Inoltre, V si decompone nella somma diretta di sottospazi S-invarianti V^{λ} su ciascuno dei quali appare la struttura essenziale della Proposizione 2.1.5, tranne che ora sono gli operatori $\alpha - \lambda(\alpha)$ $(\alpha \in S)$, e non gli operatori α stessi che sono posti simultaneamente in forma sopratriangolare. Si confronti con l'osservazione che precede il Lemma 2.1.11.

Se nel Teorema 2.1.13 si assume che gli elementi di S sono endomorfismi diagonalizzabili, allora gli spazi V^λ sono tutti autospazi simultanei per gli elementi di S. Infatti, se $\alpha \in S$ e $c \in \kappa$ allora $\alpha - c$ è diagonalizzabile, e quindi se una potenza di $\alpha - c$ annulla un vettore, lo stesso vale per $\alpha - c$. Abbiamo così:

Proposizione 2.1.14. *Sia S un insieme commutativo di endomorfismi diagonalizzabili. Allora S è simultaneamente diagonalizzabile, cioè V ha una base rispetto alla quale le matrici degli elementi di S sono diagonali.*

2.2 Il Teorema di Engel ed il Teorema della nilrappresentazione.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e supponiamo che S sia un sottospazio lineare di *End* V, cioè uno spazio vettoriale di endomorfismi di V. S è un insieme commutativo di operatori se e solo se esso forma un'algebra di Lie abeliana di *End* V. Elenchiamo questa come la prima di quattro condizioni sempre più deboli su S:

(1) S è un'algebra di Lie abeliana (cioè S è un insieme commutativo di operatori).
(2) S è un'algebra di Lie nilpotente.
(3) S è un'algebra di Lie risolubile.
(4) S è un'algebra di Lie (cioè è chiusa per l'operazione di commutatore).

Le condizioni (2), (3), e (4) dovrebbero pensarsi come generalizzazioni della commutatività. Lo scopo principale di questo paragrafo e dei due seguenti è di generalizzare le Proposizioni 2.1.5 e 2.1.10 e il Teorema 2.1.13 ad un opportuno contesto non commutativo, contenuto nell'elenco precedente. La generalizzazione della Proposizione 2.1.5 è il Teorema di Nilrappresentazione che vedremo in questo paragrafo; vale nel contesto (4). (Una forma debole di questo teorema è dimostrata prima in questo paragrafo nella condizione (3)). La generalizzazione della Proposizione 2.1.10 è il Teorema di Lie (§2.3), nel contesto (3). Infine, la generalizzazione del Teorema 2.1.13 è il teorema sui pesi (§2.4); lì il contesto è quello della condizione (2). Le dimostrazioni dei teoremi della nilrappresentazione debole, di Lie, e dei pesi sono quasi le stesse dei loro corrispettivi del §2.1, con due eccezioni non banali: le versioni generalizzate dei banali Lemmi 2.1.8 e 2.1.12 sono considerevolmente più difficili. Le forme generalizzate dei Lemmi 2.1.3 e 2.1.8 usano il procedimento di aggiungere una derivazione ad un'algebra di Lie (v. Osservazione 1.4.4). Poiché sono precisamente le algebre di Lie risolubili che possono essere costruite in tal maniera (Proposizione 1.5.1), è il contesto (3) quello nel quale il teorema debole di nilrappresentazione ed il Teorema di Lie sono dimostrati. Inoltre, la generalizzazione del Lemma 2.1.12 funziona precisamente per le algebre di Lie nilpotenti, e ciò spiega perché il teorema sui pesi è svolto nel contesto (2). Solo il ragionamento che ci porta dal teorema debole di nilrappresentazione al teorema di nilrappresentazione (forte) giace al di là degli orizzonti della motivazione del §2.1. Esso fa uso del Teorema 2.2.3 (Teorema di Engel).

Fissiamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ed una rappresentazione $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ di $\mathfrak{g}$, e supponiamo per convenienza che $V \neq (0)$.

Definizione 2.1.1. Sia $\mathfrak{h}$ un sottospazio di $\mathfrak{g}$ e $x \in \mathfrak{g}$. Allora x **normalizza** $\mathfrak{h}$ se $[x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Lemma 2.2.1. *(cfr. Lemma 2.1.3). Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Allora ogni elemento di $\mathfrak{g}$ che normalizza $\mathfrak{h}$ lascia invariante l'annullatore di $\mathfrak{h}$ in V.*

La dimostrazione è banale.

Definizione 2.1.2. π è una **nilrappresentazione** se $\pi(x)$ è nilpotente per ogni $x \in \mathfrak{g}$.

Proposizione 2.2.2. *(Teorema debole di nilrappresentazione; cfr. Proposizione 2.1.5). Sia $\mathfrak{g}$ risolubile. Allora π è una nilrappresentazione se e solo se π ammette una bandiera fortemente invariante.*

Dimostrazione. La direzione inversa è chiara. Per dimostrare l'altra direzione, mostriamo prima per induzione su *dim* $\mathfrak{g}$ che $\pi(\mathfrak{g})$ annulla simultaneamente un vettore non nullo di V. Questo è vero se *dim* $\mathfrak{g} = 1$ per la Proposizione 2.1.1. Supponiamo che sia vera per *dim* $\mathfrak{g} = r - 1$ e sia *dim* $\mathfrak{g} = r$. Allora $\mathfrak{g}$ ha un ideale $\mathfrak{h}$ di codimensione 1 (Proposizione 1.5.1). Per l'ipotesi induttiva, il sottospazio W di V annullato da $\pi(\mathfrak{h})$ è non nullo. Scegliamo $x \in \mathfrak{g}$, $x \notin \mathfrak{h}$. Allora x normalizza $\mathfrak{h}$, e quindi $\pi(x)$ stabilizza W per il Lemma 2.2.1. Un'altra applicazione della

Proposizione 2.1.1 mostra che $\pi(x)$ annulla un elemento non nullo di W. Questo elemento è chiaramente annullato da $\pi(\mathfrak{g})$, con ciò dimostrando il passo induttivo. (Questa parte della dimostrazione è chiaramente simile alla dimostrazione della Proposizione 2.1.4). L'esistenza di una bandiera fortemente invariante si dimostra ora altrettanto facilmente che nella dimostrazione della Proposizione 2.1.5, usando l'induzione su $dim\ V$. □

OSSERVAZIONE 2.2.1. La Proposizione 2.2.2 fornisce una seconda dimostrazione della implicazione (1) $\Longrightarrow$ (3) nella Proposizione 1.6.2.

Per trasformare il Teorema debole di nilrappresentazione nel Teorema (forte) di nilrappresentazione ci occorre il Teorema di Engel, che è un risultato importante di per sé.

TEOREMA 2.2.3. TEOREMA DI ENGEL. *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se $ad\ x$ è nilpotente per ogni $x \in \mathfrak{g}$.*

DIMOSTRAZIONE. Il punto è dimostrare che se $ad\ x$ è nilpotente per ogni $x \in \mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{g}$ è nilpotente (cfr. Osservazione 1.6.2). Una volta dati il Teorema di nilrappresentazione debole (Proposizione 2.2.2) e la Proposizione 1.6.2, è sufficiente dimostrare che $\mathfrak{g}$ è risolubile. Se $\mathfrak{g}$ non è risolubile, scegliamo una sottoalgebra massimale risolubile (non ideale) $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$. Allora la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}$ dà luogo ad una rappresentazione π di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \neq 0$. Ma $\pi(x)$ è nilpotente per ogni $x \in \mathfrak{h}$, e dunque $\pi(\mathfrak{h})$ annulla simultaneamente un vettore non nullo in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, per il teorema debole di nilrappresentazione. Dunque esiste $y \in \mathfrak{g}$, $y \notin \mathfrak{h}$ tale che $[\mathfrak{h}, y] \subset \mathfrak{h}$. Ma allora lo spazio generato da $\mathfrak{h}$ e y è una sottoalgebra risolubile di $\mathfrak{g}$ più grande di $\mathfrak{h}$ e questa è una contraddizione. Dunque $\mathfrak{g}$ è risolubile, ed il Teorema di Engel è dimostrato. □

OSSERVAZIONE 2.2.2. L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se esiste n tale che per ogni

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g},$$

$(ad\ x_1)(ad\ x_2)\ldots(ad\ x_n) = 0$. Il teorema di Engel asserisce che $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se esiste n tale che per ogni $x \in \mathfrak{g}$, $(ad\ x)^n = 0$. Questo fatto che le "potenze" siano sufficienti assomiglia, anche se non c'è alcuna relazione logica, ad un fatto analogo per le forme bilineari (o anche multilineari) simmetriche in caratteristica 0. Esso asserisce che una forma n-lineare simmetrica M su uno spazio vettoriale V è identicamente nulla se e solo se $M(x, \ldots, x) = 0$ per ogni $x \in V$. (Il procedimento di determinare una forma n-lineare simmetrica M a partire dai valori $M(x, \ldots, x), x \in V$ si dice **polarizzazione** .)

OSSERVAZIONE 2.2.3. Il Teorema di Engel sarà usato tipicamente per mostrare che un'algebra di Lie in cui ciascun $ad\ x$ è nilpotente è risolubile, cosicché sia applicabile il Teorema di Lie.

PROPOSIZIONE 2.2.4. *Sia W uno spazio vettoriale. Se $x \in End\ W$ è nilpotente, allora $ad\ x$ è nilpotente sull'algebra di Lie $End\ W$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano L_x e R_x le applicazioni di moltiplicazione a sinistra e a destra di x su $End\ V$. Allora $ad\ x = L_x - R_x$, e L_x e $-R_x$ commutano. Dunque per il teorema del binomio,

$$(ad\ x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} L_x^i R_x^{n-i}$$

per ogni n. Poiché x è nilpotente, esiste m tale che $x^m = 0$. Ma allora $(ad\ x)^{2m-1} = 0$, e dunque $ad\ x$ è nilpotente. □

COROLLARIO. *Se* $\mathfrak{g}$ *è una sottoalgebra di Lie di* $End\ W$ *che consiste di endomorfismi nilpotenti, allora* $\mathfrak{g}$ *è una algebra di Lie nilpotente.*

DIMOSTRAZIONE. Mettiamo insieme il Teorema 2.2.3 e la Proposizione 2.2.4. □

TEOREMA 2.2.5. *(Teorema della Nilrappresentazione, cfr. Proposizione 2.2.2 e la Proposizione 2.1.5). Sia* $\mathfrak{g}$ *una algebra di Lie e* $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ *una rappresentazione. Allora* π *è una nilrappresentazione se e solo se* π *ammette una bandiera fortemente invariante (cioè* π *può essere posta in forma strettamente sopratriangolare).*

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Corollario precedente ed il Teorema debole di nilrappresentazione (Proposizione 2.2.2) a $\pi(\mathfrak{g}) \subset End\ V$. □

OSSERVAZIONE 2.2.4. Il Teorema 2.2.5 implica il Teorema di Engel; basta semplicemente applicarlo alla rappresentazione aggiunta.

2.3 Il Teorema di Lie.

Il lettore dovrebbe rivedere la discussione all'inizio del §2.2. In questo paragrafo dimostriamo il Teorema di Lie e diamo alcune conseguenze importanti. Il primo lemma che segue, l'analogo del Lemma 2.1.8, è così delicato da richiedere che la caratteristica del campo κ sia zero. Per questo assumiamo $char\ \kappa = 0$ in tutto questo paragrafo.

Fissiamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ e una rappresentazione $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ di $\mathfrak{g}$, e assumiamo per comodità che $V \neq (0)$.

Ricordiamo dal §1.2 che i caratteri di $\mathfrak{g}$ sono gli elementi di $\mathfrak{g}^*$ che sono omomorfismi di algebre di Lie. Se ϕ è un carattere di $\mathfrak{g}$, chiamiamo il sottospazio

$$\{v \in V | \pi(x)v = \phi(x)v \text{ per ogni } x \in \mathfrak{g}\}$$

lo **spazio del carattere** di V per $\mathfrak{g}$ e ϕ.

Lemma 2.3.1. *(cf Lemma 2.1.8). Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ e ϕ un carattere di $\mathfrak{h}$. Allora ogni elemento di $\mathfrak{g}$ che normalizza $\mathfrak{h}$ stabilizza lo spazio del carattere di V per $\mathfrak{h}$ e ϕ.*

Dimostrazione. Sia $W \subset V$ lo spazio del carattere di V per $\mathfrak{h}$ e ϕ, e supponiamo che $x \in \mathfrak{g}$ normalizzi $\mathfrak{h}$. Dobbiamo mostrare che $\pi(x)W \subset W$. Sia $w \in W$ e $y \in \mathfrak{h}$. Allora

$$y \cdot (x \cdot w) = x \cdot (y \cdot w) + [y,x] \cdot w = x \cdot \phi(y)w + \phi([y,x])w$$

(poiché $[y,x] \in \mathfrak{h}$)

$$= \phi(y)x \cdot w + \phi([y,x])w.$$

È quindi sufficiente mostrare che $\phi([y,x]) = 0$ se $W \neq 0$. (Se $W = 0$ il lemma è banale). Osserviamo che se $z \in \mathfrak{h}$, allora $\phi([y,z]) = 0$ perché ϕ è un carattere di $\mathfrak{h}$. L'affermazione che $\phi([y,x]) = 0$ se $W \neq 0$ è molto più delicata.

Fissiamo $w \in W$, $w \neq 0$. Sia n il massimo intero tale che i vettori

$$w, \pi(x)w, \pi(x)^2 w, \ldots, \pi(x)^{n-1} w$$

sono linearmente indipendenti. Allora questi vettori generano un sottospazio V_0 $\pi(x)$-invariante di V di dimensione n . Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia V_{n-i} il sottospazio di V_0 generato da

$$w, \pi(x)w, \ldots, \pi(x)^{i-1} w,$$

e sia $V_n = 0$. Allora

$$V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0$$

è una bandiera per V_0. Questa bandiera non è invariante per $\pi(x)$, ma affermiamo che V_0 è stabile sotto $\pi(\mathfrak{h})$, e che i V_i formano una bandiera $\pi(\mathfrak{h})$-invariante. Più precisamente, dimostriamo per induzione su $i = 0, \ldots, n-1$ che per ogni $y \in \mathfrak{h}$,

$$\pi(y)\pi(x)^i w \equiv \phi(y)\pi(x)^i w \mod V_{n-i}.$$

Ora questa affermazione è chiara per $i = 0$, poiché $w \in W$. Sia $i \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned}
&\pi(y)\pi(x)^i w = \pi(x)\pi(y)\pi(x)^{i-1} w + \pi([y,x])\pi(x)^{i-1} w \\
&= \pi(x)(\phi(y)\pi(x)^{i-1} w + w_1) + \\
&+ \phi([y,x])\pi(x)^{i-1} w + w_2
\end{aligned}$$

ove $w_1, w_2 \in V_{n-(i-1)}$, per l'ipotesi induttiva. Dunque

$$\pi(y)\pi(x)^i w \equiv \phi(y)\pi(x)^i w \bmod V_{n-i}$$

che dimostra la nostra affermazione.

Ora $\{w, \pi(x)w, \dots, \pi(x)^{n-1}w\}$ è una base che supporta la bandiera $V_0 \supset \dots \supset V_n = 0$, e rispetto a questa base le matrici degli endomorfismi $\pi(y)$ ($y \in \mathfrak{h}$) sono triangolari superiori, con coefficienti sulla diagonale tutti uguali a $\phi(y)$, per l'affermazione precedente. Dunque per ogni $y \in \mathfrak{h}$, $tr\ \pi(y)|V_0 = n\phi(y)$ e quindi in particolare, $tr\ \pi([y,x])|V_0 = n\phi([y,x])$. Ora calcoleremo questa traccia anche in un'altra maniera e poi trarremo delle conclusioni dal confronto delle due espressioni.

Sia $y \in \mathfrak{h}$. Allora $\pi(x)$ e $\pi(y)$ stabilizzano entrambi V_0, e dunque anche $\pi([y,x])$ lo stabilizza. Ma $\pi([y,x]) = \pi(y)\pi(x) - \pi(x)\pi(y)$, e dunque $\pi([y,x])|V_0$ è il commutatore di due endomorfismi di V_0 e quindi e a traccia zero.

Abbiamo così

$$0 = tr\ \pi([y,x])|V_0 = n\phi([y,x]).$$

Ma poiché $char\ \kappa = 0, n \neq 0$ e dunque $\phi([y,x]) = 0$, completando la dimostrazione del lemma. $\square$

Osservazione 2.3.1. L'artificio della dimostrazione precedente sarà usato di nuovo. Esso consiste nel costruire un sottospazio di un dato modulo invariante per una certa coppia di operatori. Allora la traccia del commutatore della coppia di operatori, ristretta al sottospazio, è zero. Questa traccia è poi calcolata con un metodo differente, e possiamo porre uguale a zero il risultato di questo calcolo. Il risultato contiene a volte delle informazioni non banali. Questo artificio generalmente richiede che *char* κ sia zero (come nella dimostrazione precedente), perché vogliamo che le dimensioni dei sottospazi agiscano come i consueti interi nel campo.

Definizione 2.3.1. V (o π) si dice **split** se $\pi(x)$ è un endomorfismo split di V per ogni $x \in \mathfrak{g}$.

Osservazione 2.3.2. Se κ è algebricamente chiuso, V è automaticamente split.

Teorema 2.3.2. Teorema di Lie. *(cfr. la Proposizione 2.1.10). Sia $\mathfrak{g}$ risolubile. Allora π è split se e solo se π ammette una bandiera invariante. In particolare, se π è split, allora π può essere triangolarizzato superiormente simultaneamente e V ha un autovettore simultaneo per $\pi(\mathfrak{g})$.*

Dimostrazione. Basta seguire semplicemente la dimostrazione della Proposizione 2.2.2 per dimostrare l'ultima affermazione del teorema, dopodiché il resto è semplice. Usiamo qui la Proposizione 2.1.6 invece della Proposizione 2.1.1 e il Lemma 2.3.1 invece del Lemma 2.2.1. Questa dimostrazione dovrebbe naturalmente essere confrontata con quelle delle Proposizioni 2.1.9 e 2.1.10. $\square$

2.4 Conseguenze del Teorema di Lie. In questo paragrafo raccogliamo alcuni corrollari del Teorema di Lie.

COROLLARIO 2.4.1. *Sia $\mathfrak{g}$ risolubile. Allora i soli $\mathfrak{g}$-moduli split, irriducibili sono quelli di dimensione 1.*

Questo segue immediatamente dal Teorema di Lie.

OSSERVAZIONE 2.4.1. Il Corollario 2.4.1 è equivalente al Teorema di Lie. Infatti, assumiamo il Corollario 2.4.1, e supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia risolubile e V split. Scegliamo un sottomodulo W di V minimale e non nullo. Allora W è split irriducibile e quindi unidimensionale per il Corollario 2.4.1. Questo dimostra l'ultima affermazione del Teorema 2.3.2, ed il resto del Teorema 2.3.2 è facile come prima.

Ricordiamo le caratterizzazioni elementari delle algebre di Lie nilpotenti e risolubili date nei paragrafi §1.5 e §1.6. In particolare, anche se il campo è arbitrario, un'algebra di Lie è nilpotente se e solo se la rappresentazione aggiunta ammette una bandiera fortemente invariante. È vero che un'algebra di Lie è risolubile se e solo se la rappresentazione aggiunta ammette una bandiera invariante? Una bandiera invariante per la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è precisamente una bandiera

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0$$

di ideali di $\mathfrak{g}$. Se richiediamo che ciascun a_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ sia un ideale solo in $\mathfrak{a}_i$ invece che in $\mathfrak{g}$, allora abbiamo la nota nozione di successione elementare. Sappiamo già (§1.5) che un'algebra di Lie (su un campo qualunque) è risolubile se e solo se ammette una successione elementare. Dunque in particolare, se la rappresentazione aggiunta ammette una bandiera invariante, allora l'algebra di Lie è risolubile, e questo vale su qualunque campo.

D'altra parte, supponiamo che κ sia un qualunque campo non algebricamente chiuso, e sia α un qualunque endomorfismo non split di uno spazio vettoriale V. Allora $\kappa \times_\alpha V$ è un'algebra di Lie risolubile in cui *ad* 1 $(1 \in \kappa)$ non è un endomorfismo split. Allora la rappresentazione aggiunta non può ammettere una bandiera invariante, perché se così fosse la rappresentazione aggiunta dovrebbe essere split. Abbiamo dunque un'algebra di Lie risolubile per cui la rappresentazione aggiunta non possiede bandiere invarianti.

Supponiamo di nuovo che *char* $\kappa = 0$. La situazione è chiarita dal prossimo risultato.

DEFINIZIONE 2.4.1. $\mathfrak{g}$ è **risolubile split** se $\mathfrak{g}$ è risolubile e la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è split.

COROLLARIO 2.4.2. *$\mathfrak{g}$ ammette una bandiera invariante per la rappresentazione aggiunta (cioè esiste una successione elementare*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = 0$$

tale che gli $\mathfrak{a}_i$ sono tutti ideali di $\mathfrak{g}$) se e solo se $\mathfrak{g}$ è risolubile split.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema di Lie alla rappresentazione aggiunta.
□

Osservazione 2.4.2. Se κ è algebricamente chiuso (di caratteristica zero) allora il corollario implica che la risolubilità è in effetti equivalente all'esistenza di una bandiera invariante per la rappresentazione aggiunta.

Molti dei seguenti corollari del Teorema di Lie fanno uso della tecnica di estensioni di campo (v. §1.9).

COROLLARIO 2.4.3. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{g}$ *è risolubile.*
(2) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *è nilpotente.*
(3) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset$ *nilrad* $\mathfrak{g}$

Dimostrazione. Il punto è dimostrare che se $\mathfrak{g}$ è risolubile allora $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è nilpotente. Supponiamo dapprima che $\mathfrak{g}$ sia risolubile split. Applicando il Teorema di Lie alla rappresentazione aggiunta (o applicando il Corollario 2.4.2), vediamo che $ad\ \mathfrak{g}$ può essere posto in forma sopratriangolare. Quindi $ad\ [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ può essere posto in forma sopratriangolare, e dunque esiste $n > 0$ tale che per ogni $x_1, \dots, x_n \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ e $y \in \mathfrak{g}$, $[x_1, [x_2, \dots [x_n, y] \dots]] = 0$ Prendendo $y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ inoltre otteniamo che $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è nilpotente.

Se $\mathfrak{g}$ è risolubile ma non risolubile split, sia K una estensione di κ tale che $\mathfrak{g}_K$ è risolubile split. (Per esempio, possiamo prendere K come la chiusura algebrica di κ). Allora $[\mathfrak{g}_K, \mathfrak{g}_K] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_K$ è nilpotente e quindi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ è nilpotente. □

Osservazione 2.4.3. La rimozione dell'ipotesi che $\mathfrak{g}$ sia split sarà spesso molto facile, come in quest'ultima dimostrazione, e quindi ometteremo spesso questo ragionamento.

