Algebre di Vertice, moonshine, identità di

Rogers-Ramanujan: una breve panoramica.

Stefano Capparelli

Me.Mo.Mat.

SUNTO. Le algebre di vertice costituiscono un nuovo tipo di struttura algebrica che può essere pensata come un analogo algebrico della teoria fisica dei campi conformi in dimensione due. In matematica tale struttura è scaturita dalla teoria delle rappresentazioni di algebre di Lie affini e svolge un ruolo importante nella dimostrazione del fenomeno "moonshine" che mette in relazione forme modulari e il più grande gruppo semplice sporadico, il cosiddetto Mostro. È inoltre strettamente collegata alla teoria di alcune identità combinatorie di cui il prototipo è la classica identità di Rogers-Ramanujan.

Il tono di questa panoramica è, in alcuni punti, volutamente informale.

1. Rogers-Ramanujan. Una delle identità di Rogers e Ramanujan è la seguente

$$\prod_{m\geq 1}(1-q^{5m-4})^{-1}(1-q^{5m-1})^{-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \tag{1}$$

Se sviluppiamo in serie di potenze ambo i lati otteniamo qualcosa del tipo

$$\sum_{j\geq 0}a_jq^j=\sum_{j\geq 0}b_jq^j \tag{2}$$

Allora l'identità è equivalente a dire che

$$a_j=b_j \tag{3}$$

per qualunque $j\geq 0$. È interessante capire chi sono a_j e b_j. Il primo membro di (1) è

$$(1+q+q^2+\dots)(1+q^4+q^8+\dots)(1+q^6+q^{12}+\dots)\cdots \tag{4}$$

e il coefficiente a_j di q^j è ottenuto prendendo alcune copie di 1, alcune copie di 4, alcuni 6, etc.

Per esempio: $a_6 = 3$ perché q^6 si può ottenere come $q^6 \cdot 1 \cdot 1$ oppure $q^2 \cdot q^4 \cdot 1$ oppure $1 \cdot 1 \cdot q^6$.

Ovvero questo coefficiente conta le partizioni di 6 ottenute prendendo 6 volte 1 oppure 1 volta 4 e 2 volte 1 oppure 1 volta 6. Ossia le partizioni di 6 le cui parti sono congrue a 1,4 modulo 5.

La descrizione di b_j è un po' più laboriosa. Chiamiamo

$$C_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \sum_{j\geq 0} b_{n,j} q^j \tag{5}$$

e osserviamo che

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \tag{6}$$

"descrive" le partizioni di un intero in parti minori o uguali a n.

Per esempio: il coefficiente di q^6 in

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)} \tag{7}$$

si ottiene contando le seguenti partizioni.

$* * * * **$

$* * * *$
$* *$

$* * * **$
$*$

$* **$
$* **$

A ciascuna di queste partizioni di 6 aggiungiamo $n^2 = 4 = 1 + 3$ nuove unità che indichiamo con o

$* * * * * *ooo$
o

$* * * *ooo$
$* *o$

$$* * * * * \, o o o$$
$$* \, o$$

$$* * * \, o o o$$
$$* * * \, o$$

in modo da ottenere partizioni di 10 in cui le parti p_i soddisfano

$$p_2 - p_1 \geq 2 \tag{8}$$

In generale dunque $b_{n,j}$ conta il numero delle partizioni di j in esattamente n parti e tali che

$$p_i - p_{i-1} \geq 2 \tag{9}$$

Se rimuoviamo la limitazione di n abbiamo che b_j conta il numero delle partizioni di j in cui le parti successive differiscono di almeno 2.

Quindi il teorema di Rogers e Ramanujan si può rienunciare come segue:

Teorema. RR. *Il numero delle partizioni con una certa condizione di congruenza sulle parti è uguale al numero delle partizioni con una condizione sulla differenza tra le parti.*

Questo è un notevole teorema che il grande Ramanujan congetturò verso il 1913 ma che non riuscì a dimostrare. Lo comunicò ad Hardy a Cambridge ma né lui né nessun altro a Cambridge ne trovò una dimostrazione. Fu dunque con enorme stupore che un giorno del 1917, mentre curiosava in biblioteca, Ramanujan si imbattè in una oscura memoria del 1894 in cui Rogers aveva già dimostrato il Teorema. Seguì una intensa collaborazione con Rogers.

2. Identità di Macdonald. Agli inizi degli anni '70 Macdonald ed indipendentemente il fisico Dyson scoprirono varie identità per alcune potenze della funzione eta di Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n>0} (1 - q^n) \tag{10}$$

Per esempio

$$\eta(\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{\frac{3}{2}(\frac{n+1}{6})^2} \tag{11}$$

Questa è una identità che risale a Eulero scoperta mentre egli studiava la funzione partizione $p(n)$ che conta il numero di partizioni di un intero n. In effetti, $\eta(\tau)$, a parte il fattore $q^{\frac{1}{24}}$, è sostanzialmente l'inversa della funzione generatrice della funzione partizione

$$\prod (1 - q^n)^{-1} = \sum p(n) q^n \tag{12}$$

inoltre il secondo membro di (11) è una funzione theta.