Corollario 2.4.4. *Sia $\mathfrak{g}$ risolubile e sia D una derivazione di $\mathfrak{g}$. Allora $D(\mathfrak{g}) \subset nilrad\ \mathfrak{g}$.*

Dimostrazione. Applicando il Corollario 2.4.3 al prodotto semidiretto (risolubile)

$$\kappa \times_D \mathfrak{g},$$

otteniamo che $D(\mathfrak{g}) \subset [\kappa \times_D \mathfrak{g}, \kappa \times_D \mathfrak{g}] \subset nilrad\ (\kappa \times_D \mathfrak{g})$. Ma è anche $D(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ e quindi $D(\mathfrak{g}) \subset nilrad\ (\kappa \times_D \mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}$, un ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$. Quindi $D(\mathfrak{g}) \subset nilrad\ \mathfrak{g}$. □

Corollario 2.4.5. $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}] \subset nilrad\ \mathfrak{g}$, *($\mathfrak{g}$ arbitraria).*

Dimostrazione. $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}] \subset nilrad\ (rad\ \mathfrak{g})$ per il Corollario 2.4.4, allora $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}]$ è nilpotente. Ma $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}]$ è anche un ideale di $\mathfrak{g}$, ed un qualunque ideale nilpotente di $\mathfrak{g}$ è contenuto nel $nilrad\ \mathfrak{g}$. □

Il risultato che segue sarà usato per dimostrare che le sottoalgebre di Cartan delle algebre di Lie semisemplici sono abeliane

Corollario 2.4.6. *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è abeliana se e solo se $\mathfrak{g}$ è risolubile e $\mathfrak{g}$ ha una traccia non singolare.*

Dimostrazione. Se $\mathfrak{g}$ è abeliana, allora naturalmente $\mathfrak{g}$ è risolubile. $\mathfrak{g}$ ammette una traccia non singolare perché $\mathfrak{g}$ può essere realizzata come l'algebra di Lie delle matrici $n \times n$ diagonali, ove $n = dim\ \mathfrak{g}$.

Viceversa, sia π una rappresentazione di $\mathfrak{g}$ tale che B_π sia non singolare. Se π è split, essa può essere triangolarizzata superiormente per il Teorema di Lie. Allora $\pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ è triangolarizzata superiormente in senso stretto, quindi gli endomorfismi in $\pi(\mathfrak{g})\pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$ sono tutti nilpotenti. Dunque sono tutti a traccia zero, e $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset rad\ B_\pi$ per definizione di B_π. Poiché $rad\ B_\pi = 0$, $\mathfrak{g}$ è abeliana.

L'ipotesi di che $\mathfrak{g}$ sia split si può rimuovere facilmente usando la argomentazione del §1.9. □

Il corollario seguente costituisce la metà di un criterio di Cartan generalizzato ed ha conseguenze importanti di per sé.

Corollario 2.4.7. $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}] \subset rad\ B_\pi$, *o equivalentemente,* $B_\pi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}], rad\ \mathfrak{g}) = 0$.

Dimostrazione. Le due affermazioni sono equivalenti perché B_π è $\mathfrak{g}$-invariante.

Assumiamo dapprima che π sia split. Sia $x \in \mathfrak{g}$. Allora $(x) + rad\ \mathfrak{g}$ (ove (x) denota lo spazio generato da x in $\mathfrak{g}$) è un'algebra di Lie risolubile. Usiamo il Teorema di Lie per triangolarizzare superiormente $\pi((x) + rad\ \mathfrak{g})$. Allora $\pi([x, rad\ \mathfrak{g}])$ è strettamente soratriangolare, cosicché $\pi([x, rad\ \mathfrak{g}])$ consiste di endomorfismi nilpotenti. Ora sia $y \in \mathfrak{g}$, e triangolarizziamo superiormente $\pi|((y) + rad\ \mathfrak{g})$ con il Teorema di Lie. Allora $\pi([x, rad\ \mathfrak{g}]) \subset \pi(rad\ \mathfrak{g})$ deve essere sopratriangolare e quindi strettamente sopratriangolare poiché sappiamo che consiste di endomorfismi nilpotenti. Quindi $tr\ \pi(y)\pi([x,z]) = 0$ per ogni $z \in rad\ \mathfrak{g}$ e dunque $[x, rad\ \mathfrak{g}] \subset rad\ B_\pi$. Per linearità $[\mathfrak{g}, rad\ \mathfrak{g}] \subset rad\ B_\pi$, dimostrando il corollario nel caso split.

Per rimuovere l'ipotesi di che $\mathfrak{g}$ sia split, sia K un ampliamento di κ tale che l'estensione π' di π è split, e sia $B_{\pi'}$ la corrispondente traccia, cosicché $B_{\pi'}$ è la K-estensione naturale di B_π. Per quanto precede, $B_{\pi'}([\mathfrak{g}_K, \mathfrak{g}_K], rad\ \mathfrak{g}_K) = 0$, e quindi $B_\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], (rad\ \mathfrak{g}_K) \cap \mathfrak{g}) = 0$. Ma è facile vedere che $(rad\ \mathfrak{g}_K) \cap \mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g}$, e questo dimostra il corollario. (Non abbiamo dimostrato che $rad\ \mathfrak{g}_K = (rad\ \mathfrak{g})_K$. Ciò è tuttavia vero; v. Teorema 2.6.9). $\square$

Assumendo che B_π sia non singolare, possiamo trarre diverse conclusioni dal Corollario 2.4.7. Supponiamo per esempio che in aggiunta $\mathfrak{g}$ sia risolubile. Allora $\mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g}$, e il Corollario 2.4.7 implica la direzione principale del Corollario 2.4.6. Supponendo invece che $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, abbiamo:

COROLLARIO 2.4.8. *Se B_π è non singolare e $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, allora $\mathfrak{g}$ è semisemplice.*

Questo costituirà la metà del Teorema 2.6.10.

Dalla prima asserzione del Corollario 2.4.7, abbiamo:

COROLLARIO 2.4.9. *Se B_π è non singolare allora $rad\ \mathfrak{g} = Cent\ \mathfrak{g}$.*

In particolare:

COROLLARIO 2.4.10. *Se B_π è non singolare e $Cent\ \mathfrak{g} = 0$ allora $\mathfrak{g}$ è semisimple.*

Questo costituirà metà del Teorema 2.6.11.

I Corollari 2.4.8 e 2.4.10 sono importanti metodi pratici di dimostrare che delle algebre di Lie sono semisemplici. Applicando il Corollario 2.4.9 alla rappresentazione aggiunta ad di $\mathfrak{g}$, otteniamo B_{ad} non singolare $\Longrightarrow$ $rad\ \mathfrak{g} = Cent\ \mathfrak{g} = Ker\ ad \subset rad\ B_{ad} = 0$, e dunque $rad\ \mathfrak{g} = 0$. Abbiamo dunque:

COROLLARIO 2.4.11. *Se la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ è non singolare, $\mathfrak{g}$ è semisemplice.*

Il Corollario 2.4.11 è un altro metodo importante per dimostrare che delle algebre di Lie sono semisemplici. Vedremo in seguito che il viceversa è ancora vero (Teorema 2.6.6). Il Corollario 2.4.11 può anche essere dimostrato direttamente, senza il Teorema di Lie, ed anche quando $char\ \kappa$ è arbitraria.

2.5. Teoria dei Pesi.

Il lettore è di nuovo invitato a richiamare la discussione all'inizio del §2.2. Lo scopo principale di questo paragrafo è di dimostrare il teorema dei pesi per le algebre nilpotenti; questa è la generalizzazione naturale del Teorema 2.1.13. Ma includiamo anche diversi altri fatti generali sui pesi. Il campo κ è arbitrario.

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione. Le definizioni di peso, vettore peso e spazio peso date nel §2.1 per insiemi di endomorfismi si estendono naturalmente a questa situazione. Specificamente,

DEFINIZIONE 2.5.1. Sia $\lambda : \mathfrak{g} \to \kappa$ una funzione e $v \in V, v \neq 0$. Allora λ è un **peso** e v un **vettore peso** per $\mathfrak{g}$ e π se $(\pi(x) - \lambda(x))^m v = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$ e qualche $m \geq 1$.

(Ricordiamo che possiamo fare la scelta uniforme $m = dim\ V$).

DEFINIZIONE 2.5.2. Per ogni funzione $\lambda : \mathfrak{g} \to \kappa$, l'insieme di tutti i $v \in V$ che sono vettori peso per λ, insieme col vettore nullo, forma un sottospazio di V detto **spazio peso** di V per $\mathfrak{g}$ e λ. È indicato con V^λ o se necessario con $V^\lambda_\mathfrak{g}$.

Osserviamo che $V^\lambda \neq \{0\}$ se e solo se λ è un peso di $\mathfrak{g}$.

Per ogni $x \in \mathfrak{g}$ e $c \in \kappa$, $V^c_{\pi(x)}$ è già stato definito in §2.1. Spesso lo abbrevieremo con V^c_x. Osserviamo che per ogni funzione $\lambda : \mathfrak{g} \to \kappa$,

$$V^\lambda_\mathfrak{g} = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} V^{\lambda(x)}_x.$$

Al fine di mostrare la desiderata estensione del Lemma 2.1.12, useremo il lemma seguente, che avrà inoltre delle altre utili applicazioni:

LEMMA 2.5.1. *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie, e V e W due $\mathfrak{h}$-moduli. Siano $r, s, t \in \kappa$ tali che $t = r + s$. Allora per ogni $n \geq 0, v \in V, w \in W$ and $x \in \mathfrak{h}$,*

$$(x - t)^n \cdot v \otimes w = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - r)^i \cdot v \otimes (x - s)^{n-i} \cdot w$$

nel prodotto tensoriale $V \otimes W$ di $\mathfrak{h}$-moduli.

DIMOSTRAZIONE. Siano ρ, σ e τ le rappresentazioni di $\mathfrak{h}$ su V, W e $V \otimes W$, rispettivamente. Allora per ogni $x \in \mathfrak{h}$,

$$\tau(x) - t = (\rho(x) - r) \otimes 1 + 1 \otimes (\sigma(x) - s).$$

Ma gli endomorfismi $(\rho(x) - r) \otimes 1$ e $1 \otimes (\sigma(x) - s)$ di $End\ (V \otimes W)$ commutano. Quindi possiamo espandere $\tau(x) - t$ con il teorema del binomio; applicando il risultato a $V \otimes W$ dimostra il lemma. $\square$

PROPOSIZIONE 2.5.2. *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie, V e W $\mathfrak{h}$-moduli, e λ e μ funzioni di $\mathfrak{h}$ in κ. Allora*

$$V^\lambda \otimes W^\mu \subset (V \otimes W)^{\lambda+\mu}.$$

DIMOSTRAZIONE. Questo segue facilmente dal lemma e dalle definizioni; precisamente, prendiamo per r, s e t del lemma i valori $\lambda(x), \mu(x)$ e $(\lambda + \mu)(x)$. $\square$

Questa proposizione sarà combinata in modi interessanti con l'osservazione che segue per ottenere diversi corollari, uno dei quali è la desiderata estensione del Lemma 2.1.12.

OSSERVAZIONE 2.5.1. Se V e W sono moduli per un'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ e $\sigma : V \to W$ è un'applicazione di $\mathfrak{h}$-moduli, allora $\sigma(V^\lambda) \subset W^\lambda$ per ogni funzione $\lambda : \mathfrak{h} \to \kappa$. (Ciò segue immediatamente dalle definizioni.)

COROLLARIO 2.5.1. *Sia* $\mathfrak{h}$ *una sottoalgebra di Lie di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$, λ *e* μ *funzioni da* $\mathfrak{h}$ *a* κ. *Allora* $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$, *e in particolare,* $\mathfrak{g}^0$ *è una sottoalgebra di* $\mathfrak{g}$. *(Qui la rappresentazione rilevante è la rappresentazione aggiunta di* $\mathfrak{h}$ *su* $\mathfrak{g}$*).*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$x \otimes y \mapsto [x, y]$$

è una $\mathfrak{h}$-applicazione poiché $\mathfrak{h}$ agisce come derivazioni su $\mathfrak{g}$. Applichiamo ora la Proposizione 2.4.2 e l'osservazione precedente.
□

COROLLARIO 2.5.2. *Sia* $\mathfrak{h}$ *una sottoalgebra di Lie di un'algebra di Lie* $\mathfrak{g}$, V *un* $\mathfrak{g}$*-modulo e* λ *e* μ *funzioni di* $\mathfrak{h}$ *in* κ. *Allora* $\mathfrak{g}^\lambda \cdot V^\mu \subset V^{\lambda+\mu}$. *In particolare, ciascun* V^μ *è un* $\mathfrak{g}^0$*-sottomodulo di* V. *(Qui gli spazi peso sono rispetto ad* $\mathfrak{h}$*.)*

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$\mathfrak{g} \otimes V \to V$$
$$x \otimes v \mapsto x \cdot v$$

è chiaramente una $\mathfrak{h}$-applicazione. Applichiamo ancora la Proposizione 2.4.2 e l'osservazione precedente. □

OSSERVAZIONE 2.5.3. Una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h}$ di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è nilpotente se e solo se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0_{\mathfrak{h}}$, poiché questa inclusione asserisce semplicemente che per ogni $x \in \mathfrak{h}$, *ad* x è nilpotente su $\mathfrak{h}$; applichiamo il Teorema di Engel. In particolare, un'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ è nilpotente se e solo se $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0_{\mathfrak{h}}$.
Quindi il Corollario 2.5.2 ha come caso speciale:

COROLLARIO 2.5.3. *Se nel Corollario 2.5.1 e nel Corollario 2.5.2* $\mathfrak{h}$ *è nilpotente, allora gli spazi pesi menzionati sono* $\mathfrak{h}$*-invarianti.*

Il corollario seguente è la generalizzazione promessa del Lemma 2.1.12:

COROLLARIO 2.5.4. (CFR. LEMMA 2.1.12). *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie nilpotente,* V *un* $\mathfrak{g}$*-modulo,* $x \in \mathfrak{g}$ *e* $c \in \kappa$. *Allora* V^c_x *è un* $\mathfrak{g}$*-sottomodulo di* V.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Corollario 2.5.2 a $\mathfrak{h}$, spazio generato da x , $\lambda = 0$, e μ la funzione lineare su $\mathfrak{h}$ che porta x in c. ($\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0_{\mathfrak{h}}$ poiché $\mathfrak{g}$ è nilpotente.)
□

A questo punto, siamo pronti per dare la generalizzazione del Teorema 2.1.13 di §2.1. Ma un altro corollario si presenta naturalmente:

COROLLARIO 2.5.5. *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie,* V *un* $\mathfrak{g}$*-modulo e* V^* *il* $\mathfrak{g}$*-modulo contragradiente. Allora per ogni funzione* $\lambda, \mu : \mathfrak{g} \to \kappa$, $\langle (V^*)^\mu, V^\lambda \rangle = 0$ *a meno che* $\mu = -\lambda$.

DIMOSTRAZIONE. L'applicazione

$$V^* \otimes V \to \kappa$$
$$v^* \otimes v \mapsto \langle v^*, v \rangle$$

è un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli, ove κ è visto come il $\mathfrak{g}$-modulo banale di dimensione 1. Dunque ancora per la Proposizione 2.4.2 e per l'Osservazione successiva, $\langle (V^*)^\mu, V^\lambda \rangle \subset \kappa^{\lambda+\mu}_{\mathfrak{g}}$. Ma $\kappa^{\lambda+\mu}_{\mathfrak{g}} = 0$ a meno che $\lambda + \mu = 0$, dimostrando il corollario.
□

Ecco la generalizzazione del Teorema 2.1.13 per algebre di Lie nilpotenti:

TEOREMA 2.5.3 (IL TEOREMA DEI PESI; CF TEOREMA 2.1.13). *Sia* $\mathfrak{h}$ *un'algebra di Lie nilpotente e* $\pi : \mathfrak{h} \to End\ V$ *una rappresentazione split. Allora*

(1) *L'insieme* $\Delta(V)$ *dei pesi per* $\mathfrak{h}$ *su* V *è finito.*
(2) $V = \coprod_{\lambda \in \Delta(V)} V^{\lambda}$.
(3) *Ciascun* V^{λ} *è* $\mathfrak{h}$*-invariante.*
(4) *Se char* $\kappa = 0$*, su ciascun* V^{λ}*, i* $\pi(x)$ $(x \in \mathfrak{h})$ *possono essere posti simultaneamente in forma sopratriangolare, con i coefficienti della diagonale della matrice di* $\pi(x)$ *tutti uguali a* $\lambda(x)$.
(5) *Se char* $\kappa = 0$*, ciascun peso è una funzione lineare.*

DIMOSTRAZIONE. Imitiamo da vicino la dimostrazione del Teorema 2.1.13! Ma naturalmente, usiamo il Corollario 2.5.4 al posto del Lemma 2.1.12 e il Teorema di Lie in luogo della Proposizione 2.1.10. Dimostriamo dapprima che esiste un insieme finito Δ_0 di funzioni $\lambda : \mathfrak{h} \to \kappa$ e di sottospazi $\mathfrak{h}$-invarianti $V^{(\lambda)} \subset V^{\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta_0$ e tale che $V = \coprod V^{(\lambda)}$. Se *dim* $V = 1$ ciò è banale. Sia dunque *dim* $V > 1$. Se V è uno spazio peso per qualche λ l'asserto è vero. Altrimenti esiste $x \in \mathfrak{h}$ tale che V non è un autospazio generalizzato per *ad* x. Ma allora V è somma diretta di almeno due autospazi generalizzati per *ad* x. Per il Corollario 2.5.4 questi autospazi generalizzati sono invarianti per $\mathfrak{h}$. Quindi ci siamo ridotti ad una situazione analoga in dimensione minore. Quindi possiamo procedere per induzione. Possiamo ora assumere di avere una decomposizione come detto sopra. Dimostriamo ora che $\Delta = \Delta_0$ e che $V^{(\lambda)} = V^{\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta$. Per far questo, sia $\mu \in \Delta$, e sia $v \in V^{\mu}, v \neq 0$. Scriviamo $v = \sum v_{\lambda}$, $v_{\lambda} \in V^{(\lambda)}$ e scegliamo $v_{\lambda_0} \neq 0$. Per ogni $x \in \mathfrak{h}$

$$0 = (ad\ x - \mu(x))^{\dim\ V} v = \sum (ad\ x - \mu(x))^{\dim\ V} v_{\lambda}$$

e ciascun $(ad\ x - \mu(x))^{\dim\ V} v_{\lambda} \in V^{(\lambda)}$, dunque $(ad\ x - \mu(x))^{\dim\ V} v_{\lambda_0} = 0$. Siccome $ad\ x - \mu(x)$ è nilpotente su $V^{(\lambda_0)}$, può essere messo in forma triangolare con i coefficienti sulla diagonale principale uguali a $\lambda_0(x)$. Cosicché se $\mu(x) \neq \lambda_0(x)$ allora $(ad\ x - \mu(x))^m$ è non singolare per ogni $m \geq 1$ contraddicendo il fatto che $(ad\ x - \mu(x))^{dim\ V} v_{\lambda_0} = 0$. Dunque $\mu = \lambda$ e $\Delta = \Delta_0$. Questo dimostra inoltre che le componenti non nulle di v sono in $V^{(\mu)}$ e duqnue $v \in V^{(\mu)}$ cioè $V^{\mu} \subset V^{(\mu)}$ e quindi $V^{\mu} = V^{(\mu)}$.

Per dimostrare (4) applichiamo Il teorema di Lie su ciascun V^{μ}, e otteniamo che $\mathfrak{h}$ può essere messo in forma sopratriangolare. Ma allora per ogni $x \in \mathfrak{h}$, il fatto che $ad\ x - \lambda(x)$ è nilpotente su V^{λ} implica che i coefficienti sulla diagonale della matrice di $ad\ x$ sono tutti uguali a $\lambda(x)$. Infine (5) segue da (4).

Osserviamo incidentalmente che (3) segue anche dal Corollario 2.5.3. □

Il resto di questo paragrafo è dedicato ai corollari del Teorema 2.5.3. Per prepararci al primo corollario, osserviamo quanto segue:

OSSERVAZIONE 2.5.4. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie e V e W due moduli per essa. Se V e W sono split, allora anche $V \otimes W$ e V^* lo sono. Infatti, siano π_V e π_W le rappresentazioni associate a V e W, e sia $x \in \mathfrak{g}$. Allora $\pi_V(x)$ e $\pi_W(x)$ sono split, e quindi lo sono anche $\pi_V(x) \otimes 1$ e $1 \otimes \pi_W(x)$, come operatori su $V \otimes W$. Ma questi sono due operatori che commutano e sono split, dunque possono essere posti simultaneamente in forma sopratriangolare su $V \otimes W$ (Proposizione 2.1.10). Allora la loro somma può essere posta in forma sopratriangolare e dunque è essa stessa split. Ciò mostra che $V \otimes W$ è un $\mathfrak{g}$-modulo split. Il fatto che V^* è split segue dal fatto che la trasposta di una matrice sopratriangolare è sottotriangolare, e dunque il corrispondente operatore è split.

Corollario 2.5.6. *Sia $\mathfrak{h}$ un'algebra di Lie nilpotente, V e W due $\mathfrak{h}$-moduli split. Allora $V \otimes W$ e V^* sono $\mathfrak{h}$-moduli split, $\Delta(V \otimes W) = \Delta(V) + \Delta(W)$ (cioè $\{\lambda + \mu | \lambda \in \Delta(V), \mu \in \Delta(W)\}$) e $\Delta(V^*) = -\Delta(V)$ (cioè $\{-\lambda | \lambda \in \Delta(V)\}$). Inoltre, per ogni funzione $\lambda : \mathfrak{h} \to \kappa$, $(V \otimes W)^\lambda = \coprod V^\mu \otimes W^\nu$, ove $\mu \in \Delta(V)$, $\nu \in \Delta(W)$, e $\lambda = \mu + \nu$. Ancora, per ogni funzione $\lambda, \mu : \mathfrak{h} \to \kappa$, V^λ è ortogonale (rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$) a $(V^*)^\mu$ a meno che $\mu = -\lambda$, e V^λ e $(V^*)^{-\lambda}$ sono accoppiate in maniera non singolare.*

Dimostrazione. Poiché V e W sono split, il Teorema 2.4.3 si può loro applicare e dunque

$$V \otimes W = \coprod V^\mu \otimes W^n u,$$

ove μ varia su $\Delta(V)$ e ν su $\Delta(W)$. Ma poiché $V^\mu \otimes W^\nu \subset (V \otimes W)^{\mu+\nu}$ per la Proposizione 2.4.2, ed in vista del fatto che la somma del Teorema 2.4.33 è diretta, (2) applicato a $V \otimes W$, dobbiamo avere $(V \otimes W)^\lambda = \coprod V^\mu \otimes W^\nu$ ove $\mu \in \Delta(V), \nu \in \Delta(W)$ e $\lambda = \mu + \nu$, ed allo stesso tempo $\Delta(V \otimes W) = \Delta(V) + \Delta(W)$. Le asserzioni su V^* seguono dal Corollario 2.5.5, Teorema 2.4.3 e l'osservazione di prima. $\square$

Il risultato seguente fornisce la struttura che domina la parte più profonda della teoria delle algebre di Lie semisemplici. La forma di Killing sarà non singolare per le algebre di Lie semisemplici di caratteristica zero, come si vedrà nel Teorema 2.6.6.

Proposizione 2.5.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una sottoalgebra nilpotente, ed assumiamo che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}$ sia split. Sia Δ l'insieme dei pesi non nulli per questa rappresentazione. Allora*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \coprod_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}^\lambda$$

e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$. $\mathfrak{g}^0$ è una sottoalgebra, e più in generale, $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ per $\lambda, \mu \in \Delta \cup \{0\}$, e quindi ciascun $\mathfrak{g}^\lambda$ è un $\mathfrak{h}$-modulo ed un $\mathfrak{g}^0$-modulo. In particolare, se $\lambda + \mu \notin \Delta \cup \{0\}$ allora $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] = 0$. Se char $\kappa = 0$ allora $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$.

Sia B la forma di Killing di $\mathfrak{g}$. Allora $B(\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu) = 0$ a meno che $\mu = -\lambda$. Se B è non singolare, B induce un accoppiamento non singolare di $\mathfrak{g}^\lambda$ e $\mathfrak{g}^{-\lambda}$ per ogni funzione $\lambda : \mathfrak{h} \to \kappa$. In particolare, B è non singolare su $\mathfrak{g}^0$, $\Delta = -\Delta$, e dim $\mathfrak{g}^\lambda =$ dim $\mathfrak{g}^{-\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta$.

Dimostrazione. Il primo paragrafo è ovvio, infatti l'ultima affermazione segue dal Teorema 2.4.3 (5). Per dimostrare le affermazioni su B, osserviamo dapprima che l'applicazione $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ definita da $\langle \phi(x), y \rangle = B(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$ è una applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli poiché B è $\mathfrak{g}$-invariante; v. Proposizione 1.7.2 e Proposizione 1.8.6. Quindi per ogni funzione $\lambda, \mu : \mathfrak{h} \to \kappa$,

$$R(\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu) = \langle \phi(\mathfrak{g}^\lambda), \mathfrak{g}^\mu \rangle \subset \langle (\mathfrak{g}^*)^\lambda, \mathfrak{g}^\mu \rangle = 0$$

a meno che $\mu = -\lambda$. Se B è non singolare, ϕ è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli tra $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$, e dunque il resto della proposizione segue dal Corollario al Teorema 3. (Si veda anche l'ultima osservazione in §1.8). Diamo ora una seconda dimostrazione delle asserzioni su B: Se $x \in \mathfrak{g}^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}^\mu$ and $\mu \neq -\lambda$, allora *ad x ad y* è un endomorfismo a traccia nulla di $\mathfrak{g}$ poiché porta $\mathfrak{g}^\nu$ in $\mathfrak{g}^{\nu+\lambda+\mu}$ per ogni $\nu \in \Delta \cup \{0\}$. Dunque $B(x, y) = tr\ ad\ xad\ y = 0$, e quindi $B(\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu) = 0$. Il resto segue dal Teorema 2.5.3. $\square$

Le ultime due conseguenze del Teorema 2.5.3 saranno utili in seguito:

PROPOSIZIONE 2.5.5. *Supponiamo char* $\kappa = 0$. *Sia* $\mathfrak{h}$ *un'algebra di Lie nilpotente,* $\pi : \mathfrak{h} \to End\ V$ *una rappresentazione split. Per ogni* $\lambda \in \Delta(V)$ *sia* $m_\lambda = dim\ v^\lambda$ *(m sta per "molteplicità"). Allora per ogni* $x, y, \mathfrak{h}$,

$$B_\pi(x,y) = \sum_{\lambda \in \Delta(V)} m_\lambda \lambda(x)\lambda(y).$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema 2.4.3 (4). □

PROPOSIZIONE 2.5.6. *Sia* $\mathfrak{h}$ *un'algebra di Lie nilpotente,* $\pi : \mathfrak{h} \to End\ V$ *una rappresentazione split. Allora per ogni* $x \in \mathfrak{h}$, $\pi(x)$ *è nilpotente se e solo se tutti i pesi di* V *si annullano su* x.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema 2.4.3, e poi rendiamo $\pi(x)$ sopratriangolare in ciascuno spazio peso. (Qui *char* $\kappa = 0$ non occorre perché non dobbiamo triangolarizzare simultaneamente $\pi(\mathfrak{h})$.) □

2.6 Sottoalgebre di Cartan.

Il lettore può aver osservato che la Proposizione 2.4.4 sarebbe molto più semplice se la sottoalgebra nilpotente $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ coincidesse con $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0$. Abbiamo dunque:

DEFINIZIONE 2.6.1. Una **sottoalgebra di Cartan** di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è una sottoalgebra nilpotente $\mathfrak{h}$ tale che $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0$.

(Ricordiamo che $\mathfrak{h}$ è nilpotente se e solo se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0$, per l'Osservazione 2.5.1).

Cartan usò queste sottoalgebre per analizzare la struttura delle algebre di Lie semisemplici sui complessi e per ottenerne una classificazione completa. Questo paragrafo dimostrerà prima alcune proprietà importanti delle sottoalgebre di Cartan e poi mostreremo che esse esistono quando κ è un campo infinito.

Fissiamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su κ. κ sarà arbitrario fino al Lemma 2.5.4 ed infinito da lì in poi.

TEOREMA 2.6.1. *Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ tale che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}$ è split. Sia Δ l'insieme dei pesi non nulli per questa rappresentazione. Allora*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \coprod_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}^{\lambda}.$$

Per $\lambda \in \Delta$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^{\lambda}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda}$, e per ogni $\lambda, \mu \in \Delta$, $[\mathfrak{g}^{\lambda}, \mathfrak{g}^{\mu}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$. Se char $\kappa = 0$, gli elementi di Δ sono lineari.

Se inoltre la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ è non singolare, allora $\Delta = -\Delta$, la forma di Killing induce un accoppiamento non singolare di $\mathfrak{g}^{\lambda}$ e $\mathfrak{g}^{-\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Delta$, e la sua restrizione ad $\mathfrak{h}$ è non singolare. Infine, se char $\kappa = 0$, $\mathfrak{h}$ è abeliana.

DIMOSTRAZIONE. Tutto, tranne l'ultima affermazione è incluso nella Proposizione 2.5.4. L'ultima affermazione segue dal Corollario 2.2.6 del Teorema di Lie (§2.2) applicato alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}$. □

La nostra definizione di sottoalgebra di Cartan non è quella standard. Tuttavia, coincide con quella più comune grazie a Chevalley. Definiamo prima un concetto preliminare.

DEFINIZIONE 2.6.2. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$. Il **normalizzatore** $N(\mathfrak{h})$ di $\mathfrak{h}$ è $\{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

DEFINIZIONE 2.6.3 (CHEVALLEY). Una sottoalgebra di un'algebra di Lie è una **sottoalgebra di Cartan** se è nilpotente ed è uguale al suo normalizzatore.

PROPOSIZIONE 2.6.2. *Le due definizioni di sottoalgebra di Cartan sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra nilpotente di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{h} \subset N(\mathfrak{h})$ poiché $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra. Inoltre, $N(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0$ poiché per ogni $x \in \mathfrak{h}$, *ad* x porta $N(\mathfrak{h})$ in $\mathfrak{h}$ e lo manda in zero dopo qualche altra applicazione. Dunque una sottoalgebra di Cartan è uguale al suo normalizzatore ed è dunque una sottoalgebra di Cartan nel senso di Chevalley.

Per l'altra direzione, osserviamo che la rappresentazione di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0/\mathfrak{h}$ indotta dalla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0$ è una nilrappresentazione. Dunque se $\mathfrak{h}$ non è una sottoalgebra di Cartan, esiste un elemento non nullo $y + \mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^0/\mathfrak{h}$ che è annullato da $\mathfrak{h}$, per il teorema della nilrappresentazione (Teorema 2.3.5). Allora y è in $N(\mathfrak{h})$ ma non in $\mathfrak{h}$, e dunque $\mathfrak{h}$ non è una sottoalgebra di Cartan nel senso di Chevalley. □

Proposizione 2.6.3. *Una sottoalgebra di Cartan è una sottoalgebra nilpotente massimale, cioè è nilpotente e nessuna sottoalgebra che la contiene propriamente è nilpotente.*

Dimostrazione. Questo è facile poiché ogni sottoalgebra nilpotente che contiene una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ è contenuta in $\mathfrak{g}^0_{\mathfrak{h}}$. □

Attenzione: sottoalgebre nilpotenti massimali possono non essere sottoalgebre di Cartan. Nelle notazioni dell'Esempio **2.** di §1.1, lo spazio generato da y in quell'algebra di Lie di dimensione 2 è un controesempio. Questo è un fenomeno frequente.

Passiamo ora alla costruzione di queste importantissime sottoalgebre. Per questo ci occorre sapere qualcosa delle funzioni polinomiali.

Definizione 2.6.4. Sia V uno spazio vettoriale. Una funzione $f : V \to \kappa$ è una **funzione polinomiale** se è una combinazione lineare di prodotti di funzionali lineari. Osserviamo che poiché 1 è un prodotto banale, le funzioni costanti sono funzioni polinomiali.

Assumiamo per il resto di questo paragrafo che κ sia infinito

Lemma 2.6.4. *Il prodotto di due funzioni polinomiali non nulle è non nullo.*

Dimostrazione. Scegliamo una base $f_1, \ldots, f_n$ del duale V^* di V. Esiste un unico omomorfismo ϕ dall'algebra polinomiale $\kappa[X_1, \ldots, X_n]$ nell'algebra delle funzioni a valori in κ su V, tale che $\phi(X_i) = f_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. L'immagine di ϕ è chiaramente l'algebra delle funzioni polinomiali su V. Mostreremo ora che ϕ è un isomorfismo sulle funzioni polinomiali. Sia $f(X_1, \ldots, X_n)$ un polinomio non zero. Allora per [Lang1], esistono $c_1, \ldots, c_n \in \kappa$ tali che $f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$, poiché κ è infinito. Scegliamo $v \in V$ tale che $f_i(v) = c_i$ per ogni i. Allora $(\phi(f))(v) = f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ e dunque ϕ è iniettiva. Poiché $\kappa[X_1, \ldots, X_n]$ è un dominio integrale il lemma ne segue. □

Definizione 2.6.5. Una sottoalgebra $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ è **naturale** se esiste $x \in \mathfrak{h}$ tale che l'azione indotta di $ad\ x$ su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è non singolare.

Teorema 2.6.5. *$\mathfrak{g}$ possiede una sottoalgebra di Cartan. Infatti ogni sottoalgebra minimale naturale è una sottoalgebra di Cartan.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di dimensione n che sia minimale nella famiglia di sottoalgebre naturali. Se scegliamo una base per una rappresentazione π di $\mathfrak{h}$, i coefficienti della matrice di $\pi(x)$ rispetto alla base sono funzionali lineari su $\mathfrak{h}$. Ne segue che $det\ \pi(x)$ ed ogni coefficiente della matrice di $\pi(x)^k$ per un k fissato è una funzione polinomiale su $\mathfrak{h}$. Applichiamo questo fatto prima alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su se stessa. Se $\mathfrak{h}$ non è nilpotente esiste $x \in \mathfrak{h}$ tale che $(ad\ x)^n \neq 0$, per il Teorema di Engel, (Teorema 2.3.1). Se scegliamo una base per $\mathfrak{h}$, qualche coefficiente matriciale della funzione $y \mapsto (ad\ y)^n$ è una funzione polinomiale non nulla f su $\mathfrak{h}$. Consideriamo ora la rappresentazione ρ di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Poiché $\mathfrak{h}$ è naturale, $y \mapsto det\ \rho(y)$ è un'altra funzione polinomiale non nulla g su $\mathfrak{h}$. Allora $fg \neq 0$, dunque esiste $z \in \mathfrak{h}$ tale che $(fg)(z) \neq 0$. Affermiamo che $\mathfrak{g}^0_z$ è una sottoalgebra naturale propriamente contenuta in $\mathfrak{h}$. È contenuta in $\mathfrak{h}$ poiché nessuna potenza di $ad\ z$ può portare alcunché fuori di $\mathfrak{h}$ dentro $\mathfrak{h}$, meno che mai lo zero. Ma $\mathfrak{h}$ non è contenuto in $\mathfrak{g}^0_z$ poiché $ad\ z$ non è nilpotente su $\mathfrak{h}$, per il Lemma 2.1.11. $\mathfrak{g}^0_z$ è una sottoalgebra per il Corollario 2.5.1 della Proposizione 2.5.2, applicata allo spazio generato da z. Infine, $\mathfrak{g}^0_z$ è naturale poiché qualunque cosa portata al suo interno da $ad\ z$ è annullata da qualche potenza di $ad\ z$ e dunque è già dentro di essa. Per evitare questa contraddizione $\mathfrak{h}$ deve essere stata nilpotente. Infine, poiché $\mathfrak{h}$ è naturale, esiste $w \in \mathfrak{h}$ tale che l'azione di w su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è non singolare. Ma allora $w' \notin \mathfrak{h}$ implica $[w', w] \notin \mathfrak{h}$, il che mostra che $N(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Allora $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Cartan nel senso di Chevalley, ed il teorema è dimostrato. □

DEFINIZIONE 2.6.6. Un elemento $x \in \mathfrak{g}$ è **generico** se $dim\ \mathfrak{g}_x^0 \leq dim\ \mathfrak{g}_y^0$ per ogni $y \in \mathfrak{g}$.

COROLLARIO. *Se $x \in \mathfrak{g}$ è generico, $\mathfrak{g}_x^0$ è una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ contenente x.*

DIMOSTRAZIONE. Affermiamo che $\mathfrak{g}_x^0$ è una sottoalgebra naturale minimale. È naturale, esattamente come lo era $\mathfrak{g}_z^0$ nella dimostrazione precedente. Se ci fosse una sottoalgebra naturale più piccola $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_x^0$, ci sarebbe un elemento $y \in \mathfrak{h}$ la cui azione su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ è non singolare. Allora $\mathfrak{g}_y^0$ sarebbe contenuto in $\mathfrak{h}$, proprio come $\mathfrak{g}_z^0$ era contenuto in $\mathfrak{h}$ nella dimostrazione precedente. Ma ciò implicherebbe che $dim\ \mathfrak{g}_y^0 < dim\ \mathfrak{g}_x^0$, il che è impossibile. $\square$

Chiudiamo questo paragrafo con un risultato importante per lo studio delle algebre di Lie semisemplici.

DEFINIZIONE 2.6.7. Un operatore lineare è **semisemplice** se ogni sottospazio invariante ha un complemento invariante. Un elemento $x \in \mathfrak{g}$ è **semisemplice** se $ad\ x$ è semisemplice.

OSSERVAZIONE 2.6.1. Non è difficile vedere che un operatore split è semisemplice se e solo se è diagonalizzabile.

TEOREMA 2.6.6. *Se $\mathfrak{a}$ è una famiglia commutativa di elementi semisemplici di $\mathfrak{g}$, allora esiste una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ che contiene $\mathfrak{a}$. (Un sottoinsieme $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ è una famiglia* **commutativa** se $[x, y] = 0$ per ogni $x, y \in \mathfrak{a}$.)

DIMOSTRAZIONE. Affermiamo dapprima che se $x \in \mathfrak{g}$ è semisemplice, allora $\mathfrak{g}_x^0 = Ker\ ad\ x$. Poiché $Ker\ ad\ x$ è invariante per $ad\ x$ possiamo scegliere un complemento invariante $\mathfrak{u}$. Allora $ad\ x$ è non singolare su $\mathfrak{u}$. Dunque ogni elemento di $\mathfrak{g}$ con una componente non nulla in $\mathfrak{u}$ non può essere in $\mathfrak{g}_x^0$. Ciò dimostra la nostra affermazione.

Sia $\mathfrak{l}$ il centralizzatore di $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$, cioè l'insieme di tutti gli $x \in \mathfrak{g}$ tali che $[x, y] = 0$ per ogni $y \in \mathfrak{a}$. Allora $\mathfrak{l}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ che contiene $\mathfrak{a}$. Scegliamo una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{l}$, per il Teorema 2.6.5. Poiché $\mathfrak{a}$ è nel centro di $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$ è nel normalizzatore di $\mathfrak{h}$ e dunque in $\mathfrak{h}$. Allora $\mathfrak{h}$ è la sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{g}$ richiesta. Infatti, dobbiamo solo mostrare che $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$, poiché $\mathfrak{h}$ è nilpotente. Sia $x \in N(\mathfrak{h})$. Per $y \in \mathfrak{a}$, $ad\ y(x) \in \mathfrak{h}$ e $(ad\ y)^2(x) = 0$ e quindi $x \in \mathfrak{g}_y^0$. Dunque per l'affermazione iniziale, $x \in Ker\ ad\ y$. Questo vale per ogni $y \in \mathfrak{a}$. Dunque $x \in \bigcap Ker\ ad\ y$, cioè $[y, x] = 0$ per ogni $y \in \mathfrak{a}$, ma allora $x \in \mathfrak{l}$, il centralizzatore di $\mathfrak{a}$. Ma allora x deve appartenere a $\mathfrak{h}$, poiché $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra di Cartan di $\mathfrak{l}$ e quindi $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. $\square$

2.7 I criteri di Cartan.

In questo paragrafo, metteremo insieme molti dei risultati precedenti per ottenere i famosi criteri di Cartan per la risolubilità e la semisemplicità. Questi saranno conseguenze di un solo "criterio di Cartan generalizzato".

Assumiamo ovunque in questo paragrafo che *char* $\kappa = 0$, e fissiamo un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan di una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{b}$ di $\mathfrak{g}$ che sarà specificata in seguito, ($\mathfrak{h}$ esiste per il Teorema 2.6.5 perché κ è automaticamente infinito). Supponiamo che α sia un peso (eventualmente 0) della rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{b}$. Un **α-nodo** è un elemento della forma $[x, y]$ ove $x \in \mathfrak{b}^{\alpha}$ e $y \in \mathfrak{b}^{-\alpha}$. Ogni α-nodo è in $\mathfrak{h}$ per il Corollario 2.5.1 della Proposizione 2.5.2

Lemma 2.7.1. *Sia $\pi : \mathfrak{b} \to V$ una rappresentazione, x un α-nodo e $\lambda : \mathfrak{h} \to \kappa$ un peso per $\pi|\mathfrak{h}$. Allora esiste un numero razionale q_λ tale che $\lambda(x) = q_\lambda \alpha(x)$.*

Dimostrazione. Sia $W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V^{\lambda+n\alpha}$. Allora $\pi(\mathfrak{b}^{\alpha}), \pi(\mathfrak{b}^{-\alpha})$ e $\pi(x)$ lasciano W invariante (v. il Corollario 2.5.2 della Proposizione 2.5.2). Dalla definizione di α-nodo segue che $\pi(x)$ è un commutatore di operatori su W ed è perciò a traccia nulla su W. D'altro lato, $\pi(x)$ può essere triangolarizzata superiormente su $V^{\lambda+n\alpha}$, con coefficienti sulla diagonale tutti uguali a $(\lambda + n\alpha)(x)$. Dunque

$$tr\ \pi(x)|W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} dim\ V^{\lambda+n\alpha}(\lambda + n\alpha)(x).$$

Pertanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} dim\ V^{\lambda+n\alpha}(\lambda + n\alpha)(x) = 0,$$

e quindi

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} dim\ V^{\lambda+n\alpha})\lambda(x) = (-\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\ dim\ V^{\lambda+n\alpha})\alpha(x).$$

Ma λ è un peso per $\pi|\mathfrak{h}$, e dunque $dim\ V^{\lambda} \neq 0$. Allora il coefficiente di $\lambda(x)$ nel membro a sinistra dell'ultima equazione è un intero positivo e dunque non nullo in κ perché *char* $\kappa = 0$. Poiché il coefficiente di $\alpha(x)$ nel membro a destra è un intero, il lemma segue. $\square$

Osservazione 2.7.1. L'artificio usato in questa dimostrazione è stato già discusso in §2.2; vedere la dimostrazione del Lemma 2.2. e l'osservazione che la segue.

Lemma 2.7.2. *Nelle notazioni del Lemma 2.7.1, se π è split, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $B_\pi(x, x) = 0$.
(2) *Tutti i pesi di $\pi|\mathfrak{h}$ si annullano su x.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.5.5,

$$B_\pi(x, x) = \sum_{\lambda \in \Delta(V)} m_\lambda \lambda(x)^2,$$

ove $m_\lambda = dim\ V^\lambda$. Allora (2) $\Longrightarrow$ (1).

Viceversa,

$$0 = B_\pi(x, x) = \sum_{\lambda \in \Delta(V)} m_\lambda \lambda(x)^2 = (\sum_{\lambda \in \Delta(V)} m_\lambda (q_\lambda)^2)(\alpha(x))^2,$$

per il Lemma 2.7.1. Se $\alpha(x) \neq 0$, allora ciascun q_λ deve essere zero poiché ciascun m_λ è un intero positivo. Dunque $\lambda(x) = 0$ per ogni $\lambda \in \Delta(V)$, per definizione di q_λ, e dunque (2) vale in questo caso. Ma se $\alpha(x) = 0$ allora direttamente dal Lemma 2.7.1 abbiamo $\lambda(x) = 0$ per ogni $\lambda \in \Delta(V)$, e dunque (2) vale ancora, il che dimostra il Lemma 2.7.2. $\square$

LEMMA 2.7.3. *Assumiamo che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{b}$ sia split e che $\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. Allora $\mathfrak{h}$ è generato dai suoi nodi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Delta(\mathfrak{b})$ l'insieme dei pesi per $\mathfrak{h}$ che agisce su $\mathfrak{b}$, cosicché $\mathfrak{b} = \coprod_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{b})} \mathfrak{b}^\lambda$ per il Teorema 2.5.3. Allora

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{b})} [\mathfrak{b}^\lambda, \mathfrak{b}^{-\lambda}] + \sum_{\lambda, \mu \in \Delta(\mathfrak{b}), \lambda + \mu \neq 0} [\mathfrak{b}^\lambda, \mathfrak{b}^\mu].$$

Per il Corollario 2.5.1 della Proposizione 2.5.2, il primo termine a destra è contenuto in $\mathfrak{b}^0$, ed il secondo termine è contenuto in $\coprod \mathfrak{b}^\lambda$ ove λ varia tra gli elementi non nulli di $\Delta(\mathfrak{b})$. Poiché $\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}^0$, dobbiamo avere

$$\mathfrak{h} = \sum_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{b})} [\mathfrak{b}^\lambda, \mathfrak{b}^{-\lambda}],$$

e dunque $\mathfrak{h}$ è generato dai suoi nodi. $\square$

DEFINIZIONE 2.7.1. Una rappresentazione π di $\mathfrak{g}$ è detta **quasi fedele** se

$$Ker\ \pi \subset rad\ \mathfrak{g},$$

o equivalentemente se $Ker\ \pi$ è risolubile.

Ovviamente una rappresentazione fedele di $\mathfrak{g}$ (cioè una rappresentazione π con $Ker\ \pi = 0$) è quasi fedele. Ma ci sono altre importanti rappresentazioni quasi fedeli; per esempio, la rappresentazione aggiunta.

Ecco il criterio generalizzato di Cartan:

TEOREMA 2.7.4. *Sia π una rappresentazione quasi fedele di $\mathfrak{g}$. Allora $rad\ \mathfrak{g}$ è esattamente l'annullatore di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rispetto a B_π.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che $rad\ \mathfrak{g}$ annulla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è il contenuto del Corollario 2.2.7 del Teorema di Lie (§2.2). Dobbiamo dimostrare il viceversa.

Assumiamo prima che sia π che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ siano split e che π sia fedele. Sia $\mathfrak{a}$ l'annullatore di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rispetto a B_π. Allora $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ per il corollario della Proposizione 1.7.4. Poiché vogliamo dimostrare che $\mathfrak{a} \subset rad\ \mathfrak{g}$, è sufficiente mostrare che $\mathfrak{a}$ è risolubile. Nella terminologia del §1.5, abbiamo la successione dei commutatori

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots .$$

Scegliamo k tale che $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k+1}$, cioè $\mathfrak{a}_k = [\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k]$. Sia $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_k$. È sufficiente mostrare che $\mathfrak{b} = 0$. Ora $\mathfrak{b}$ possiede una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h}$ per il Teorema 2.6.5. Per il Lemma 2.7.3, $\mathfrak{h}$ è generata dai suoi nodi. Ma $B_\pi(\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$, e quindi $B_\pi(\mathfrak{b}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$, e allora $B_\pi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0$. Allora il Lemma 2.7.2 implica che tutti i pesi di $\pi|\mathfrak{h}$ si annullano su ogni nodo. Ma questi pesi sono lineari poiché $char\ \kappa = 0$ (Teorema 2.5.3 (5)), e poiché $\mathfrak{h}$ è generato dai suoi nodi, ogni peso per $\pi|\mathfrak{h}$ si annulla su $\mathfrak{h}$, cioè zero è l'unico peso per $\pi|\mathfrak{h}$. Dunque per ogni $x \in \mathfrak{h}$, $\pi(x)$ è nilpotente. Poiché π è fedele, $ad\ x$ è nilpotente su $\mathfrak{b}$ per ogni $x \in \mathfrak{h}$, in vista della Proposizione

2.3.2. Allora $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^0_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, mostrando che $\mathfrak{b}$ stessa è nilpotente. Ma poiché $\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, dobbiamo avere $\mathfrak{b} = 0$, completando la dimostrazione del teorema nel caso in cui π e la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ sono split e π è fedele.