Le identità di Macdonald riguardano potenze $\eta(\tau)^m$ in cui

$$m = 3, 8, 10, 14, 15, 21, 24, 26, 28, ... \tag{13}$$

Dyson si domandò da dove venisse questa strana successione di interi. Il caso $m = 3$ riproduce sostanzialmente la famosa identità di triplo prodotto di Jacobi:

$$\prod_{n>0}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n-1}z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{n^2} z^n \tag{14}$$

Macdonald scoprì che queste identità corrispondono a cosiddetti sistemi affini di radici: una generalizzazione di quei sistemi di radici che sono sostanzialmente degli oggetti combinatori a cui si riduce la classificazione delle algebre di Lie semplici sui complessi.

Macdonald: con un'unica eccezione, i numeri di quella successione sono le dimensioni delle algebre di Lie semplici sui complessi. L'eccezione è il numero 26: per quanto ne so non se ne conosce una spiegazione in termini di algebre di Lie. Tuttavia il numero 26 è un numero ricorrente in questa teoria.

3. Algebre di Lie. Data un'algebra di Lie semplice, per esempio $sl(2, \mathbf{C})$ cioè matrici 2×2 a traccia zero con prodotto

$$[x, y] = xy - yx \tag{15}$$

esiste una cosiddetta formula del denominatore dovuta a H. Weyl

$$e^{\rho}\sum_{w\in W} det(w)e^{-w(\rho)} = \prod_{\alpha>0}(1-e^{\alpha}) \tag{16}$$

Anche senza entrare nei dettagli si vede ad occhio la somiglianza di questa formula con quelle viste sopra. La somma ed il prodotto in (16) sono però finiti. Tuttavia, proprio in quegli stessi anni, fine anni '60 - inizio anni '70, Kac e Moody indipendentemente, generalizzarono le algebre di Lie semplici ad algebre di Lie che possono avere dimensione infinita. Kac inoltre estese a queste algebre la formula del carattere di Weyl. Così abbiamo ora la cosiddetta formula del denominatore di Weyl e Kac per algebre di Kac-Moody che appare così:

$$e^{\rho}\sum_{w\in W} det(w)e^{-w(\rho)} = \prod_{\alpha>0}(1-e^{\alpha})^{mult(\alpha)} \tag{17}$$

Nel caso delle algebre classiche $mult(\alpha) = 1$, ma ora, trattandosi di algebre di dimensione infinita, la somma e il prodotto sono infiniti. Risultò che le identità di Macdonald altro non sono che le formule del denominatore per queste nuove algebre. Per esempio:

$$sl(2, \mathbf{C})^{\sim} = sl(2, \mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbf{C}c \tag{18}$$

Queste sono le matrici 2×2 a coefficienti nei polinomi di Laurent $\mathbf{C}[t, t^{-1}]$ più un elemento centrale, cioè che commuta con ogni altro, detto c. Il prodotto è dato da

$$[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j} + i\delta_{i+j,0} tr(xy)c \tag{19}$$

La formula del denominatore per l'algebra $sl(2,\mathbf{C})^{\sim}$ è esattamente l'identità del triplo prodotto di Jacobi.

Esiste una notevolissima rappresentazione di $sl(2,\mathbf{C})^{\sim}$. Dati gli elementi

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la seguente è una base di $sl(2,\mathbf{C})^{\sim}$:

$$B_j = e \otimes t^{j-1/2} + f \otimes t^{j+1/2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad j \text{ dispari} \tag{21}$$

$$X_j = -e \otimes t^{j-1/2} + f \otimes t^{j+1/2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad j \text{ dispari} \tag{22}$$

$$X_j = h \otimes t^{j/2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad j \neq 0, \quad j \text{ pari} \tag{23}$$

$$X_0 = h \otimes 1 - \frac{1}{2}c \tag{24}$$

Risulta che una rappresentazione irriducibile dell'algebra in questione si può dare su

$$V = \mathbf{C}[x_1, x_3, x_5, \ldots] \tag{25}$$

(polinomi in infinite variabili) dove

$$c \mapsto id$$

$$B_j \mapsto j\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{26}$$

$$B_{-j} \mapsto \text{ moltiplicazione per } x_j$$

con j dispari e positivo. (Questi sono i cosiddetti operatori di creazione e distruzione in teoria quantistica dei campi)