Continuiamo ad assumere la proprietà split, ma assumiamo ora che π sia quasi fedele. Sia $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/Ker\ \pi$, cosicché π induce una rappresentazione fedele π' di $\mathfrak{g}'$. Poiché $Ker\ \pi$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}$, abbiamo che $Ker\ \pi \subset rad\ \mathfrak{g}$. Usando la Proposizione 1.3.5 e 1.5.3, abbiamo che $rad\ \mathfrak{g}' = (rad\ \mathfrak{g})/Ker\ \pi$. Inoltre $Ker\ \pi \subset rad\ B_\pi$ e $B_{\pi'}$ è esattamente la forma su $\mathfrak{g}'$ indotta da B_π. Per di più $rad\ \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']^\perp$ rispetto a $B_{\pi'}$. Ma $\sigma[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ ove $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/Ker\ \pi$ è l'applicazione quoziente. Dunque $x \in \mathfrak{g}$ annulla $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ rispetto a B_π se e solo se $\sigma(x)$ annulla $\sigma[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ rispetto a $B_{\pi'}$ cioè se e solo se $\sigma(x) \in rad\ \mathfrak{g}'$. Ma ciò significa che $x \in rad\ \mathfrak{g}$. Allora il teorema è dimostrato nell'ipotesi che valga la proprietà split.

Per rimuovere quest'ipotesi, sia K una chiusura algebrica di κ. Allora $rad\ \mathfrak{g}_K$ è l'annullatore di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_K = [\mathfrak{g}_K, \mathfrak{g}_K]$ rispetto al K-ampliamento di B_π (v. §1.9). Ma poiché $(rad\ \mathfrak{g}_K) \cap \mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g}$, vediamo ora che $rad\ \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ rispetto a B_π, completando la dimostrazione del teorema. □

Osservazione 2.7.2. Benché il Teorema 2.7.4 contenga il Corollario 2.3.7 solo nel caso in cui π è quasi fedele, il Corollario 2.3.7 nel caso speciale in cui π è fedele lo implica facilmente nella sua completa generalità. Infatti, sia $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Ker\ \pi$ l'applicazione quoziente e sia π' la rappresentazione fedele di $\mathfrak{g}/Ker\ \pi$ indotta da π. Assumendo che il Corollario 2.3.7 valga per π' abbiamo che

$$0 = B_{\pi'}([\sigma(\mathfrak{g}), \sigma(\mathfrak{g})], rad\ \sigma(\mathfrak{g})) = B_{\pi'}(\sigma[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], rad\ \sigma(\mathfrak{g})).$$

Ma $\sigma(rad\ \mathfrak{g})$ è un ideale risolubile in $\sigma(\mathfrak{g})$, e dunque $\sigma(rad\ \mathfrak{g}) \subset rad\ \sigma(\mathfrak{g})$. Allora

$$B_{\pi'}(\sigma[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \sigma(rad\ \mathfrak{g})) = 0.$$

Ma $Ker\ \pi \subset rad\ B_\pi$, e $B_{\pi'}$ è proprio la forma indotta da B_π su $\mathfrak{g}/Ker\ \pi = \sigma(\mathfrak{g})$. Dunque

$$B_\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], rad\ \mathfrak{g}) = 0$$

e dunque il Corollario 2.3.7 vale in generale.

Abbiamo già dato alcune conseguenze importanti di metà del Teorema di Lie. (In effetti, ci occorreva solo il caso in cui π è fedele perché siamo sempre partiti dall'ipotesi che B_π sia non singolare e $Ker\ \pi \subset rad\ B_\pi = 0$ in tal caso). Ora faremo la stessa cosa per il resto del Teorema di Lie. I prossimi quattro teoremi saranno dimostrati insieme; infatti essi sono tutti conseguenza immediata del Teorema di Lie.

Teorema 2.7.5. *Sia π una rappresentazione quasi fedele di $\mathfrak{g}$. Allora $rad\ B_\pi \subset rad\ \mathfrak{g}$. In particolare, se B è la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ allora $rad\ B \subset rad\ \mathfrak{g}$.*

Teorema 2.7.6. *(Criterio di Cartan per la semisemplicità). $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se la forma di Killing di $\mathfrak{g}$ è non singolare.*

Teorema 2.7.7. *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora la traccia di ogni rappresentazione fedele di $\mathfrak{g}$ è non singolare.*

Teorema 2.7.8. *Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice, allora $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Dimostrazione. Nelle notazioni del Teorema 2.6.4, il radicale $rad\ B_\pi$ è contenuto nell'annullatore di ogni sottoinsieme di $\mathfrak{g}$, e dunque il Teorema 2.7.4 implica il Teorema 2.7.5. Il Teorema 2.7.6 segue dal Corollario 2.2.11 del Teorema di Lie (§2.2), ed il Teorema 2.7.7 è immediato. (Osserviamo che il Teorema 2.7.7 non sarebbe stato più forte se lo avessimo enunciato per una qualunque rappresentazione quasi fedele perché ogni tale rappresentazione di un'algebra di Lie semisemplice è ovviamente fedele). Usando la rappresentazione aggiunta nel Teorema 2.7.4 ci dà ora anche il Teorema 2.7.8. (Per essere precisi, non stiamo neanche usando la non singolarità della forma di Killing nel dimostrare il Teorema 2.7.8; tutto quello che ci occorre veramente è quella parte della Proposizione 1.7.3 che vale quando la forma può essere singolare). □

TEOREMA 2.7.9. *Sia K un ampliamento di κ. Allora $(rad\ \mathfrak{g})_K = rad\ \mathfrak{g}_K$. In particolare, $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se $\mathfrak{g}_K$ è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $(rad\ \mathfrak{g})_K$ è un ideale risolubile di $\mathfrak{g}_K$, $(rad\ \mathfrak{g})_K \subset rad\ \mathfrak{g}_\kappa$. È sufficiente mostrare che $\mathfrak{g}_K/(rad\ \mathfrak{g})_K$ è semisemplice. Ma questo è isomorfo a $(\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g})_K$, dunque ci siamo ridotti a dimostrare l'ultima affermazione del teorema. Ma ciò segue immediatamente dal Teorema 2.7.6. □

Oltre al criterio di Cartan per la semisemplicità abbiamo i Teoremi 2.7.10 e 2.7.11, che sono conseguenza anche del Teorema 2.10.2, come vedremo.

TEOREMA 2.7.10. *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{g}$ ha una traccia non singolare.*

DIMOSTRAZIONE. Una direzione segue dal Corollario 2.2.8 del Teorema di Lie, e l'altra dal Teorema 2.7.6 e 2.7.8. □

TEOREMA 2.7.11. *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se $Cent\ \mathfrak{g} = 0$ e $\mathfrak{g}$ ha una traccia non singolare*

DIMOSTRAZIONE. Mettiamo insieme il Corollario 10 del Teorema di Lie (§2.2) ed il Teorema 2.7.6. □

Passiamo ora ai criteri di risolubilità.

TEOREMA 2.7.12. *Sia π una rappresentazione quasi fedele di $\mathfrak{g}$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{g}$ è risolubile.*
(2) $B_\pi(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.
(3) $B_\pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.
(4) $B_\pi(x, x) = 0$ *per ogni* $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathfrak{g}$ è risolubile allora (2) e quindi (3) e (4) valgono, per il Teorema 2.7.4, o anche per il Corollario 2.2.7 del Teorema di Lie. Viceversa, se (2) vale, allora $\mathfrak{g}$ è risolubile per il Teorema 2.7.4. Se (3) vale, allora (2) vale per $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ al posto di $\mathfrak{g}$, e poiché $\pi|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è una rappresentazione quasi fedele di $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, l'implicazione già dimostrata ci dice che $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ è risolubile. Allora $\mathfrak{g}$ stesso è risolubile. Infine, (4) implica (3) per il principio generale di polarizzazione per le forme bilineari simmetriche, ed il teorema è dimostrato. □

TEOREMA 2.7.13. CRITERIO DI CARTAN DI RISOLUBILITÀ. *Una sottoalgebra di Lie di End V (V uno spazio vettoriale) è risolubile se e solo se $tr\ xy = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, o equivalentemente, se e solo se $tr\ x^2 = 0$ per ogni $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 2.6.12 ad una rappresentazione fedele. □

TEOREMA 2.7.14. *Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ (eventualmente $\mathfrak{g}$ stessa), e sia B la forma di Killing di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{h}$ è risolubile se e solo se $B(\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ o equivalentemente se e solo se $B(x, x) = 0$ per ogni $x \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. In particolare, $\mathfrak{h}$ è risolubile se $B|\mathfrak{h} = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema 2.7.12 alla rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{h}$ su $\mathfrak{g}$ che è quasi fedele. □

OSSERVAZIONE 2.7.3. Il Teorema 2.7.6 si deduce di solito dal Teorema 2.7.14, come segue: Sia B la forma di Killing di $\mathfrak{g}$. Allora $rad\ \mathfrak{g}$ è un ideale per il Corollario della Proposizione 1.7.4, e $rad\ B$ è risolubile per l'ultima affermazione del Teorema 2.7.14, applicata a $\mathfrak{h} = rad\ B$. Dunque $rad\ B \subset rad\ \mathfrak{g} = 0$, dimostrando il Teorema 2.7.6. Ma grazie al Teorema 2.7.4, non ci occorreva un criterio di risolubilità per dimostrare il Teorema 2.7.6.

2.8 Algebre di Lie semplici e semisemplici.

Sappiamo già che ogni prodotto diretto di algebre di Lie semplici è semisemplice (Proposizione 1.5.8). Il nostro obiettivo ora è di dimostrare il viceversa quando $char\ \kappa = 0$. Perciò assumiamo che $char\ \kappa = 0$ ovunque in questo paragrafo.

TEOREMA 2.8.1. *Sia $\mathfrak{g}$ una algebra di Lie semisemplice, $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{a}^\perp$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$ come algebre di Lie, dove $^\perp$ denota il complemento ortogonale rispetto alla forma di Killing B di $\mathfrak{g}$. Inoltre, sia $\mathfrak{a}$ che $\mathfrak{a}^\perp$ sono semisemplici.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp] = 0$ poiché

$$B(\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp]) = B([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{a}^\perp) \subset B(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp) = 0$$

e poiché B è non singolare (Teorema 2.7.6). Ma $\mathfrak{a}^\perp$ è un ideale per il Corollario della Proposizione 1.7.4, e dunque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ è un ideale abeliano di $\mathfrak{g}$. Poiché $\mathfrak{g}$ è semisemplice, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$. Dobbiamo ora avere $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ (Osservazione (1) dopo la Proposizione 1.7.3), e quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ come algebre di Lie. Il fatto che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}^\perp$ sono semisemplici ora segue dalla Proposizione 1.5.6. □

Possiamo anche ragionare come segue, usando sostanzialmente il Criterio di risolubilità di Cartan invece del suo criterio di semisemplicità: Come sopra, $\mathfrak{a}^\perp$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, cosicché $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ è un ideale su cui B si annulla. Dunque per il Teorema 2.5.14, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ è un ideale risolubile, ed è dunque zero. La dimostrazione si conclude come sopra.

Possiamo ora vedere che un'algebra di Lie semisemplice possiede una struttura piuttosto rigida:

TEOREMA 2.8.2. *Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se $\mathfrak{g}$ è della forma $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \cdots \times \mathfrak{a}_n$, ove gli $\mathfrak{a}_i$ sono ideali semplici di $\mathfrak{g}$. In questo caso, gli $\mathfrak{a}_i$ sono tutti gli ideali semplici di $\mathfrak{g}$, ed ogni ideale di $\mathfrak{g}$ è il prodotto di alcuni degli $\mathfrak{a}_i$. In particolare, $\mathfrak{g}$ possiede esattamente 2^n ideali.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 1.5.8, un prodotto diretto di algebre di Lie semplici è semisemplice. Viceversa, supponiamo che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice. Dimostreremo per induzione su $dim\ \mathfrak{g}$ che $\mathfrak{g}$ è un prodotto di ideali semplici. Ciò è banale se $dim\ \mathfrak{g} = 0$. Supponiamo che sia vero per algebre di Lie semisemplici di dimensione minore di $dim\ \mathfrak{g}$, e supponiamo che $dim\ \mathfrak{g} > 0$. Se $\mathfrak{g}$ non ha ideali diversi da 0 e da $\mathfrak{g}$, allora $\mathfrak{g}$ deve essere semplice, poiché $dim\ \mathfrak{g}$ non può essere 1, e quindi abbiamo concluso in questo caso. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale non nullo di $\mathfrak{g}$ non uguale a $\mathfrak{g}$, allora per il Teorema 2.8.1 , $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$, e $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}^\perp$ sono ideali semisemplici di $\mathfrak{g}$. L'ipotesi induttiva si applica a loro, ed un qualunque ideale semplice di $\mathfrak{a}$ o di $\mathfrak{a}^\perp$ è un ideale semplice di $\mathfrak{g}$. Ciò dimostra che $\mathfrak{g}$ è un prodotto di ideali semplici.

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che $\mathfrak{a}$ sia un ideale semplice di $\mathfrak{g}$ ma non coincida con uno degli $\mathfrak{a}_i$. Allora per ogni i, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i$ è un ideale di $\mathfrak{a}$, che non può essere tutto $\mathfrak{a}$, perché allora avremmo $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_i$, e $\mathfrak{a}$ sarebbe un ideale non nullo di $\mathfrak{a}_i$ diverso da $\mathfrak{a}_i$, contraddicendo la semplicità di $\mathfrak{a}_i$. Dunque poiché $\mathfrak{a}$ è semplice, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = 0$, e dunque $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = 0$. Allora $\mathfrak{a} \subset Cent\ \mathfrak{g} = 0$, una contraddizione. Ciò mostra che gli $\mathfrak{a}_i$ sono tutti gli ideali semplici di $\mathfrak{g}$. Ora sia $\mathfrak{a}$ un qualunque ideale di $\mathfrak{g}$. Allora, ancora per il Teorema 2.8.1, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$, e $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}^\perp$ sono ideali semisemplici di $\mathfrak{g}$. Per la prima parte della dimostrazione, $\mathfrak{a}$ è un prodotto diretto di ideali semplici di $\mathfrak{a}$, e questi devono essere tutti ideali semplici di $\mathfrak{g}$. Dunque $\mathfrak{a}$ è un prodotto di alcuni degli $\mathfrak{a}_i$, completando la dimostrazione. □

TEOREMA 2.8.3. *L'immagine di un'algebra di Lie semisemplice secondo un omomorfismo è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Questo segue immediatamente dal Teorema 2.8.1 o dal Teorema 2.8.2. □

OSSERVAZIONE 2.8.1. Per la prima asserzione del Teorema 2.8.2, un'algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ soddisfa la condizione $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, poiché lo stesso è vero per una algebra di Lie semplice (Proposizione 1.3.12). Ma ricordiamo che già sapevamo questo fatto nel Teorema 2.8.8.

2.9 Algebre di Lie semisemplici e moduli semisemplici.
Questo paragrafo è dedicato ad un'ulteriore importante caratterizzazione delle algebre di Lie semisemplici in caratteristica zero, questa volta in termini di moduli semisemplici.

Supponiamo per il momento che κ sia un campo arbitrario. Fissiamo una algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Osservazione 2.9.1. Se $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ è una rappresentazione su uno spazio vettoriale V, allora π si estende ad una applicazione lineare

$$\pi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to End\ V$$

$$x \otimes y \mapsto \pi(x)\pi(y)$$

Se V è un $\mathfrak{g}$-modulo, ricordiamo dal §1.8 che $V^{\mathfrak{g}}$ è lo spazio dei $\mathfrak{g}$-invarianti su V.

Lemma 2.9.1. *Se $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ è una rappresentazione su uno spazio vettoriale V e se $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g}$, allora*

$$\pi(x \cdot c) = [\pi(x), \pi(c)],$$

ove x agisce su c secondo l'azione di $\mathfrak{g}$ sul prodotto tensoriale $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, e π agisce su $x \cdot c$ come nell'Osservazione precedente. In particolare, se $c \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, allora $\pi(c)$ è un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli.

Dimostrazione. Sia $y, z \in \mathfrak{g}$ allora

$$\begin{aligned}
&\pi(x \cdot (y \otimes z)) = \pi([x, y] \otimes z) + \pi(y \otimes [x, z]) \\
&= \pi[x, y]\pi(z) + \pi(y)\pi[x, z] \\
&\pi(x)\pi(y)\pi(z) - \pi(y)\pi(x)\pi(z) + \pi(y)\pi(x)\pi(z) - \pi(y)\pi(z)\pi(x) \\
&[\pi(x), \pi(y \otimes z)],
\end{aligned}$$

ed il lemma ne segue immediatamente. □

Sia C una forma bilineare su $\mathfrak{g}$. Ricordiamo dal §1.7 l'applicazione $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ definita da $\langle \phi(x), y \rangle = C(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$. Allora ϕ è un isomorfismo se e solo se C è non singolare. Supponiamo di essere in questa ipotesi. Scegliamo una base $\{y_1, \dots, y_n\}$ di $\mathfrak{g}$ e sia $\{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ la corrispondente base duale di $\mathfrak{g}^*$. Poniamo $x_i = \phi^{-1}(y_i^*) \in \mathfrak{g}$ $(i = 1, \dots, n)$. Allora $C(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, cioè $\{x_1, \dots, x_n\}$ è la base "duale" a $\{y_1, \dots, y_n\}$ rispetto a C. Sia ora $c = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Supponiamo inoltre che C sia una forma bilineare $\mathfrak{g}$-invariante, e consideriamo l'elemento $d = \sum_{i=1}^n y_i^* \otimes y_i \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$. Per la Proposizione 1.8.3, l'isomorfismo canonico da $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ a $Hom\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli. Ma l'immagine di d per questo isomorfismo è chiaramente l'endomorfismo identità di $\mathfrak{g}$, che è una applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli e quindi un elemento $\mathfrak{g}$-invariante di $Hom\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Allora $d \in (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Ma poiché C è $\mathfrak{g}$-invariante, ϕ è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli da $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}^*$, per la Proposizione 1.8.6. Dunque l'applicazione

$$\phi^{-1} \otimes 1 : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

è un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli, e dunque $c = (\phi^{-1} \otimes 1)(d) \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Riassumendo, se C è una forma bilineare non singolare $\mathfrak{g}$-invariante su $\mathfrak{g}$, allora l'elemento $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ definito a partire da C come sopra è in effetti in $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. In tal caso, c è detto l'**elemento di Casimir** associato a C.

Assumiamo per il resto di questo paragrafo che $char\ \kappa = 0$.

LEMMA 2.9.2. *Sia $\mathfrak{g}$ semisemplice, e π una rappresentazione fedele di $\mathfrak{g}$. Allora B_π è una forma bilineare non singolare $\mathfrak{g}$-invariante su $\mathfrak{g}$. Sia $b_\pi \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ il corrispondente elemento di Casimir. Allora $tr\ \pi(b_\pi) = dim\ \mathfrak{g}$. In particolare, $\pi(b_\pi)$ è un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli non nulla se $\mathfrak{g} \neq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. B_π è $\mathfrak{g}$-invariante e non singolare per la Proposizione 1.7.2 ed il Teorema 2.7.7, rispettivamente. Sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ una base di $\mathfrak{g}$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ la corrispondente base duale di $\mathfrak{g}$ rispetto a B_π. Allora

$$b_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\pi(y_i).$$

Allora

$$tr\ \pi(b_\pi) = tr\ \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i)\pi(y_i) = \sum_{i=1}^{n} B_\pi(x_i, y_i) = dim\ \mathfrak{g}.$$

Poiché $char\ \kappa = 0$, questo è non nullo, e dunque $\pi(b_\pi) \neq 0$ se $\mathfrak{g} \neq 0$. Il fatto che $\pi(b_\pi)$ sia un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli segue dal Lemma 2.9.1. Ciò dimostra il Lemma 2.9.2. $\square$

LEMMA 2.9.3. *Sia $\mathfrak{g}$ semisemplice e $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione irriducibile tale che $dim\ V > 1$. Allora esiste $c \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tale che $\pi(c)$ è un automorfismo di V come $\mathfrak{g}$-modulo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $Ker\ \pi$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, esiste un ideale semisemplice $\mathfrak{a}$ di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g} = Ker\ \pi \times \mathfrak{a}$ (Teorema 2.8.1). Allora $\pi|\mathfrak{a}$ è una rappresentazione fedele di $\mathfrak{a}$. Inoltre, $\mathfrak{a} \neq 0$ poiché $\pi \neq 0$, che segue dal fatto che $dim\ V > 1$. Allora per il Lemma 2.9.2, esiste $c \in (\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ tale che $\pi(c)$ è un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli non nulla. Ma poiché $\mathfrak{g} = Ker\ \pi \times \mathfrak{a}$, $c \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ e $\pi(c)$ è un'applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli. Il fatto che $\pi(c)$ sia un automorfismo segue dal Lemma di Schur, ed il Lemma 2.9.3 è dimostrato. $\square$

Vogliamo dimostrare che se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora ogni $\mathfrak{g}$- modulo è semisemplice. Il lemma cruciale è il seguente caso speciale del teorema

Lemma 2.9.4. *Sia $\mathfrak{g}$ semisemplice, $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione ed U un sottomodulo tale che $dim\ V/U = 1$. Allora la successione*

$$0 \to U \to V \to V/U \to 0$$

si spezza, cioè U ha un complemento in V.

DIMOSTRAZIONE. **Caso 1.** Supponiamo che U sia di dimensione 1. Allora $\pi(\mathfrak{g})$ ammette una bandiera invariante in V, ed è dunque risolubile. Ma poiché $\pi(\mathfrak{g})$ è anche semisemplice (Teorema (2.8.3), $\pi(\mathfrak{g}) = 0$, ed il lemma è banale.

Caso 2. Supponiamo che U sia irriducibile e che $dim\ U > 1$. Per il Lemma 2.9.3, esiste $c \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tale che $\pi(c)$ è invertibile su U. Ma poiché $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$(Teorema 2.7.8), ogni modulo di dimensione 1 per $\mathfrak{g}$ è banale (Proposizione 1.3.11). Quindi $\mathfrak{g}$ agisce banalmente su V/U, e dunque $\pi(\mathfrak{g})V \subset U$. Allora $\pi(c)V = U$, e segue che $Ker\ \pi(c)$ è unidimensionale. Ma $Ker\ \pi(c) \cap U = 0$ poiché $\pi(c)$ è non singolare su U, cosicché $V = U \oplus Ker\ \pi(c)$. Poiché $\pi(c)$ è una $\mathfrak{g}$-applicazione (Lemma 2.9.1), $Ker\ \pi(c)$ è un complemento di U in V come $\mathfrak{g}$-moduli, dimostrando il lemma in questo caso.

Caso 3. Supponiamo che U sia arbitrario. Dimostreremo il lemma per induzione su $dim\ U$. Possiamo assumere che $dim\ U \geq 1$. Allora U possiede un sottomodulo semplice U_1, ed abbiamo la successione esatta corta

$$0 \to U/U_1 \to V/U_1 \to V/U \to 0.$$

Poiché *dim* $U/U_1 <$ *dim* U, esiste un complememnto di U/U_1 in V/U_1. Questo complemento è della forma Z/U_1, ove Z è un sottomodulo di V contenente U_1 e tale che *dim* $Z/U_1 = 1$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to U_1 \to Z \to Z/U_1 \to 0.$$

Per i casi 1 e 2, c'è un sottomodulo unidimensionale W di Z tale che $Z = U_1 \oplus W$. Ma allora $V = U \oplus W$, dimostrando il lemma. $\square$

Siamo ora pronti ad enunciare il risultato principale:

TEOREMA 2.9.5 (TEOREMA DI WEYL). *L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è semisemplice se e solo se ogni $\mathfrak{g}$-modulo è semisemplice.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice, e sia $\pi : \mathfrak{g} \to End\ V$ una rappresentazione e Y un sottomodulo di X. Per la Proposizione 1.8.1, dobbiamo mostrare che Y ha un complemento in X, cioé che la successione

$$0 \to Y \to X \to X/Y \to 0$$

si spezzi. Sia

$$V = \{\alpha \in End\ V | \alpha : X \to Y \text{ e } \alpha|Y \text{ una moltiplicazione scalare}\}.$$

Ricordiamo che $End\ V$ è un $\mathfrak{g}$-modulo sotto l'azione

$$t \cdot \alpha = \pi(t)\alpha - \alpha\pi(t)$$

$(t \in \mathfrak{g}, \alpha \in End\ X)$ (v. §1.8). Allora V è un sottomodulo di $End\ X$, in effetti, se $\alpha \in V$, allora $t \cdot \alpha : X \to Y$ e $t \cdot \alpha$ è zero su Y. Sia

$$U = \{\alpha \in End\ X | \alpha : X \to Y \text{ e } \alpha|Y = C\}.$$

Allora U é un sottomodulo di V, e *dim* $V/U = 1$. Per il Lemma 2.9.4, esiste $\alpha \in V, \alpha \notin U$, tale che lo spazio generato da α è un sottomodulo di V. Poiché ogni $\mathfrak{g}$-modulo unidimensionale è banale, dobbiamo avere $\mathfrak{g} \cdot \alpha = 0$, cioè α è una applicazione di $\mathfrak{g}$-moduli. Ma $\alpha : X \to Y$ e $\alpha|Y$ è una moltiplicazione per uno scalare non nullo. Dunque $\alpha(X) = Y$, e dunque $X = Ker\ \alpha \oplus Y$. Ma poiché $Ker\ \alpha$ è un $\mathfrak{g}$-sottomodulo di X, abbiamo dimostrato una direzione del teorema.

Viceversa, supponiamo che ogni $\mathfrak{g}$- modulo è semisemplice. Allora la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è semisemplice, e dunque $\mathfrak{g} = \coprod \mathfrak{g}_i$, ove i $\mathfrak{g}_i$ sono ideali non nulli non contenenti alcun ideale proprio non nullo. Allora $\mathfrak{g}$ è il prodotto diretto delle algebre di Lie $\mathfrak{g}_i$, e ciascuna $\mathfrak{g}_i$ o è semplice oppure è dimensione 1. È sufficiente mostrare che nessuna $\mathfrak{g}_i$ è di dimensione 1. Supponiamo che $\mathfrak{g}_{i_0}$, diciamo, sia di dimensione 1, e sia $\mathfrak{g}_{i_0}$ lo spazio generato da un $x \in \mathfrak{g}$. Costruiamo la rappresentazione di $\mathfrak{g}_{i_0}$ che porta x nella matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora π non è una rappresentazione semisemplice di $\mathfrak{g}$, e questa è una contraddizione. Il teorema è così dimostrato. $\square$

Il Lemma chiave 2.9.4. può essere interpretato in modo interessante. Sia $\pi : \mathfrak{g} \to End\ U$ una rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. C'è anche una antirappresentazione naturale π' di $\mathfrak{g}$ su U (v. §1.8), data dalla formula $\pi'(x) = -\pi(x)$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$. Allora π' è un omomorfismo da $\mathfrak{g}$ nell'algebra di Lie $End\ U$ quando si pensi $\mathfrak{g}$ come agente a destra su U invece che a sinistra come al solito. Dunque è naturale usare la notazione $\pi'(x)u = u \cdot x$ $(x \in \mathfrak{g}, u \in U)$, cioè fare agire $\mathfrak{g}$ a destra quando si tratta di π'.

Una applicazione lineare $\alpha : \mathfrak{g} \to U$ si dice una **derivazione** se

$$\alpha[x,y] = x \cdot \alpha y + \alpha x \cdot y$$

per ogni $x, y \in \mathfrak{g}$, ove il primo termine a destra denota l'azione di π, e il secondo termine, l'azione (destra) di π'. Ciò si può anche scrivere

$$\alpha[x,y] = x \cdot \alpha y - y \cdot \alpha x,$$

ove entrambi i termini a destra denotano l'azione di π. Ma l'altra definizione assomiglia di più ad una derivazione.

Una **derivazione interna** $\alpha : \mathfrak{g} \to U$ è una derivazione che è indotta da un elemento u del modulo U, cioè $\alpha x = x \cdot u$ per ogni $x \in \mathfrak{g}$; questa è chiaramente una derivazione. (Nel caso della rappresentazione aggiunta, queste sono le solite derivazioni e derivazioni interne). Lasciamo al lettore di giustificare la seguente osservazione:

Osservazione 2.9.2. Le derivazioni da $\mathfrak{g}$ in un $\mathfrak{g}$-modulo U corrispondono alle successione esatte

$$0 \to U \to V \to k \to 0$$

ove κ è pensato come il modulo banale unidimensionale, in modo tale che lo spazio delle derivazioni modulo le derivazioni interne corrisponda in maniera biunivoca all'insieme delle classi di equivalenza delle estensioni di κ per U.

L'estensione corrispondente alla derivazione $\alpha : \mathfrak{g} \to U$ è la successione esatta

$$0 \to U \to U \oplus k \to k \to 0$$

con $\mathfrak{g}$ che agisce su $U \oplus k$ tramite

$$x \cdot (u, c) = (x \cdot u, c\alpha x),$$

per ogni $x \in \mathfrak{g}, u \in U$ e $c \in k$.

Definizione 2.9.1. Due estensioni

$$0 \to U \to V \to k \to 0$$

e

$$0 \to U \to V_1 \to k \to 0$$

si dicono **equivalenti** se esiste un isomorfismo di $\mathfrak{g}$-moduli $j : V \to V_1$ tale che il diagramma seguente commuti

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle Id}\big\downarrow & & {\scriptstyle j}\big\downarrow & & {\scriptstyle Id}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Inoltre una derivazione è interna se e solo se l'estensione corrispondente si spezza.

Allora il Lemma 2.9.4 dice esattamente che ogni derivazione di $\mathfrak{g}$ in un $\mathfrak{g}$-modulo è interna.

Nel linguaggio della teoria della coomologia delle algebre di Lie (v. [Jacobson1]) le derivazioni di $\mathfrak{g}$ in un $\mathfrak{g}$-modulo U sono gli 1-cocicli per $\mathfrak{g}$ ed U, e le derivazioni interne sono gli "1-cobordi". Quindi il Lemma 2.9.4 dice che la 1-coomologia di $\mathfrak{g}$ in qualunque $\mathfrak{g}$ modulo è zero. Vedi anche [SSL], §4.4.

2.10 Algebre di Lie riduttive. In questo paragrafo caratterizzeremo in varie maniere queste algebre. Supponiamo che la caratteristica del campo κ sia zero.

DEFINIZIONE 2.10.1. Un'algebra di Lie si dice **riduttiva** se la sua rappresentazione aggiunta è semisemplice.

LEMMA 2.10.1. *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie. Allora* $\mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ la proiezione al quoziente. Poiché $\mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$ è semisemplice (Proposizione 1.5.9),

$$\sigma[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\sigma(\mathfrak{g}), \sigma(\mathfrak{g})] = \mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$$

(Teorema 2.7.8). Il lemma ne segue immediatamente. □

OSSERVAZIONE 2.10.1. In effetti una affermazione molto più precisa del Lemma 2.10.1 è vera: Esiste una sottoalgebra semisemplice $\mathfrak{h}$ di $\mathfrak{g}$ tale che $\mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (somma diretta di spazi vettoriali). Questo è il Teorema di decomposizione di Levi (v. [Jacobson1] e [SSL]), che noi non dimostreremo.

TEOREMA 2.10.2. *Sia* $\mathfrak{g}$ *un'algebra di Lie. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{g}$ *è riduttiva;*
(2) $\mathfrak{g}$ *è il prodotto diretto di un'algebra di Lie semisemplice e di un'algebra di Lie abeliana;*
(3) $\mathfrak{g}$ *ha una traccia non singolare;*
(4) $Cent\ \mathfrak{g} = rad\ \mathfrak{g}$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che (1) sia vera. Allora $\mathfrak{g}$ è della forma $\coprod \mathfrak{g}_i$, dove i $\mathfrak{g}_i$ sono ideali non nulli di $\mathfrak{g}$ che non contengono alcun ideale proprio non nullo. Allora $\mathfrak{g}$ è il prodotto diretto delle algebre di Lie $\mathfrak{g}_i$, e ciascun $\mathfrak{g}_i$ o è semplice oppure è unidimensionale. (2) ne segue immediatamente.

Il fatto che (2) implichi (3) è facile ed è lasciato al lettore.

Il Corollario 2.3.9 del Teorema di Lie asserisce che (3) implica (4). Per mostrare che (4) implica (1), osserviamo che

$$ad\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}/Cent\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}/rad\ \mathfrak{g}$$

è semisemplice per la Proposizione 1.5.9. Ora si applichi il Teorema 2.9.5. □

OSSERVAZIONE 2.10.2. *Il teorema pone il Corollario 2.3.9 del Teorema di Lie come pure i teoremi 2.7.10 e 2.7.11 in prospettiva.*

Sommario delle varie caratterizzazioni delle algebre di Lie semisemplici. A causa della loro grande importanza, riassumiamo qui le caratterizzazioni delle algebre di Lie semisemplici dimostrate in questi appunti. Assumiamo $char\ k = 0$, e sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $\mathfrak{g}$ è semisemplice (cioé $rad\ \mathfrak{g} = 0$;
(2) $nilrad\ \mathfrak{g} = 0$ (Esercizio);
(3) $\mathfrak{g}$ non possiede ideali abeliani non nulli (Esercizio);
(4) La forma di Killing di $\mathfrak{g}$ è non singolare (Teorema 2.7.6);
(5) $\mathfrak{g}$ ha una traccia non singolare e $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (Teorema 2.7.10 oppure Teorema 2.10.1);
(6) $\mathfrak{g}$ è il prodotto diretto di ideali semplici (Teorema 2.8.2);
(7) Ogni $\mathfrak{g}$-modulo è semisemplice (Teorema 2.9.5);
(8) La rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}$ è semisemplice ed inoltre o $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ oppure $Cent\ \mathfrak{g} = 0$ (Teorema 2.10.1).

Teoria elementare delle algebre di Lie

Parte Terza. Classificazione delle algebre di Lie semisemplici

3.1 Decomposizione di Jordan di un endomorfismo. Sia κ un campo algebricamente chiuso, $X \in M(n,\kappa)$ allora il Teorema della forma canonica di Jordan ci dice che X è simile ad una matrice X', ove X' è una matrice a blocchi, somma diretta di blocchi di Jordan, e X' è unica a meno di permutazioni dei blocchi.

Diremo che una matrice X è semisemplice se la forma canonica è diagonale. Se X è in forma canonica allora i numeri sulla diagonale principale sono gli autovalori di X. Sappiamo che se gli n autovalori di una matrice sono tutti distinti allora la matrice è semisemplice. È chiaro inoltre che X è nilpotente se e solo se la sua forma canonica di Jordan ha tutti zeri sulla diagonale principale o, equivalentemente, se e solo se tutti i suoi autovalori sono nulli. Per finire, X è nilpotente e semisemplice allo stesso tempo se e solo se $X = 0$. Per dimostrare il nostro prossimo risultato ci occorre un teorema classico di algebra.

Teorema Cinese dei Resti 3.1.1. *Supponiamo che $g(T)$ e $h(T)$ siano polinomi a coefficienti in un campo, primi fra loro, e supponiamo che $u(T)$ e $v(T)$ siano polinomi arbitrari a coefficienti nello stesso campo. Allora esiste un polinomio $s(T)$ tale che*

$$s(T) \equiv u(T) \mod g(T)$$
$$s(T) \equiv v(T) \mod h(T)$$

Dim.. Osserviamo che se troviamo due polinomi $t(T)$ e $\bar{t}(T)$ tali che $t(T) \equiv 1 \mod g$ e $t(T) \equiv 0 \mod h$ mentre $\bar{t}(T) \equiv 0 \mod g$ e $\bar{t}(T) \equiv 1 \mod h$ allora avremo che

$$ut + v\bar{t} \equiv u \mod g$$
$$ut + v\bar{t} \equiv v \mod h$$

In altre parole dobbiamo trovare $t(T) = p(T)h(T)$ e $t(T) = q(T)g(T) + 1$. Ma essendo h e g primi tra loro sappiamo che esistono due polinomi p', q' tali che $p'h + q'g = 1$. Prendendo allora $p = p'$ e $q = -q'$ abbiamo la conclusione. $\square$

Teorema 3.1.2. *Ogni matrice X si può scrivere in modo unico come $X = X_s + X_n$ dove*

(1) *X_s è semisemplice;*
(2) *X_n è nilpotente.*
(3) *X_s e X_n commutano tra di loro.*

Inoltre, ciò visto, esiste un polinomio $p(T)$ senza termine noto, tale che $p(X) = X_s$ e $X - p(X) = X_n$.

Dim. UNICITÀ. Sia $X = X_s + X_n$ e $X = X'_s + X'_n$ allora necessariamente $X_s - X'_s = X'_n - X_n$. L'unicità segue se mostriamo che questa differenza è simultaneamente semisemplice e nilpotente. Ora, se due matrici nilpotenti commutano tra loro (come stiamo supponendo per X_n e X'_n) e sono entrambe nilpotenti la loro somma o differenza è ancora nilpotente. Basta infatti applicare la formula del binomio di Newton. Nel caso semisemplice ragioniamo come segue.

Osserviamo preliminarmente che se $X_1, \ldots, X_k$ sono semisemplici e commutano tra loro allora esiste una base in cui le X_i sono simultaneamente diagonali. Allora se X_s e X_s' sono semisemplici, poichè commutano sono simultaneamente diagonalizzabili e dunque la loro somma è ancora diagonale nella stessa base dunque essa è semisemplice.

ESISTENZA. Una volta scritta la matrice nella sua forma canonica di Jordan, si ha che la parte semisemplice è la matrice costituita dalla diagonale principale e zero altrove, mentre la parte nilpotente è la parte restante. Coniugando ottengo la decomposizione di una qualunque X. Resta da far vedere che X_s è un polinomio come nell'enunciato. Appplichiamo il Teorema Cinese dei Resti nel caso dei polinomi. Prendiamo X in forma di Jordan. Sappiamo che gli elementi sulla diagonale principale sono gli autovalori. Sia a_i un autovalore e considero la matrice $X - a_iI$ Questa è una matrice che ha degli zeri sulla diagonale principale precisamente dove X ha gli autovalori a_i. Consideriamo il polinomio $\prod_i (x - a_i)^{m_i}$ ove m_i è la molteplicità algebrica di a_i come autovalore di X. Osserviamo che la matrice $(X - a_i)^{m_i}$ è una matrice che ha un blocco nullo laddove X ha un autovalore a_i. In particolare, se X ha k autovalori distinti possiamo considerare

$$(x - a_1)^{m_1} \prod_{i=2}^{k} (x - a_i)^{m_i}$$

che sono due fattori primi tra loro. Consideriamo allora il sistema di congruenze

$$s(T) \equiv 1 \mod (x - a_1)^{m_1}$$
$$s(T) \equiv 0 \mod \prod_{i=2}^{k} (x - a_i)^{m_i}$$

Allora il polinomio $s_1(T)$, soluzione di questo sistema, che esiste per il Teorema Cinese dei Resti, calcolato sulla matrice X dà la matrice $s_1(X)$ che è tutta nulla nei blocchi ove c'erano gli autovalori a_i $i \geq 2$ poiché, per la seconda congruenza, $s_1(X)$ è multiplo di $\prod_{i=2}^{k}(T - a_i)^{m_i}$ che calcolata su X dà $\prod_{i=2}^{k}(x - a_i)^{m_i}$, mentre sul blocco dove c'era a_1, essendo congruo a $1 \mod (x - a_1)$ c'è la matrice unità. Abbiamo costruito tale matrice $s_1(X)$ a partire da a_1. Analoghi ragionamenti su $a_2, a_3, \ldots, a_k$ cioè per tutti gli autovalori non nulli si ottengono le analoghe matrici $s_2(X), s_3(X), \ldots, s_k(X)$ con 0 ovunque e 1 dove c'era a_i. Per cui $X_s = a_1 s_1(X) + a_2 s_2(X) + \cdots + a_k s_k(X)$. Questo è il polinomio desiderato. Possiamo infine mostrare che è possibile trovarlo col termine noto uguale a zero (ossia che sia un multiplo di X). Infatti se 0 è effettivamente un autovalore la costruzione data fornisce già $s(X)$ multiplo di X in quanto X appare nel prodotto $(X - 0)^m$. Se 0 non è autovalore considero un'ulteriore congruenza $s(X) \equiv 0 \mod X$ infatti in tal caso X è primo con $(X - a_i)$. □

COROLLARIO 3.1.1. *Sia $X \in End\ V$ che manda un sottospazio U in U allora anche X_s e X_n mandano U in U.*

DIM.. X_s è un polinomio in X e quindi è ovvio. □

COROLLARIO 3.1.2. *Se $x \in \mathfrak{gl}(V)$ e $x = x_s + x_n$ e consideriamo*

$$ad\ x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$$

allora $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ e questa è la decomposizione di Jordan di $ad\ x$

DIM.. Si vede facilmente che $ad\ x_n$ è nilpotente. Affermo che $ad\ x_s$ è semisemplice se e solo se esiste una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che $x_s e_i = \alpha_i e_i$ cioè x_s è diagonale. Infatti sia e_{ij} la base canonica di $\mathfrak{gl}(V)$. Dico che $(ad\ x_s)(e_{ij}) = (\alpha_i - \alpha_j)e_{ij}$. Ciò visto vediamo che $ad\ x_s, ad\ x_n$ commutano: infatti dato che ad è un omomorfismo di algebre di Lie e dunque

$$[ad\ x_s, ad\ x_n] = ad\ [x_s, x_n] = ad\ 0 = 0.$$

Allora calcoliamo $(ad\ x_s)e_{ij}$. Si ha che $x_s = \sum \alpha_i e_{ii}$, matrice diagonale, dunque

$$\begin{aligned} ad\ (x_s)(e_{ij}) &= x_s e_{ij} - e_{ij} x_s = (\sum \alpha_h e_{hh}) e_{ij} - e_{ij} (\sum \alpha_h e_{hh}) \\ &= \alpha_i e_{ij} - \alpha_j e_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) e_{ij} \end{aligned}$$

Quindi se x_s è diagonale $ad\ x_s$ è diagonale nella base e_{ij} e ha come autovalore la differenza degli autovalori. □

Ricordiamo che se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora il suo centro è nullo e dunque la rappresentazione aggiunta $ad : \mathfrak{g} \to End\ \mathfrak{g}$ è fedele (iniettiva), e quindi possiamo introdurre la decomposizione di Jordan astratta:

TEOREMA 3.1.3. *Sia $x \in \mathfrak{g}$ $\mathfrak{g}$ semisemplice, e consideriamo $ad\ x \in End\ \mathfrak{g}$ sarà $ad\ x = (ad\ x)_s + (ad\ x)_n$ allora esistono e sono unici $x_n, x_s \in \mathfrak{g}$ tali che $(ad\ x)_s = ad\ x_s$ e $(ad\ x)_n = ad\ x_n$.*

DIM. L'unicità è ovvia per l'iniettività. Per dimostrare l'esistenza osserviamo due fatti.

Primo. Se D è una derivazione di $\mathfrak{g}$ allora D in quanto applicazione lineare possiede una decomposizione $D = D_s + D_n$. Allora anche D_s e D_n sono derivazioni (verificare).

Secondo. Se $\mathfrak{g}$ è semisemplice allora ogni derivazione è interna.

Da questi due fatti segue il teorema della decomposizione astratta. Infatti $ad\ x$ è una derivazione e $ad\ x = (ad\ x)_s + (ad\ x)_n$. Per il primo fatto anche $(ad\ x)_s$ e $(ad\ x)_n$ sono derivazioni, mentre per il secondo fatto ogni derivazione è interna per cui esistono (e sono unici) x_s e x_n tali che $ad\ x_s = (ad\ x)_s$ e $ad\ x_n = (ad\ x)_n$. □

3.2 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}(2,\kappa)$. In questo paragrafo denoteremo $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2,\kappa)$. con κ campo algebricamente chiuso. Siano x, y, h le matrici rispettivamente

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

che costituiscono la base standard di $\mathfrak{g}$. Se $\rho : \mathfrak{g} \to End\ V$ è una rappresentazione di $\mathfrak{g}$, poiché h è semisemplice, per i risultati del paragrafo precedente h agisce diagonalmente su V e quindi abbiamo una decomposizione di V come somma diretta degli autospazi V_λ. Gli autovalori di $\rho(h)$ su V si dicono **pesi** di h in V e V_λ si chiama spazio peso.

LEMMA 3.2.1. *Se $v \in V_\lambda$, allora $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ e $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

DIM. Esercizio. $\square$

OSSERVAZIONE 3.2.1. Poiché la dimensione di V è finita deve esistere un $V_\lambda \neq 0$ tale che $V_{\lambda+2} = 0$.

DEFINIZIONE 3.2.1. Ogni v che non sia nullo in un tale V_λ

si dice **vettore massimale** di peso λ.
Vogliamo ora dare una classificazione dei moduli irriducibili di dimensione finita per $\mathfrak{g}$. Il teorema è il seguente:

TEOREMA 3.2.2. *Sia V un modulo irriducibile di dimensione finita per $\mathfrak{g}$ allora*
(1) *V è somma diretta di spazi peso V_μ rispetto ad h, con*

$$\mu = m, m-2, \dots, -(m-2), -m$$

dove $m = dim\ V - 1$ e inoltre $dim\ V_\mu = 1$ per ogni μ.
(2) *V possiede un unico vettore massimale (a meno di scalari) il cui peso, detto peso massimale di V, è m.*
(3) *Si può scegliere la base di V, diciamo $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ in maniera tale che l'azione di $\mathfrak{g}$ su V è data esplicitamente dalle seguenti formule: $h \cdot v_i = (m-2i)v_i$, $y \cdot v_i = (i+1)v_{i+1}$, $x \cdot v_i = (m-i+1)v_{i-1}$ per $i \geq 0$.*

DIM. Sia v_0 un vettore massimale di V e supponiamo che il suo peso sia λ. Poniamo $v_{-1} = 0$ e consideriamo i vettori definiti come segue:

$$v_i = \frac{1}{i!} y^i \cdot v_0$$

per $i \geq 0$. Questi vettori sono tutti autovettori per h, infatti $h \cdot v_0 = \lambda v_0$ per definizione di vettore peso. Inoltre

$$h \cdot v_1 = hyv_0 = yhv_0 + [h,y]v_0 = \lambda yv_0 - 2yv_0 = (\lambda - 2)yv_0 = (\lambda - 2)v_1$$

Per induzione troviamo che

$$h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$$

Essi sono dunque tutti indipendenti. Poiché la dimensione di V è finita dovrà esistere un minimo m tale che $v_m \neq 0$ mentre $v_{m+1} = 0$. Osserviamo l'azione di y:

$$y \cdot v_i = y \cdot \frac{i}{i!} y^i v_0 = \frac{1}{i!} y^{i+1} v_0 = (i+1)v_{i+1}$$

Infine calcoliamo

$$x \cdot v_0 = 0$$

infatti
$$hxv_0 = xhv_0 + [h,x]v_0 = \lambda xv_0 + 2xv_0 = (\lambda+2)xv_0$$
ma λ è un peso massimale e dunque $x \cdot v_0 = 0$. Dimostriamo che in generale abbiamo
$$x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$$
per induzione su i. Abbiamo appena visto che la formula è vera per $i = 0$. Supponiamo che sia vera per $i-1$ e consideriamo
$$ixv_i = xyv_{i-1} = yxv_{i-1} + [x,y]v_{i-1} = hv_{i-1} + y(\lambda - (i-1)+1)v_{i-2}$$
per ipotesi induttiva, e dunque
$$= hv_{i-1} + (\lambda - i + 2)yv_{i-2} = (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)yv_{i-2}$$
(per il calcolo precedente)
$$= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(i-1)v_{i-1}$$
(per l'azione di y)
$$= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}$$
ed infine dividendo per i otteniamo la formula desiderata. È ora chiaro che lo spazio generato dai vettori $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ è un sottomodulo. Poiché per ipotesi V è irriducibile V deve coincidere con questo sottomodulo. Abbiamo quindi dimostrato gran parte dell'enunciato. Rimane solo da verificare che $\lambda = m = dim\ V - 1$. Questo segue dall'osservare che applicando x al vettore v_{m+1} otteniamo secondo la formula $x \cdot v_{m+1} = (\lambda - (m+1)+1)v_m$. Il primo membro è però nullo e quindi deve essere nullo il secondo membro, il che è solo possibile se è nullo il coefficiente: $\lambda - m = 0$ e dunque $\lambda = m$ come si desiderava. $\square$

COROLLARIO 3.2.1. *Esiste uno ed un solo modulo irriducibile $V(m)$ per ciascun intero $m \geq 0$.*

DIM. Un modulo irriducibile è chiaramente determinato dall'intero m e dunque ne può esistere al più uno solo. Inoltre le formule che abbiamo visto possono essere usate per definire una rappresentazione su uno spazio vettoriale di dimensione m qualunque. $\square$

OSSERVAZIONE 3.2.2. $V(0)$ ha dimensione 1 ed è il modulo banale unidimensionale. $V(1)$ ha dimensione 2 e corrisponde alla rappresentazione naturale di $\mathfrak{g}$ su κ^2 dove $v_1 = (1,0)$ e $v_{-1} = (0,1)$.

COROLLARIO 3.2.2. *Se V è un modulo di dimensione finita non necessariamente irriducibile, tutti i suoi pesi sono interi non negativi, e se i è un peso anche $-i$ lo è e con la stessa molteplicità. Inoltre nella decomposizione di V in somma diretta di sottomoduli irriducibili il numero di addendi è esattamente uguale a $dim\ V_0 + dim\ V_1$.*

DIM. Se $V = 0$ non c'è niente da dimostrare. Altrimenti il Teorema di Weyl ci permette di scrivere V come somma diretta di moduli irriducibili, dunque dal Teorema segue che gli autovalori sono tutti interi e ciascuno appare insieme al suo opposto. Per finire, osserviamo che ogni addendo irriducibile ha dimensione pari oppure dispari e che quindi esso contiene il peso 1 oppure il peso 0 ma non entrambi. Ciascun addendo contribuisce di una unità dunque a $dim\ V_0 + dim\ V_1$. $\square$

3.3 Decomposizione di $\mathfrak{g}$ in spazi di radici.

Chiamiamo **sottoalgebre torali** di $\mathfrak{g}$ delle sottoalgebre non nulle contenenti esclusivamente elementi semisemplici.

LEMMA 3.3.1. *Esistono sottoalgebre torali dell'algebra di Lie semisemplice* $\mathfrak{g}$.

DIM. Infatti se tutti gli elementi di $\mathfrak{g}$ fossero nilpotenti, allora $\mathfrak{g}$ sarebbe nilpotente per il Teorema di Engel e dunque non sarebbe semisemplice. Esiste dunque un elemento $x \in \mathfrak{g}$ non nilpotente. Possiamo dunque decomporre $x = x_s + x_n$. Ma allora il sottospazio generato dagli elementi semisemplici x_s è una sottoalgebra torale. □

LEMMA 3.3.2. *Una sottoalgebra torale* $\mathfrak{h}$ *è abeliana.*

DIM. Sia $\mathfrak{h}$ torale. Dobbiamo mostrare che $ad_{\mathfrak{h}}x = 0$ per ogni $x \in \mathfrak{h}$. Poiché $ad\ x$ è diagonalizzabile, essendo semisemplice ed il campo κ algebricamente chiuso, questo equivale a mostrare che $ad_{\mathfrak{h}}x = 0$ non ha autovalori diversi da zero. Supponiamo, al contrario, che $[x, y] = ay$ con $a \neq 0$ per qualche $y \in \mathfrak{h}$ non nullo. Allora $ad_{\mathfrak{h}}y(x) = -ay$ è esso stesso un autovettore di $ad_{\mathfrak{h}}y$ di autovalore 0. D'altro canto, essendo anche y semisemplice, $\mathfrak{h}$ è somma diretta di autospazi di y e quindi, anche x, in quanto elemento di $\mathfrak{h}$ si può scrivere come combinazione lineare di autovettori di $ad_{\mathfrak{h}}y$, diciamo $x = \sum \alpha_i v_i$ ed applicando $ad_{\mathfrak{h}}y$ si ha

$$-ay = \sum ad_{\mathfrak{h}}y(v_i) = \sum \alpha_i \lambda_i v_i$$

Ora questa uguaglianza è assurda infatti il primo membro è un autovettore di $ad_{\mathfrak{h}}y$ con autovalore 0, mentre a secondo membro abbiamo una combinazione lineare di autovettori non nulli. □

Un'algebra torale $\mathfrak{h}$ è dunque abeliana e dunque $ad_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ è una famiglia di endomorfismi semisemplici che commutano tra di loro. Per vedere questo osserviamo che

$$ad\ x\ ad\ y(z) = ad\ y\ ad\ x(z)$$

e cioè

$$[x, [y, z]] = [y, [x, z]]$$

e questa segue dall'identità di Jacobi tenuto conto che x e y commutano. Dunque questi endomorfismi sono simultaneamente diagonalizzabili, cioè esiste una base di autovettori simultanei, siano essi $v_1, v_2, \dots, v_k$. Allora

$$[x, v_i] = \alpha_i(x) v_i$$

per $i = 1, \dots, k$ e $\alpha_i(x) \in \kappa$ e questo vale per ogni $x \in \mathfrak{h}$ perché sono autovettori simultanei. È facile verificare che l'applicazione α_i così definita è lineare, cioè $\alpha \in \mathfrak{h}^*$:

$$[\lambda x + \mu y, v] = \lambda[x, v] + \mu[y, v] = (\lambda\alpha(x) + \mu\alpha(y))v.$$

Consideriamo

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{v \in \mathfrak{g} | [x, v] = \alpha(x)v, \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

esso è un sottospazio di $\mathfrak{g}$. Infatti, se $v, w \in \mathfrak{g}$

$$[x, v + w] = [x, v] + [x, w] = \alpha(x)v + \alpha(x)w = \alpha(x)(v + w)$$

e

$$[x, \lambda v] = \lambda\alpha(x)v = \alpha(x)\lambda v.$$

Allora $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_\alpha$. Si ha $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ il centralizzatore di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Ovviamente $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ solo per un numero finito di α. L'insieme delle α non nulle tali che $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ sono dette **radici** di $\mathfrak{g}$. Ci sarà utile il seguente semplice lemma.

LEMMA 3.3.3. *Se $x, y \in End\ V$ e $[x, y] = 0$ e x nilpotente allora xy è nilpotente ed in particolare $tr(xy) = 0$.*

DIM. $(xy)^n = x^n y^n$ poichè x e y commutano, se $x^n = 0$ allora chiaramente $(xy)^n = 0$. Inoltre la traccia di ogni endomorfismo nilpotente è zero. □

Supponiamo ora che $\mathfrak{h}$ sia torale e massimale rispetto a questa proprietà.

PROPOSIZIONE 3.3.1. *Nelle ipotesi dette sopra abbiamo*

(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$;
(2) *Se $\alpha + \beta \neq 0$ allora $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_\beta$ sono ortogonali relativamente alla forma di Killing B;*
(3) *$\mathfrak{g}_0$ non è solo il centralizzatore di $\mathfrak{h}$ ma coincide con $\mathfrak{h}$.*

DIM. Se $y \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $z \in \mathfrak{g}_\beta$ $x \in \mathfrak{h}$ allora

$$[x, [y, z]] = [[x, y]z] + [y, [x, z]] = \alpha(x)[y, z] + \beta(x)[y, z] = (\alpha + \beta)(x)[y, z]$$

Se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_\beta$ $x \in \mathfrak{h}$ allora

$$B([h, x], y) = \alpha(h)B(x, y)$$

e, d'altro canto,il primo membro è anche uguale a

$$B(-[x, h], y) = B(-x, [h, y]) = -\beta(h)B(x, y)$$

il che implica che

$$(\alpha + \beta)(h)B(x, y) = 0$$

qualunque sia $h \in \mathfrak{h}$ e poiché per ipotesi esiste un $h \in \mathfrak{h}$ su cui $\alpha + \beta$ non è zero, segue che $B(x, y) = 0$

Infine, per quanto precede $\mathfrak{g}_0$ è ortogonale a $\mathfrak{g}_\alpha$ per ogni $\alpha \neq 0$. Dunque la decomposizione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha)$$

è una decomposizione ortogonale e quindi la forma di Killing B è non degenere su $\mathfrak{g}_0$ e su $(\bigoplus_{\alpha\neq 0} \mathfrak{g}_\alpha)$, in particolare B è non degenere quando è ristretta a $\mathfrak{g}_0$. Voglio dimostrare ora che B ristretta ad $\mathfrak{h}$ è ancora non degenere. Per far questo cominciamo con l'osservare che se $x \in \mathfrak{g}_0$ allora anche le sua parti semisemplice e nilpotente sono in $\mathfrak{g}_0$: $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$. Infatti sappiamo che se un endomorfismo manda un sottospazio U in un sottospazio W anche la sua parte semisemplice e la sua parte nilpotente fanno altrettanto essendo esse delle espressioni polinomiali in x. Dunque $x \in \mathfrak{g}_0$ se e solo se $ad\ x$ manda $\mathfrak{h}$ in 0 e quindi $x_s \in \mathfrak{g}_0$. Anzi possiamo affermare di più: infatti $x_s \in \mathfrak{h}$, perché considerando l'algebra generata da $\mathfrak{h} \cup x_s$ otteniamo una sottoalgebra torale contenente $\mathfrak{h}$ che, però, è massimale per ipotesi, e dunque $x_s \in \mathfrak{h}$.

Per dimostrare che B ristretta a $\mathfrak{h}$ è non degenere dobbiamo mostrare che per $h \in \mathfrak{h}$ $B(h, \mathfrak{h}) = 0$ implica che $h = 0$. Infatti, se $z \in \mathfrak{g}_0$ abbiamo

$$B(h, z) = B(h, z_s + z_n) = B(h, z_s) + B(h, z_n)$$

ora $B(h, z_s) = 0$ perché $z_s \in \mathfrak{h}$ e stiamo supponendo che $B(h, \mathfrak{h}) = 0$. Inoltre $B(h, z_n) = 0$ per il Lemma in quanto z_n è nilpotente. Ma allora

$$B(h, \mathfrak{h}) = 0 \Leftrightarrow B(h, \mathfrak{g}_0) = 0$$

e sappiamo che B è non degenere quando è ristretta a $\mathfrak{g}_0$.

Osserviamo ora che la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{g}_0$ è costituita da elementi nilpotenti: infatti se $x \in \mathfrak{g}_0$ è semisemplice allora $x \in \mathfrak{h}$ e di conseguenza $ad\ x$ è l'applicazione nulla e dunque nilpotente. Se invece $x \in \mathfrak{g}_0$ è nilpotente anche $ad\ x$ è nilpotente. Infine, per un elemento qualsiasi $x \in \mathfrak{g}_0$, $x = x_s + x_n$ e dunque $ad\ x = ad\ x_s + ad\ x_n$ per cui $ad\ x$ è somma di due endomorfismi che commutano tra loro e quindi è anch'esso nilpotente.

Applicando allora il Teorema di Engel abbiamo che $\mathfrak{g}_0$ stessa è nilpotente.

Facciamo ora vedere che

$$\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$$

Infatti essendo $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0] = 0$ abbiamo

$$0 = B([\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_0) = B(\mathfrak{h}, [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])$$

Se dunque $x \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ abbiamo in particolare un elemento di $\mathfrak{h}$ che per la precedente è ortogonale a $\mathfrak{h}$ ed è dunque nullo.

Ora $\mathfrak{g}_0$ è abeliana: se $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ è un ideale non nullo allora, essendo $\mathfrak{g}_0$ nilpotente c'è un elemento non nullo z del centro di $\mathfrak{g}_0$ contenuto in questo ideale. Se z è semisemplice esso, come abbiamo visto, è in $\mathfrak{h}$ ma allora sarebbe nell'intersezione $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ che invece è zero. Allora la parte nilpotente di z diciamo z_n è non nulla, appartiene a $\mathfrak{g}_0$ e dunque appartiene ancora al centro di $\mathfrak{g}_0$ (ricordiamo infatti che z_n è un espressione polinomiale in z). Ma allora il Lemma implica che $B(z_n, \mathfrak{g}_0) = 0$ mentre sappiamo che la restrizione di B a $\mathfrak{g}_0$ è non degenere.

Possiamo ora dimostrare che $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Infatti se così non fosse, ci sarebbe un elemento nilpotente non nullo x in $\mathfrak{g}_0$ di conseguenza con un ragionamento analogo a quello appena fatto avremmo

$$B(x, \mathfrak{g}_0) = 0$$

di nuovo contraddicendo il fatto che la restrizione di B a $\mathfrak{g}_0$ è non degenere. □

La decomposizione di $\mathfrak{g}$ può ora essere scritta come

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha).$$

Il fatto che la forma di Killing sia non degenere su $\mathfrak{h}$ ci permette di identificare in maniera canonica $\mathfrak{h}$ col suo duale $\mathfrak{h}^*$, abbiamo cioè un isomorfismo che non dipende dalla scelta di una base

$$\mathfrak{h}^* :\to \mathfrak{h}$$

che ad ogni elemeto $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ fa corrispondere quell'unico elemento $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tale che $\alpha(x) = B(t_\alpha, x)$ per ogni $x \in \mathfrak{h}$. Detto con altre parole, in modo meno formale, ogni forma lineare α può essere rappresentata come $B(t_\alpha, -)$.

3.4 Proprietà della decomposizione in spazi di radici.

1.L'insieme Φ delle radici di $\mathfrak{g}$ rispetto ad $\mathfrak{h}$ è un insieme di generatori di $\mathfrak{h}^*$. Infatti, supponiamo che $\beta \in \mathfrak{h}^*$ ma β non sia nello spazio generato da Φ. Allora esiste un $h \in \mathfrak{h}$ sul quale si annullano tutte le radici. Ma allora questo elemento commuta con ogni $\mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \in \Phi$. Ma poiché esso chiaramente commuta con $\mathfrak{h}$ esso appartiene al centro di $\mathfrak{g}$ il che è assurdo.

2. Se $\alpha \in \Phi$ anche $-\alpha \in \Phi$. Infatti se $-\alpha \notin \Phi$ allora $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$. Di conseguenza $\mathfrak{g}_\alpha$ è ortogonale secondo la forma di Killing a tutto $\mathfrak{g}$ il che contraddice il fatto che B è non degenere.

3. Per ogni fissata radice $\alpha \in \Phi$ se prendiamo $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ allora $[x, y] = B(x, y)t_\alpha$. Infatti, prendiamo un arbitrario elemento $h \in \mathfrak{h}$. Per l'associatività di B abbiamo

$$B(h, [x, y]) = B([h, x], y) = \alpha(h)B(x, y) = B(t_\alpha, h)B(x, y) =$$
$$B(B(x, y)t_\alpha, h)$$

Facendo la differenza abbiamo che $[x, y] - B(x, y)t_\alpha$ è ortogonale a tutto $\mathfrak{h}$ il che implica che $[x, y] - B(x, y)t_\alpha = 0$.

4. La dimensione di $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ è 1, ed una base è data da t_α. Per quanto appena visto sappiamo che $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ è generato da t_α. Dobbiamo solo verificare che questo spazio non è nullo. Il che si riduce a verificare che $B(x, y)$ non è sempre zero. Ma se $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ è non nullo mentre $B(x, y) = 0$ per ogni $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ allora B sarebbe degenere.

5. $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ per $\alpha \in \Phi$. Supponiamo che invece si abbia $\alpha(t_\alpha) = 0$. Allora t_α commuta con $\mathfrak{g}_\alpha$ e con $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Supponiamo di trovare come abbiamo fatto prima due elementi in $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tali che $B(x, y) \neq 0$. Possiamo assumere senza perdita di generalità che $B(x, y) = 1$. Allora $[x, y] = t_\alpha$ e dunque $S = span\{x, y, t_\alpha\}$ è un'algebra di Lie risolubile. È facile verificare che S è isomorfa a $ad_\mathfrak{g} S \subset End\ \mathfrak{g}$. Ora se $ad_\mathfrak{g} S$ è risolubile, il Teorema di Lie implica che esiste una base per cui gli elementi di $ad_\mathfrak{g} S$ hanno matrici sopratriangolari e dunque gli elementi di $[S, S]$ hanno matrici strettamente sopratriangolari e sono dunque nilpotenti. Quindi $ad_\mathfrak{g} t_\alpha$ è sia semisemplice che nilpotente e quindi è nullo. Ma allora t_α appartiene al centro di $\mathfrak{g}$ che è nullo che è un assurdo.

6. Se $\alpha \in \Phi$ e $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{alpha}$ è un elemento non nullo allora esiste $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tali che $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ generano una algebra di Lie semplice di dimensione 3 isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$. Infatti se $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ possiamo certamente scegliere $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tale che $B(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. Quindi a meno di multipli scalari possiamo assumere che $B(x_\alpha, y_\alpha) = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$ (il denominatore non è nullo per quanto precede). Posto allora $h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$ abbiamo quanto desiderato.

7. Infine con l'elemento $h_\alpha = \frac{2}{B(t_\alpha, t_\alpha)}$ appena definito abbiamo $h_\alpha = -h_{-\alpha}$. Infatti $t_\alpha = -t_{-\alpha}$ e quindi la verifica è immediata.

Come abbiamo visto se $\alpha \in \Phi$ anche $-\alpha \in \Phi$. Consideriamo allora la sottoalgebra S_α appena costruita che è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$, e usiamola per studiare $\mathfrak{g}$ come S_α-modulo tramite la rappresentazione aggiunta. Poiché S_α è semplice, il Teorema di Weyl ci dice che tale rappresentazione è completamente riducibile; inoltre abbbiamo una completa classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$, cosicché possiamo descrivere $\mathfrak{g}$ come S_α-modulo.

Consideriamo dunque il sottospazio M generato da $\mathfrak{h}$ insieme con tutti gli spazi $\mathfrak{g}_{c\alpha}$, con c un qualunque scalare non nullo. È facile verificare che M è un S_α-sottomodulo di $\mathfrak{g}$. I pesi di $\mathfrak{h}_\alpha$ su M sono dunque 0 e $c\alpha(h_\alpha) = 2c$. D'altro canto sappiamo che i pesi di un $\mathfrak{sl}(2, \kappa)$-modulo devono essere interi e quindi $c \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$. Sappiamo inoltre che S_α agisce banalmente su $ker\ \alpha$: infatti se $y \in ker\ \alpha$ abbiamo

$$[x_\alpha, y] = -\alpha(y)x_\alpha = 0, \quad [y_\alpha, y] = -\alpha(y)y_\alpha = 0, \quad [h, y_\alpha] = 0$$

Lo stesso S_α è contenuto in M ed è un sottomodulo irriducibile di M. Possiamo decomporre M in una somma di irriducibili tenendo presente che $ker\ \alpha$ è il modulo banale di dimensione uguale a $dim\ \mathfrak{h} - 1$ e quindi è somma di altrettanti moduli banali unidimensionali. Dunque

$$M = S_\alpha \oplus ker\ \alpha \oplus \cdots$$

Ora è chiaro che l'autospazio relativo a 0 per $\mathfrak{h}_\alpha$ è tutto contenuto in $S_\alpha \oplus ker\ \alpha$. Dunque gli unici pesi pari di M sono 0 e ± 2. Poiché questo vale per ogni $\alpha \in \Phi$, questo dimostra che se $\alpha \in \Phi$ allora $2\alpha \notin \Phi$ (altrimenti α non potrebbe essere una radice). Ma allora 1 non è un autovalore di $\mathfrak{h}_\alpha$ in M. Il corollario al teorema di classificazione delle rappresentazioni irriducibili ci dice allora che il numero di addendi nella decomposizione di M in sottomoduli irriducibili è

$$dim\ M_0 + dim\ M_1 = dim\ M_0 = dim\ \mathfrak{h}$$

(poiché $M_1 = 0$ e $M_0 = \mathfrak{h}$). Dunque $M = S_\alpha \oplus ker\ \alpha$. In particolare $dim\ g_\alpha = 1$.

Vediamo ora come agisce S_α sugli spazi $\mathfrak{g}_\beta$, $\beta \neq \pm\alpha$. Consideriamo

$$K = \sum \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$$

Questo è un S_α-sottomodulo di $\mathfrak{g}$ i cui spazi peso sono unidimensionali ed hanno pesi interi e distinti $\beta(h_\alpha) + 2i$. Ora i pesi di questo tipo sono tutti pari o tutti dispari. Dunque lo stesso corollario richiamato prima ci dice che K è irriducibile. Sia $\beta + q\alpha$ e $\beta - r\alpha$ il peso massimale e minimale rispettivamente di K e quindi esiste una stringa ininterrotta di radici (detta la stringa α passante per β): $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$. Sappiamo inoltre che

$$(\beta - r\alpha)(h_\alpha) = -(\beta + q\alpha)(h_\alpha)$$

il che implica che $\beta(h_\alpha) = r - q$. Per finire, osserviamo che se $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$ allora $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ed essendo questi spazi di dimensione 1, allora $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Poiché la restrizione ad $\mathfrak{h}$ della forma di Killing è non degenere possiamo trasferire la forma allo spazio duale $\mathfrak{h}^*$ ponendo

$$(\gamma, \delta) = B(t_\gamma, t_\delta) \quad \forall \gamma, \delta \in \mathfrak{h}^*.$$

Noi sappiamo che Φ genera $\mathfrak{h}^*$; possiamo dunque selezionare una base $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ di $\mathfrak{h}^*$ formata da radici. Se $\beta \in \Phi$, allora $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \alpha_i$, $c_i \in \kappa$ in modo unico. Si può verificare che i coefficienti c_i sono in effetti razionali. Infatti, per $j = 1, \dots, \ell$, sia

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\alpha_i, \alpha_j)$$

e, moltiplicando per $\frac{2}{(\alpha_i, \alpha_j)}$:

$$2\frac{(\beta, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{\ell} 2c_i \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

che può essere pensato come un sistema di ℓ equazioni nelle ℓ incognite c_i, con coefficienti interi. Poichè $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ è una base e B è non degenere la matrice $((\alpha_i, \alpha_j))$ è non singolare. Ma allora anche la matrice del sistema che è ottenuta moltiplicando la j-esima riga di questa matrice per $\frac{2}{(\alpha_i, \alpha_j)}$ rimane non singolare. Ma allora il sistema possiede un'unica soluzione su $\mathbf{Q}$ dimostrando quanto volevamo.

Quanto abbiamo appena dimostrato equivale a dire che lo spazio vettoriale $\mathbf{E_Q}$ generato sui razionali dalle radici $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ ha dimensione ℓ su $\mathbf{Q}$. Inoltre tutti i prodotti scalari di vettori in $\mathbf{E_Q}$ sono ancora razionali e quindi otteniamo una forma bilineare non degenere su $\mathbf{E_Q}$. Possiamo anche verificare che la forma è definita positiva, infatti, per ogni $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$:

$$(\lambda, \mu) = B(t_\lambda, t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$$

In particolare, se $\lambda \in \mathbf{E_Q}$ abbiamo

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)^2$$

cioè una somma di quadrati e quindi è positiva o nulla, ed è nulla solo se $\lambda = 0$.

Se estendiamo gli scalari a tutto $\mathbf{R}$ prendendo $\mathbf{E} = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{E_Q}$, allora $\mathbf{E}$ è uno spazio euclideo di dimensione ℓ che ha una base costituita da radici. Ora un qualunque sottoinsieme Φ di uno spazio euclideo $\mathbf{E}$ si dice un **sistema di radici** se soddisfa le seguenti quattro proprietà:

(1) Φ è un insieme finito di generatori di $\mathbf{E}$ che non contiene lo zero.
(2) se $\alpha \in \Phi$ allora gli unici multipli di α contenuti in Φ sono $\pm\alpha$.
(3) Se $\alpha \in \Phi$ allora la riflessione σ_α che manda α in $-\alpha$ e fissa punto per punto l'iperpiano ortogonale ad α stabilizza Φ.
(4) Se $\alpha, \beta \in \Phi$ allora
$$2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}$$

Quanto abbiamo appena visto dunque ci dice che l'insieme Φ è un sistema di radici per lo spazio euclideo $\mathbf{E}$.

Dunque ogni volta che abbiamo una algebra di Lie semisemplice $\mathfrak{g}$ in cui abbiamo scelto una sottoalgebra torale massimale $\mathfrak{h}$ possiamo costruire un sistema di radici Φ ed uno spazio euclideo $\mathbf{E}$. Questa costruzione sarà la chiave per ottenere la classificazione desiderata delle algebre di Lie semisemplici, in quanto ci permetterà di ridurre il problema alla classificazione di oggetti di tipo combinatorio.

3.5 Due algebre di Lie semisemplici con lo stesso sistema di radici sono isomorfe.

Per prima cosa osserviamo che se $\mathfrak{g}$ è semplice allora il suo sistema di radici è irriducibile, cioè non può decomporsi nell'unione di due sottoinsiemi non banali ortogonali tra loro. Infatti se $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ tra loro ortogonali, prendiamo $\alpha \in \Phi_1$ e $\beta \in \Phi_2$ sicuramente la somma $\alpha + \beta$ risulta non ortogonale né a α né a β dunque $\alpha + \beta$ non può essere una radice e di conseguenza $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$. Quindi se $\mathfrak{a}$ è la sottoalgebra di $\mathfrak{g}$ generata da $\mathfrak{g}_\alpha$ per $\alpha \in \Phi_1$ $\mathfrak{a}$ commuta con ogni $\mathfrak{g}_\beta$ con $\beta \in \Phi_2$. Dunque $\mathfrak{a}$ non può certo essere tutta $\mathfrak{g}$ altrimenti il centro di $\mathfrak{g}$ non sarebbe nullo ma ciò è impossibile perché $\mathfrak{g}$ è semplice. È inoltre facile verificare che $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$, diverso da zero e proprio, contro l'ipotesi che $\mathfrak{g}$ fosse semplice.

Supponiamo ora che $\mathfrak{g}$ sia semisemplice. Allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \mathfrak{g}_t$, con $\mathfrak{g}_i$ ideali semplici. Se $\mathfrak{h}$ è una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{g}$ allora $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \cdots \mathfrak{h}_t$ dove $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ e ciascuna $\mathfrak{h}_i$ è torale massimale in $\mathfrak{g}_i$. Infatti, se $x \in \mathfrak{h}$ allora x è semisemplice e dunque nella sua decomposizione $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_t$ ciascun x_i è semisemplice. Dunque $\mathfrak{h}_i$ è torale ed è anche massimale in $\mathfrak{g}_i$: infatti se $\mathfrak{a}$ fosse torale in $\mathfrak{g}_i$ contenente strettamente $\mathfrak{h}_i$ allora è torale in $\mathfrak{g}$ e inoltre commuta con ogni $\mathfrak{h}_j, j \neq i$, e dunque genera insieme a tutti gli $\mathfrak{h}_j$ una sottoalgebra torale piú grande di $\mathfrak{h}$ contraddicendo l'ipotesi di massimalità di $\mathfrak{h}$. Dunque $\mathfrak{h}_i$ è massimale.

Supponiamo ora che Φ_i sia il sistema di radici di $\mathfrak{g}_i$ rispetto a $\mathfrak{h}_i$. Se $\alpha \in \Phi_i$ allora $\alpha \in \mathfrak{h}_i^*$, ma possiamo estendere α linearmente a tutto $\mathfrak{h}$, semplicemente ponendo $\alpha(\mathfrak{h}_j) = 0, j \neq i$. Quindi α è una radice di $\mathfrak{g}$ rispetto ad $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i$. Viceversa, se $\alpha \in \Phi$, allora $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_\alpha] \neq 0$ per qualche i, perché se fosse $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_\alpha] = 0 \forall i$ allora $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ contro l'ipotesi che α è radice. Ma allora $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i$ (perché $\mathfrak{h}_i$ commuta con ogni altro $\mathfrak{g}_i$, e quindi l'unica possibilità è che $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i$) e quindi $\alpha|\mathfrak{h}_i$ è una radice di $\mathfrak{g}_i$ relativa a $\mathfrak{h}_i$. In altre parole, abbiamo visto che Φ è unione di $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_t$, ciascuno un sistema di radici di $\mathfrak{g}_i$ rispetto a $\mathfrak{h}_i$.

Per un sistema di radici Φ si definisce **base** di Φ, un sottoinsieme Δ di Φ, se Δ è una base dello spazio euclideo E e ogni radice $\beta \in \Phi$ è combinazione lineare degli elementi di Δ con coefficienti interi tutti non negativi o tutti non posistivi. Si dimostra che ogni sistema di radici possiede una base Δ. (V. [Hu] §10.1, p.48). Abbiamo visto che $\mathfrak{g}$ è generata dagli spazi di radici $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Phi$; in effetti si può vedere che $\mathfrak{g}$ è generata da $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta$.

Per ogni $\alpha \in \Delta$, prendiamo $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nullo e un $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, anch'esso non nullo. Posto allora $\mathfrak{h}_\alpha = [x_\alpha, y_{-\alpha}]$ chiameremo l'insieme $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ **un insieme standard di generatori** di $\mathfrak{g}$.

Supponiamo ora di avere due algebre di Lie semplici $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ ciascuna con una fissata sottoalgebra torale massimale $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ rispettivamente. Risulta che se esiste un isomorfismo tra i rispettivi sistemi di radici (necessariamente irriducibili) allora esiste ed è unico un isomorfismo di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}'$ che manda $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{h}'$.

Non dimostreremo qui questo fatto limitandoci ad osservare quanto segue. Innanzitutto, un isomorfismo di radici Φ e Φ' è indotto, per definizione, da una isometria dei rispettivi spazi euclidei E ed E'. Inoltre, poiché Φ e Φ' contengono delle basi di radici semplici Δ e Δ', l'applicazione si estende per linearità ad un isomorfismo tra i duali delle sottoalgebre torali massimali $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ e, attraverso l'identificazione tramite la forma di Killing, ad un isomorfismo delle sottoalgebre torali massimali stesse $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$. Questo isomorfismo è ovviamente anche un isomorfismo di algebre di Lie abeliane. Ora dobbiamo solo estenderlo a tutto $\mathfrak{g}$. Risulta che se $\alpha \in \Delta$ corrisponde ad $\alpha' \in \Delta'$ allora $x_\alpha \mapsto x'_{\alpha'}$ definisce effettivamente il desiderato isomorfismo di algebre di Lie.

3.6 Sottoalgebre di Cartan.

Abbiamo dunque visto che se due algebre di Lie semplici (o semisemplici) hanno sistemi di radici isomorfi allora esiste un isomorfismo tra le due algebre di Lie.

Resta da dimostrare che cambiando sottoalgebra torale massimale si ottengono sempre sistemi di radici isomorfi. Questo è vero:

Teorema 3.6.1. *Sia $\mathfrak{g}$ semisemplice. $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ due algebre torali massimali. Allora esiste un automorfismo di $\mathfrak{g}$ che manda $\mathfrak{h}_1$ in $\mathfrak{h}_2$.*

La dimostrazione di questo teorema, che omettiamo, è piuttosto laboriosa e passa attraverso il concetto di Sottoalgebra di Cartan. Si dimostra che per le algebre di Lie semisemplici le sottoalgebre di Cartan coincidono con le sottoalgebre torali massimali. Si dimostra poi che le sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie arbitraria su un campo κ algebricamente chiuso e di caratteristica zero sono tra loro coniugate, passando attraverso il caso risolubile delle sottoalgebre di Borel. (v. [Hu]).

Teoria elementare delle algebre di Lie

Appendice A

Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice su $\mathbf{C}$, di dimensione finita, e sia $\mathfrak{h}$ una sua sottoalgebra di Cartan. La dimensione di $\mathfrak{h}$ si dice rango di $\mathfrak{g}$. Allora $\mathfrak{g}$ possiede una decomposizione

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

Sappiamo che *dim* $\mathfrak{g}_\alpha = 1$. La matrice di Cartan di $\mathfrak{g}$ è definita prendendo

$$(a_{ij}) \qquad \text{dove } a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbf{Z}$$

Questi coefficienti hanno le seguenti proprietà:
(1) $a_{ii} = 2$ per ogni i
(2) $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$
(3) $a_{ij} = 0$ se e solo se $a_{ji} = 0$.
La matrice di Cartan è non singolare. Sia $h_1, \dots, h_r$ una base di $\mathfrak{h}$ tale che $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$. Sia $e_i \in g_{\alpha_i}$, $f_i \in g_{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq r$, tali che $B(e_i, f_j) = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_j)}$ dove B è la forma di Killing su $\mathfrak{g}$. Allora sussistono le seguenti relazioni tra gli elementi e_i, f_i, h_i:

$$\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0, [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\
&[e_i, f_i] = h_i, [e_i, f_j] = 0, i \neq j \\
&(ad\ e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, (ad\ f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0
\end{aligned}$$

Risulta che queste relazioni generano tutte le altre relazioni tra questi elementi, cioè:

Teorema (Serre). *L'algebra generata dagli elementi e_i, f_i, h_i $1 \leq i \leq r$, con le suddette relazioni è isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Si può dimostrare che la matrice di Cartan A è caratterizzata da una ulteriore proprietà e cioè che A è il prodotto di una matrice diagonale D con coefficienti positivi e di una matrice A_+ simmetrica e definita positiva.

Verso la fine degli anni '60, V. Kac e R. Moody indipendentemente ebbero l'idea di indebolire o rimuovere del tutto quest'ultima condizione per le matrici di Cartan. Essi chiamarono "matrice di Cartan generalizzata" una matrice che soddisfacesse le prime tre proprietà elencate sopra. Essi studiarono poi quali algebre hanno origine da queste matrici di Cartan generalizzate. Le algebre così definite sono dette oggi algebre di Lie di Kac-Moody. Tra queste in particolare ci sono le algebre di Lie semisemplici su $\mathbf{C}$. In generale però tali algebre di Lie non sono di dimensione finita. Vediamo ora un esempio di algebra di Kac-Moody di dimensione infinita. Si tratta di un'algebra di Lie di tipo affine. V. [Kac].

Sia $\mathfrak{g}$ semplice di dimensione finita come sopra. Definiamo l'algebra

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$$

dove il commutatore è dato da

$$[x \otimes P, y \otimes Q] = [x, y] \otimes PQ$$

ove $x, y \in \mathfrak{g}, P, Q \in \mathbf{C}[t, t^{-1}]$. Questa è banalmente una algebra di Lie. Di maggiore interesse è la seguente estensione di quest'algebra

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbf{C}c$$

con commutatore definito da

$$[x \otimes t^n, y \otimes t^m] = [x, y] \otimes t^{n+m} + n\delta_{n+m,0} B(x, y)c$$

ed inoltre

$$[c, x \otimes t^n] = [c, d] = 0.$$

L'algebra di Lie così ottenuta è un esempio di algebra di Lie affine.

Guardiamo un po' piu' da vicino l'esempio di algebra affine $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^\wedge$. Vogliamo dare una sua rappresentazione. Fissiamo

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

base di $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. $\hat{\mathfrak{g}}$ contiene una sottoalgebra $\mathfrak{k}$ isomorfa a $\hat{\mathfrak{g}}$ stessa data da

$$\mathfrak{k} = span\{h \otimes t^{2j}, e \otimes t^{2j+1}, f \otimes t^{2j+1}, c | j \in \mathbf{Z}\}$$

Consideriamo la seguente base di $\mathfrak{k}$

$$\{B_{2j+1}, X_j, c | j \in \mathbf{Z}\}$$

ove $B_{2j+1} = (e + f) \otimes t^{2j+1}$, $X_{2j+1} = (-e + f) \otimes t^{2j+1}$, $X_{2j} = h \otimes t^{2j}$, per ogni $j \in \mathbf{Z}$. Allora la struttura di $\mathfrak{k}$ è determinata da

$$[c, B_i] = [c, X_k] = 0, [B_i, B_j] = 2i\delta_{i+j,0}c \tag{1}$$

$$[B_i, X_k] = 2X_{i+k} \tag{2}$$

$$[X_k, X_\ell] = \begin{cases} 2(-1)^{k+1} B_{k+\ell} & \text{se} \quad k + \ell \in 2\mathbf{Z} + 1 \\ 2(-1)^k k \delta_{k+\ell,0} c & \text{se} \quad k + \ell \in 2\mathbf{Z} \end{cases} \tag{3}$$

per $i, j \in 2\mathbf{Z} + 1, k\ell \in \mathbf{Z}$.

Queste informazioni possono essere codificate in modo molto efficace tramite le seguenti serie di variabili formali. Definiamo

$$B(z) = \sum_{j \in 2\mathbf{Z}+1} B_j z^j$$

$$X(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} X_k z^k$$

Definiamo anche la serie formale di Laurent

$$\delta(z) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} z^j$$

e sia D l'operatore differenziale formale

$$D = z\frac{d}{dz}$$

allora

$$(D\delta)(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} jz^j$$

Allora le relazioni (1)-(3) possono essere descritte equivalentemente come segue.

$$[c, B(z)] = [c, X(z)] = 0$$

$$[B(z_1), B(z_2)] = ((D\delta)(z_1/z_2) - (D\delta)(-z_1/z_2))c \tag{4}$$

$$[B(z_1), X(z_2)] = X(z_2)(\delta(z_1/z_2) - \delta(-z_1/z_2)) \tag{5}$$

$$[X(z_1), X(z_2)] = -2B(z_2)\delta(-z_1/z_2) + 2(D\delta)(-z_1/z_2)c \tag{6}$$

Per costruire una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})^\wedge$ consideriamo

$$V = \mathbf{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$$

lo spazio vettoriale dei polinomi in infinite variabili $x_j, j \in 2\mathbf{N}+1$. Facciamo agire

$$c \mapsto \frac{1}{2}\text{moltiplicazione per lo scalare } \frac{1}{2}$$

$$B_j \mapsto j\frac{\partial}{\partial x_j} \text{ operatore di distruzione}$$

$$B_{-j} \mapsto x_j \text{ operatore di creazione.}$$

Per descrivere l'azione di $X_j, j \in \mathbf{Z}$ come operatori differenziali su V poniamo

$$E^+(z) = exp(\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} \frac{2z^j B_j}{j})$$

$$E^-(z) = exp(-\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} \frac{2z^{-j} B_{-j}}{j})$$

$$X'(z) = -\frac{1}{2}E^-(-z)E^+(-z)$$

dove exp denota la serie formale esponenziale. Quando si sviluppano queste in serie formali di Laurent, il coefficiente di $z^j, j \in \mathbf{Z}$, è un operatore differenziale formale di V. Scriviamo

$$X'(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} X'_j z^j$$

Si potrebbe scrivere una formula esplicita di X'_j come combinazione lineare infinita formale dei monomi nelle x_j moltiplicati per monomi nelle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ma per fortuna non abbiamo bisogno di tale formula esplicita.

TEOREMA. *Gli operatori* $c, B_j, j \in 2\mathbf{Z}+1, X'_j, j \in \mathbf{Z}$ *soddisfano le relazioni (4)-(6) con* X'_j *al posto di* X_j. *In particolare questi operatori generano una rappresentazione irriducibile di* $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})^\wedge$.

Per la dimostrazione ci occorre un lemma

LEMMA. *Sia* $f(z_1,z_2)=\sum_{i,j\in\mathbf{Z}} v_{ij}z_1^i z_2^j$ *è una serie formale di Laurent in* z_1, z_2 *con coefficienti in uno spazio vettoriale, e supponiamo che per qualche* $n \in \mathbf{Z}$, *abbiamo* $v_{ij}=0$ *non appena i oppurej* $> n$. *Allora, se* $a \neq 0$,

$$\delta(az_1/z_2)f(z_1,z_2)=\delta(az_1/z_2)f(a^{-1}z_2,z_2)$$

e

$$(D\delta)(az_1/z_2)f(z_1,z_2)=(D\delta)(az_1/z_2)f(a^{-1}z_2,z_2)-\delta(az_1/z_2)(D_1f)(z_1,z_2)$$

dove

$$D_1f(z_1,z_2)=z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,z_2).$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Ad esempio, per dimostrare che $[B_i,X'_k]=2X'_{i+k}$ per $i\in 2\mathbf{Z}+1, k\in\mathbf{Z}$ calcoliamo:

$$[B_i,E^-(-z)]=[B_i, exp\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1}\frac{2z^{-j}B_{-j}}{j}]=$$

$$[B_i,\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1}\frac{2z^{-j}B_{-j}}{j}]E^-(-z)=$$

$$=2z^{-i}(2c)E^-(-z)=2z^{-i}E^-(-z)$$

poiché $2c=1$ come operatori. Possiamo usare la regola formale

$$[B, expY]=[B,Y]expY$$

perché $[B,Y]$ commuta con Y. Analogamente,

$$[B_{-i},E^+(-z)]=2z^iE^+(-z)$$

$$[B_i,E^+(-z)]=[B_{-i},E^-(-z)]=0.$$

Quindi

$$[B_i,X'(z)]=-\frac{1}{2}[B_i,E^-(-z)]E^+(-z)-\frac{1}{2}E^-(-z)[B_i,E^+(-z)]=2z^{-i}X'(z)$$

e

$$[B_{-i},X'(z)]=2z^iX'(z)$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo (5). Il commutatore piú interessante è quello tra due X':

$$4X'(z_1)X'(z_2)=E^-(-z_1)E^+(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_2)=$$

$$E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)exp\,[-\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1}\frac{2z_1^jB_j}{j},\sum_{k\in 2\mathbf{N}+1}\frac{2z_2^{-k}B_{-k}}{k}]=$$

$$E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)exp\,(-\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1}4(z_1/z_2)^j/j)=$$

$$E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)exp\,(log\,(\frac{1-z_1/z_2}{1+z_1/z_2})^2)=$$

$$E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)(\frac{1-z_1/z_2}{1+z_1/z_2})^2.$$

Scambiando i ruoli di z_1 e z_2 abbiamo

$$4X'(z_2)X'(z_1) = E^-(-z_2)E^-(-z_1)E^+(-z_2)E^+(-z_1)(\frac{1-z_2/z_1}{1+z_2/z_1})^2$$

e poiché

$$E^{\pm}(-z_1)E^{\pm}(-z_2) = E^{\pm}(-z_2)E^{\pm}(-z_1)$$

troviamo

$$4[X'(z_2), X'(z_1)] = E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)4(D\delta)(-z_1/z_2).$$

Ora applichiamo il Lemma a questa relazione, troviamo

$$4[X'(z_2), X'(z_1)] = E^-(z_2)E^-(-z_2)E^+(z_2)E^+(-z_2)(D\delta)(-z_1/z_2)$$
$$-((z_1\frac{d}{dz_1})E^-(-z_1))E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)$$
$$+E^-(-z_1)E^-(-z_2)((z_1\frac{d}{dz_1})E^+(-z_1))E^+(-z_2))\delta(-z_1/z_2)$$
$$(D\delta)(-z_1/z_2) + ((\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} 2z^{-j}B_{-j}))$$
$$E^-(-z_1)E^-(-z_2)E^+(-z_1)E^+(-z_2)(\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} 2z^{j}B_j))\delta(-z_1/z_2)$$

Ora applichiamo il Lemma di nuovo ottenendo

$$(D\delta)(-z_1/z_2) - (\sum_{j\in 2\mathbf{N}+1} 2z^{j}B_j)\delta(-z_1/z_2)$$

che è il membro a destra della relazione (6).

□

Teoria elementare delle algebre di Lie

Appendice B

Come accennato nell'introduzione, le teorie di Lie hanno avuto negli ultimi decenni uno sviluppo notevolissimo. Uno dei motivi principali di questa crescita rigogliosa è l'interazione tra la matematica e la fisica a partire dalla fine degli anni sessanta del secolo ventesimo.

Una delle direzioni di espansione riguarda la teoria delle algebre di vertice che possono essere viste come un analogo algebrico della teoria fisica dei campi conformi in dimensione due. Da un punto di vista algebrico la teoria delle algebre di operatori di vertice è analoga alla teoria delle algebre di Lie. ([FHL]). Esiste ora una interpretazione geometrica delle algebre di operatori di vertice dovuta a Yi-Zhi Huang che usa le superfici di Riemann. Risulta anche che è possibile dare una interpretazione geometrica delle algebre di Lie di dimensione finita tramite alberi binari, il che mostra, in un certo senso, che la teoria delle algebre di Lie sono una specie di teoria dei campi conformi in dimensione uno.

Esistono interessanti legami tra la teoria degli alberi binari e ad esempio la geometria iperbolica. [STT]. Ci si può ragionevolmente aspettare che tali legami possano giovare allo studio delle algebre di Lie di dimensione finita.

B.1 Definizione ed esempi di alberi binari.

Chiameremo **albero binario**, o a volte semplicemente **albero**, un insieme finito composto di almeno tre elementi, detti **nodi**, dotato di una relazione tra nodi: ogni nodo, tranne uno detto **radice**, è figlio di un unico nodo, e può non avere figli (diremo allora che è un nodo **esterno**) oppure avere esattamente due figli: un figlio **destro** ed un figlio **sinistro**, e diremo allora che è un nodo interno. Un **sottoalbero** binario di un albero T è un sottoinsieme di nodi di T con le relazioni indotte da quelle di T. Diremo che un albero ha **taglia** $n \geq 1$ se possiede n nodi interni. Un albero di taglia n possiede $n+1$ nodi esterni. Un **cammino** da un nodo p_1 ad un nodo p_2 è un sottoinsieme ordinato

$$(q_0 = p_1, q_1, \ldots, q_k = p_2)$$

di nodi di T tali che q_i è figlio di q_{i-1}, $i = 1, \ldots, k$. (Un esempio famoso di cammino del genere si trova nella Genesi). La coppia ordinata (q_{i-1}, q_i) (padre,figlio) si chiama **passo i-esimo** del cammino. È chiaro che per ogni nodo esiste un unico cammino dalla radice al nodo. La lunghezza di questo cammino è la **profondità** del nodo. (Corrisponde pressappoco alla metà del grado di parentela). Se esiste un cammino da p_1 a p_2 diremo che p_1 è un **antenato** di p_2 e p_2 è un **discendente** di p_1. In ogni albero binario T possiamo dare un ordine totale ai suoi nodi nella maniera seguente. Diremo che p_1 **viene prima** di p_2 e scriveremo $p_1 < p_2$ se p_1 è un antenato di p_2 oppure, se non abbiamo questa relazione tra i due nodi, diremo comunque che p_1 viene prima di p_2 se, avendo comunque un antenato in comune (la radice), e considerando il più recente antenato in comune, p_1 discende dal figlio destro mentre p_2 discende dal figlio sinistro. Un po' come se questa fosse un legge che regola la successione al trono in una famiglia reale: potremmo chiamare il figlio destro il primogenito che trasmette il suo diritto di primogenitura ai suoi discendenti.

Questo ordine totale sui nodi si dice **preordinamento** di T. Il preordinamento di un albero binario induce ovviamente un ordinamento totale sui nodi esterni dell'albero. Il nostro oggetto di studio principale in questa appendice consiste in alberi binari con un fissato ordinamento nei nodi esterni, non necessariamente coincidente con l'ordinamento indotto dal preordinamento.

Due alberi binari si dicono equivalenti se esiste una biiezione tra l'insieme dei nodi di questi due alberi tali che le relazioni tra i nodi e l'ordinamento dei nodi esterni sia invariante per la biiezione.

L'insieme di tutte le classi di equivalenza di alberi binari di taglia n ($n \geq 1$) si dice lo **spazio dei moduli** degli alberi binari di taglia n e lo indicheremo con B_n. L'insieme degli alberi binari di ogni taglia si denota B ed avremo ovviamente

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Indicheremo inoltre con $[T]$ la classe di equivalenza dell'albero T.

Il gruppo delle permutazioni su $n+1$ oggetti S_{n+1} agisce su B_n cambiando l'ordinamento dei nodi esterni. Ricordiamo che un albero di taglia n possiede $n+1$ nodi esterni. Dato un albero T di taglia n possiamo sempre trovare una permutazione $\sigma_T \in S_{n+1}$ tale che l'ordinamento dei nodi esterni di $\sigma_T(T)$ è quello indotto dal preordinamento.

È facile vedere che B_1 contiene solo due elementi, che differiscono solo per l'ordinamento dato ai due nodi esterni. Indichiamo allora con $[\Lambda]$ l'albero in cui l'ordinamento dei nodi esterni è quello indotto dal preordinamento. Allora l'altro elemento di B_1 è $\sigma_{12}([\Lambda])$ dove σ_{12} è l'unico elemento non banale di S_2.

B.2 Operazioni sugli alberi. Introduciamo ora delle operazioni su B. Siano T_1 e T_2 due alberi di taglia rispettivamente n_1 e n_2. Per ogni intero positivo $i \leq n_1 + 1$ definiamo un albero binario $T_1 \times_i T_2$ di taglia $n_1 + n_2$ ottenuto incollando la radice dell'albero T_2 sul i-esimo nodo esterno di T_1, inoltre l'ordinamento dei nodi esterni del nuovo albero è il seguente

$$p_1, \dots, p_{i-1}, q_1 \dots, q_{n_2+1}, p_{i+1}, \dots, p_{n_1+1}$$

dove p_i sono i nodi di T_1 e q_i sono i nodi di T_2. Questa operazione viene detta **saldatura**.

La saldatura è associativa nel senso che:

$$T_1 \times_i (T_2 \times_j T_3) = (T_1 \times_i T_2) \times_{i+j-1} T_3$$

Dato un albero binario T ed un nodo interno p diverso dalla radice, possiamo "tagliare" $\sigma_T(T)$ nel nodo p ottenendo due sottoalberi binari T_p^-, T_p^+ di $\sigma_T(T)$, dove T_p^- è formato da p e da tutti i suoi discendenti, mentre T_p^+ è formato da p e da tutti i nodi che non sono discendenti di p. Supponiamo che il primo nodo esterno di T_p^- sia l'i-esimo nodo esterno di $\sigma_T(T)$. Allora dalle definizioni segue

$$\sigma_T(T) = T_p^- \times_i T_p^+$$

ovvero

$$T = \sigma_T^{-1}(T_p^- \times_i T_p^+).$$

Dato un albero T ed un nodo interno p di T, sia $\tilde{T}_p$ l'albero che ha gli stessi nodi di T lo stesso ordinamento dei nodi esterni, le stesse relazioni tra i nodi tranne che il figlio destro e quello sinistro di T sono scambiati.

Per $[\Lambda] \in B_1$ abbiamo

$$[\tilde{\Lambda}_\lambda] = \sigma_{12}([\Lambda])$$

dove λ indica la radice di $[\Lambda]$. Per un albero qualunque $[T] \in B$, siano p_s e p_d il figlio sinistro e destro di p rispettivamente. L'insieme $\{p, p_s, p_d\}$ e ordinamento (p_d, p_s) è un albero binario di taglia 1 che chiamiamo P. Chiaramente P è equivalente a Λ. Abbiamo allora per un opportuno indice i,

$$\sigma_T([T]) = [T_p^+] \times_i (([P] \times_2 [T_{p_s}^-]) \times_1 [T_{p_d}^-]),$$

$$\sigma_T([\tilde{T}_p]) = [T_p^+] \times_i (([\tilde{P}_p] \times_2 [T_{p_s}^-]) \times_1 [T_{p_d}^-]),$$

Ma essendo, come detto, $[P] = [\Lambda]$ e $[\tilde{P}_p] = [\tilde{\Lambda}_\lambda]$, abbiamo

$$\sigma_T([T]) = [T_p^+] \times_i (([\Lambda] \times_2 [T_{p_s}^-]) \times_1 [T_{p_d}^-]),$$

$$\sigma_T([\tilde{T}_p]) = [T_p^+] \times_i (([\tilde{\Lambda}_\lambda] \times_2 [T_{p_s}^-]) \times_1 [T_{p_d}^-]),$$

Sia ora $\{I, E\}$ un insieme di due soli oggetti, sia inoltre p un nodo esterno di un albero T, e sia p' il genitore di p, sia infine r la radice di T. Definiamo un nuovo albero T_p^{IE} aggiungendo due nuovi nodi: un nodo esterno E ed un nodo interno I. Questi nodi devono essere inseriti in modo che I prenda il posto di p e p diventi il figlio sinistro di I mentre E diventa il figlio destro di I. Infine per quanto riguarda l'ordinamento stipuliamo che E diventa l'ultimo nodo esterno del nuovo albero.

Definiamo anche un secondo albero T_r^{IE} in maniera analoga solo che ora I diventa la nuova radice del nuovo albero, la vecchia radice diventa il figlio sinistro di I mentre E diventa il figlio destro.

Per $T = \Lambda$ abbiamo

$$[\Lambda_\lambda^{IE}] = [\tilde{\Lambda}_\lambda] \times_1 [\Lambda]$$

$$[\Lambda_{\lambda_d}^{IE}] = \sigma_{23}([\Lambda] \times_1 [\tilde{\Lambda}_\lambda]),$$

$$[\Lambda_{\lambda_s}^{IE}] = [\Lambda] \times_2 [\tilde{\Lambda}_\lambda],$$

dove λ_d e λ_s sono rispettivamente il figlio destro e sinistro di λ e σ_{23} è la trasposizione che scambia il 2 con il 3.

Dato un albero binario qualunque T, sia R il sottoalbero di T che ha per nodi la radice di T e i suoi due figli. Abbiamo

$$[T] = ([R] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [T_{r_d}^-]$$

È ovvio che $[R] = [\Lambda]$. Allora la precedente si può riscrivere come

$$[T] = ([\Lambda] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [T_{r_d}^-]$$

Dalla definizione di T_r^{IE} e dalla precedente relazione abbiamo

$$[T_r^{IE}] = ([\Lambda_\lambda^{IE}] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [T_{r_d}^-].$$

Se p è un nodo esterno di $T_{r_d}^-$ abbiamo

$$[T_p^{IE}] = ([\Lambda] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [(T_{r_d}^-)_p^{IE}].$$

Se p è un nodo esterno di $T_{r_s}^-$ abbiamo

$$[T_p^{IE}] = ([\Lambda] \times_2 [(T_{r_s}^-)_p^{IE}]) \times_1 [T_{r_d}^-].$$

Esercizio: verificare che sono sodisfatte le seguenti uguaglianze:

$$([\Lambda_{\lambda_d^{IE}}] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [T_{r_d}^-] = ([\Lambda] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [(T_{r_d}^-)_{r_d}^{IE}],$$

$$([\Lambda_{\lambda_s^{IE}}] \times_2 [T_{r_s}^-]) \times_1 [T_{r_d}^-] = ([\Lambda] \times_2 [(T_{r_s}^-)_{r_s}^{IE}]) \times_1 [T_{r_d}^-].$$

B.3 Definizione algebra di Lie geometrica. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbf{F}$ e sia V^* il suo duale. Fissato un intero positivo n indichiamo con $\mathcal{F}_n(V,\mathbf{F})$ lo spazio di tutte le forme lineari su $V^* \otimes V^{\otimes(n-1)}$ e consideriamo

$$\mathcal{F}(V,\mathbf{F}) = \bigcup_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n(V,\mathbf{F}).$$

Il gruppo S_n agisce su $\mathcal{F}_{n+1}(V,\mathbf{F})$ come segue:
per $f \in \mathcal{F}_{n+1}(V,\mathbf{F})$, $v^* \in V^*, v_1, \dots, v_n \in V$, $\sigma \in S_n$,

$$\sigma(f)(v^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v^* \otimes v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Sia $\{e_i\}_{i=1}^k$ una base di V e $\{e_i^*\}_{i=1}^k$ la sua base duale. Per ogni $f \in \mathcal{F}_m(V,\mathbf{F}), g \in \mathcal{F}_n(V,\mathbf{F})$ ed ogni intero positivo $i \leq m-1$ definiamo la contrazione $f \times_i g \in \mathcal{F}_{m+n-2}(V,\mathbf{F})$ tramite

$$\begin{aligned}
&(f \times_i g)(v^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m+n-3}) \\
&= \sum_{l=1}^{k} f(v^* \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes e_l \otimes v_{n+i-1} \otimes \cdots v_{m+n-3}) \\
&\cdot g(e_l^* \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_{n+i-2}).
\end{aligned}$$

Si può verificare che la contrazione non dipende dalla scelta della base di V. Inoltre, poiché V ha dimensione finita, si può verificare che questa operazione è associativa, nel senso che per $f, g, h \in \mathcal{F}(V,\mathbf{F})$,

$$f \times_i (g \times_j h) = (f \times_i g) \times_{i+j-1} h$$

ed infine che questa operazione è distributiva rispetto all'addizione.

Definizione B.1. *Una algebra di Lie geometrica su un campo $\mathbf{F}$ è uno spazio vettoriale V su $\mathbf{F}$ ed una applicazione $\nu : B \to \mathcal{F}(V,\mathbf{F})$ tale che $\nu(B_n) \subset \mathcal{F}_{n+2}(V,\mathbf{F})$ che soddisfa i seguenti postulati:*

(i) *(Chiralità) Per ogni $[T] \in B$*

$$\nu([\tilde{T}_P]) = -\nu([T]).$$

(ii) *(Conservazione) Per ogni $[T] \in B_n$*

$$\nu([T_r^{IE}]) = \sum_{i=1}^{n+1} \nu([T_{p_i}^{IE}])$$

(iii) *(Permutazione) Per ogni $\sigma \in S_{n+1}$ e $[T] \in B_n$*

$$\nu(\sigma([T])) = \sigma(\nu([T])).$$

(iv) *(Saldatura) Per ogni $[T_1], [T_2] \in B$*

$$\nu([T_1]) \times_i [T_2]) = \nu([T_1]) \times_i \nu([T_2])$$

Se (V_1, ν_1) e (V_2, ν_2) sono due algebre di Lie geometriche, una applicazione lineare $\eta : V_1 \to V_2$ si dice un **omomorfismo** se per ogni $v^* \in V_2^*$, $v_1, \dots, v_{n+1} \in V_2$ e $[T] \in B_n$ abbiamo

$$\nu_2([T])(v^* \otimes \eta(v_1) \otimes \cdots \otimes \eta(v_{n+1})) = \nu_1([T])(\eta^*(v^*) \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n+1})$$

TEOREMA. *Esite una equivalenza tra la categoria delle algebre di Lie di dimensione finita su* $\mathbf{F}$ *e la categoria della algebre di Lie geometriche sullo stesso campo.*

Non dimostreremo qui questo teorema, v.[Huang]. Ci limitiamo a descivere i funtori tra le due categorie.

Descriviamo per prima cosa il funtore F_L che associa ad ogni algebra di Lie una algebra di Lie geometrica.

Se $\mathfrak{g}$ è una algebra di Lie su $\mathbf{F}$, definiamo ricorsivamente una applicazione

$$\nu : B \to \mathcal{F}(\mathfrak{g})$$

come segue. Se $n = 1$, B_1 contiene solo due elementi $[\Lambda]$ e $\sigma_{12}[\Lambda]$. Definiamo

$$\nu([\Lambda])(v^* \otimes v_1 \otimes v_2) = \langle v^*, [v_1, v_2] \rangle$$

e

$$\nu(\sigma_{12}([\Lambda]))(v^* \otimes v_1 \otimes v_2) = \langle v^*, [v_2, v_1] \rangle$$

Una volta definito $\nu([T])$ per ogni $[T] \in B_k$ con $k < n$, usiamo l'osservazione che per ogni $[T] \in B_n$ ed ogni nodo interno p diverso dalla radice di T, esiste una unica permutazione σ_T ed un intero positivo $i < n + 1$ tale che

$$[T] = \sigma_T^{-1}([T_p^+] \times_i [T_p^-]).$$

Per ipotesi $\nu([T_p^+])$ e $\nu([T_p^-])$ sono già stati definiti. Poniamo allora

$$\nu[T] = \sigma_T^{-1}(\nu([T_p^+]) \times_i \nu([T_p^-])).$$

Risulta che $(\mathfrak{g}, \nu)$ è un'algebra di Lie geometrica. Si verifica inoltre che se ϕ è un omomorfismo di algebre di Lie allora la stessa applicazione è anche un omomorfismo di algebre di Lie geometriche.

Definiamo infine il funtore inverso.

Se (V, ν) è un'algebra di Lie geometrica, definiamo un operazione di *bracket* su V tramite la formula

$$\langle V^*, [v_1, v_2] \rangle = \nu([\Lambda])(v^* \otimes v_1 \otimes v_2)$$

dove $v^* \in V^*$ e $v_1, v_2 \in V$.

Allora V con questo bracket è un'algebra di Lie.

Soluzione di alcuni esercizi

Appendice C

Scriviamo ciascun fattore $1-q^j = \sum_{a_j=0}^{1}(-1)^{a_j}q^{ja_j}$. Il prodotto di tutti questi polinomi ha allora la forma seguente:

$$\sum(-1)^{a_1+a_2+\cdots}q^{a_1\cdot 1+a_2\cdot 2+\cdots}$$

si vede dunque che ciascuna partizione con parti distinte $a_1\cdot 1+a_2\cdot 2+\cdots$ contribuisce $(-1)^{a_1+a_2+\cdots}$ e cioè $+1$ se la partizione ha un numero pari di parti (distinte) e -1 se la partizione ha un numero dispari di parti (distinte). Di conseguenza il coefficiente di q^n è uguale al numero delle partizioni di n in parti pari distinte meno il numero di partizioni di n in parti dispari distinte. Ad esempio, i primi coefficienti della serie sono

$$1,-1,-1,0,0,1$$

in corrispondenza alle seguenti partizioni di $n=0,1,2,3,4,5$:

$$1;2;2+1,3;3+1,4;3+2,4+1,5.$$

Tutte le algebre di Lie di dimensione 2 su κ non abeliane sono isomorfe tra loro. Sia V con base $\{x,y\}$ e struttura determinata da $[x,y]=y$. Sia inoltre W con base $\{z,t\}$ e struttura determinata da $[z,t]=az+bt$ per dei fissati scalari $a,b\in\kappa$, non entrambi nulli. Se $a=0$ allora $b\neq 0$ allora definendo $x\mapsto \frac{z}{b}$ e $y\mapsto bt$ si ottiene un isomorfismo ϕ di spazi vettoriali che è anche un omomorfismo di algebre di Lie in quanto

$$[\phi(x),\phi(y)]=[z,t]=bt=\phi(y)$$

Se invece $a\neq 0$ e $b=0$ allora poniamo $x\mapsto \frac{t}{-a}$ e $y\mapsto az$ allora

$$[\phi(x),\phi(y)]=[-t,z]=[z,t]=az=\phi(y)$$

Infine se $(a,b)\neq(0,0)$ considero una nuova base di W prendendo $\{z'=z,t'=az+bt\}$ e definisco $x\mapsto\frac{z'}{b}$ e $y\mapsto bt'$. Allora

$$[\phi(x),\phi(y)]=[\frac{z'}{b},bt']=[z',t']=[z,t']=[z,az+bt]=b[z,t]=bt'=\phi(y)$$

e dunque abbiamo un isomorfismo anche in questo caso.

Esercizio: Calcolare esplicitamente la rappresentazione aggiunta dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2,k)$. Poiché $dim\ \mathfrak{sl}(2,k)=3$ gli elementi x,h,y di $\mathfrak{sl}(2,k)$ si rappresentano, nella rappresentazione aggiunta, come matrici 3×3. Precisamente (nella base $\{x,h,y\}$:

$$x\mapsto ad\ x=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$h\mapsto ad\ h=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$y \mapsto ad\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa rappresentazione è irriducibile. Ifatti, se I è un ideale non nullo di $\mathfrak{g}$ sia $v = ax + bh + cy$ un suo elemento non nullo. Supponiamo ad esempio che $a \neq 0$. Allora $[h, v] = 2ax - 2cy \in I$. Moltiplicando ancora questo risultato per x abbiamo $[y, 2ax - 2cy] = 2a[y, x] = -2ah \in I$. Ciò mostra che $h \in I$. Ma allora $[h, x] = 2x \in I$ e $[h, y] - 2y \in I$. Ma allora I contiene la base $\{x, h, y\}$ di $\mathfrak{g}$ e dunque coincide con $\mathfrak{g}$. Dunque la rappresentazione non ha sottomoduli propri non banali.

Bibliografia

[Andrews] G. Andrews, The Theory of Partitions, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Vol.2, Addison-Wesley, 1976. Edizione in brossura: Cambridge University Press, 1998.

[Artin] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991. Trad. It. Algebra, Bollati Boringhieri, 1997.

[Baker]A. Baker, *Matrix groups: An Introduction to Lie group theory*, Springer Undergraduate Math Series, 2002

[Baas] N.A. Baas, Sophus Lie, The Mathematical Intelligencer, Vol. 16, no.1, 16-19, 1994.

[Bianchi] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni*, Pisa, Spoerri, (1918).

[Borel-Bass] A. Borel, H. Bass, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969

[Bourbaki] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap I (2nd ed), II-III, IV-VI, VII-VIII, Act. Sci. Ind. nos. 1285, 1349, 1337, 1364, Paris, Hermann, 1971,1972,1968,1975.

[Carter] R. Carter, *Simple Groups of Lie type*, Interscience, New York, 1972

[Chevalley] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, vol. I, Princeton University Press, Princeton, NJ 1946.

[Dixmier] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974

[Faddeev et al.] L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin, L.A. Takhtajan, Quantization of Lie groups and Lie algebras. Algebraic analysis, Vol. I, 129–139, 1988.

[FdV] H. Freudenthal, H. de Vries, *Linear Lie Groups*, Academic Press, New York, 1969

[FLM] I.B. Frenkel, Y.Z. Huang, J. Lepowsky, On axiomatic approaches to Vertex Operator Algebras and Modules, *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 104, Amer. Mat. Soc., Providence, RI, 1993.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Academic Press, Boston 1988.

[G] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York, 1967.

[Georgi] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Addison-Wesley, 1982.

[Gleason] A. Gleason, Groups without small subgroups, Annals of Math. 56 (1951) 193-212.

[Hawkins1] T. Hawkins, Wilhelm Killing and the Structure of Lie Algebras, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 26 (1982), no. 2, 127–192.

[Hawkins2] T. Hawkins, The birth of Lie's theory of groups, The Mathematical Intelligencer, Vol. 16, no.2, 6-17, 1994.

[Helgason] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[Herman] R. Herman, *Lie groups for Physicists*, Benjamin, New York, 1966.

[Herstein] I. N. Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti, III Edizione, I ristampa, gennaio 1994.

[Hilbert] D. Hilbert, Mathematical Problems, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1901-02) 437-479.

[Hochschild] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, San Francisco, 1965.

[Howe] R. Howe, Very Basic Lie Theory, Amer. Math. Monthly, NOv 1983, 600-623.

[Humphreys] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation theory*, Springer Verlag, New York 1972.

[Huang] Y.Z. Huang, Binary trees and finite-dimensional Lie algebras, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **56** (1994), part 2, 337-348.

[Ibragimov] N.H. Ibragimov, Sophus Lie and Harmony in Mathematical Physics, on the 150th anniversary of his birth, The Mathematical Intelligencer, Vol. 16, no.1, 20-28, 1994.

[Jacobson1] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover, 1979.

[Jacobson2] N. Jacobson, *Basic Algebra*, Vol. I, W.H. Freeman, 2nd ed. 1985.

[Kac] V.G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd Ed., Cambridge Unive. Press, 1994.

[Kaplansky] I. Kaplansky, *Lie algebras and locally compact groups*, University of Chicago Press, Chicago, 1971.

[Lang1] S. Lang, *Algebra*, Springer Verlag, GTM 211, Revised 3rd edition, 2002

[Lang2] S. Lang, *Linear Algebra*,New York, NY: Springer-Verlag, 1987. Third

Edition. [Trad. It. della prima edizione originale *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, Torino 1970]

[LM] J. Lepowksy, G.W. McCollum, *Elementary Lie algebra Theory*, Yale University 1974.

[LW] J. Lepowksy, R.L. Wilson, A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities, *Advances in Math.* **45** (1982), 21-72.

[Lusztig] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, Boston 1993.

[Margulis] G. A. Margulis, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer Verlag, 1991.

[MZ] D. Montgomery, L. Zippin, Small groups of finite-dimensional groups, Annals of Math. 56 (1952)213-241.

[MoPi] R. V. Moody, A. Pianzola, *Lie algebras with triangular decompositions.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[Nomizu] K. Nomizu, *Lie Groups and differential geometry*, Math. Soc. of Japan, 1956.

[STT] D.D. Sleator, R.E. Tarjan, W.P. Thurston, Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry, *J. Amer.Math. Soc.* **1** (1988), 647-681.

[Samelson] H. Samelson, *Notes on Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

[Seligman] G.B. Seligman, *Modular Lie Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[SCh] Seminaire C. Chevalley, *Classification des groupes de Lie algébriques*, École Norm. Sup., Paris, 1956-58.

[SSL] Seminaire Sophus Lie, *Theorie des algebres de Lie, Topologie des groupes de Lie*, École Norm. Sup., Paris, 1954-55.

[Serre1] J.P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin, New York, 1965.

[Serre2] J.P. Serre, *Algebres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, New York 1966.

[V] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations.* Graduate Texts in Mathematics, 102. Springer-Verlag, New York, 1984.

[Wallach] N.R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[Warner] F. Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups*, Springer Verlag, 1980.

[Winter] D.J. Winter, *Abstract Lie Algebras*, MIT Press, Cambridge, Mass, 1972.