Gli operatori X_j presi singolarmente hanno una espressione impossibile. Contro l'intuizione, per semplificare occorre considerare tutti questi operatori allo stesso tempo; conviene, infatti, introdurre una variabile formale ζ e sommare tutti questi operatori per ottenere

$$X(\zeta) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} X_j \zeta^j \tag{27}$$

Risulta allora che $X(\zeta)$ corrisponde a

$$\frac{1}{2}E^{-}(\zeta)E^{+}(\zeta) \tag{28}$$

dove

$$E^{\pm}(\zeta) = \exp(-\sum_{\substack{j>0 \\ j\,\text{dispari}}} \frac{2}{j}\zeta^{\pm j}B_{\pm j}) \tag{29}$$

Il calcolo del commutatore di tali oggetti fa intervenire naturalmente un analogo formale della funzione delta di Dirac

$$\delta(\zeta) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \zeta^n \tag{30}$$

Qui troviamo un'altra notevolissima coincidenza: Nella teoria quantistica dei campi, algebre come $sl(2,\mathbf{C})^{\sim}$ erano usate per descrivere simmetrie di particelle elementari ed erano chiamate "current algebras", d'altra parte operatori come $E^{-}(\zeta)E^{+}(\zeta)$ erano usati per descrivere l'interazione di particelle ad alcuni vertici ed erano perciò detti "operatori di vertice". Però questi due oggetti non erano mai stati messi in diretta correlazione fino a che essi non furono riscoperti in matematica nello studio di identità combinatorie del tipo di Rogers-Ramanujan.

4. Teoria dei gruppi. Nel frattempo ...

L'inizio degli anni '80 vide il completamento del Teorema di classificazione dei gruppi semplici. La lista definitiva è la seguente:

(1) Gruppi ciclici di ordine primo: C_p
(2) Gruppi alterni $A_n, n \geq 5$
(3) 16 famiglie infinite di gruppi di tipo Lie (per esempio $Gl_n(\mathbf{F}_q)$ = matrici $n \times n$ non singolari nel campo con q elementi)
(4) 26 gruppi semplici sporadici

I primi gruppi semplici sporadici (Burnside) furono scoperti nel 1861 da E. Mathieu: essi possono essere descritti in termini di automorfismi di alcuni codici correttori. Per oltre un secolo non se ne trovarono altri. Poi, durante la "guerra dei trent'anni" (1950-1980) (Gorenstein) altri se ne aggiunsero. Il più grande ha ordine

$$\begin{aligned} &808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\ &= 2^{26}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71 \end{aligned} \tag{31}$$

circa 10^{54} ovvero all'incirca il numero di particelle elementari sulla Terra.

Per via di questo ordine il gruppo fu detto Mostro.

In effetti Fischer e Griess ne congetturarono soltanto l'esistenza. Solo in seguito (1982) Griess ne dimostrò l'esistenza come gruppo di automorfismi di una struttura creata ad hoc: l'algebra di Griess. Ancor prima che la sua esistenza fosse dimostrata, Norton e Conway ne costruirono una tavola dei catatteri: le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione 1, 196.883, 21.296.876, ...

5.Moonshine ovvero "sciocchezze". Fu McKay che si accorse durante un seminario di Tits, che la funzione modulare $j(\tau)$ ha uno sviluppo in serie di Laurent:

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots \tag{32}$$

ove $q = e^{2\pi i\tau}$ (questa è la più semplice funzione non costante che soddisfa $j(\tau) = j(\tau + 1) = j(-\frac{1}{\tau})$)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 196884 &= 196883 + 1 \\ 21493760 &= 21296876 + 196883 + 1 \end{aligned} \tag{33}$$

Molti esperti pensarono che fosse talmente improbabile che ci fosse una relazione tra il Mostro e le funzioni modulari che queste e varie estensioni di questa osservazione furono definite "moonshine" da Conway. (Ciò non ha niente di romantico, colloquialmente "moonshine" significa "sciocchezze, stupidaggini". Borcherds riporta la seguente citazione di Sir Ernest Rutherford, lo scopritore del nucleo dell' atomo. Nel 1930 disse: "L'energia prodotta dalla fissione dell'atomo è ben poca cosa. Chiunque si aspetti di ricavare una sorgente di energia dalla trasformazione di questi atomi sta dicendo "moonshine"").

6.Forme modulari.

Il gruppo

$$\Gamma = SL_2(\mathbf{Z}) \tag{34}$$

agisce sulla metà superiore H del piano complesso $\mathbf{C}$ nel modo seguente

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \tag{35}$$

dove

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \tag{36}$$

Alcuni sottogruppi importanti sono

$$\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N\} \tag{37}$$

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) | c \equiv 0 \mod N\} \tag{38}$$

$$\Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) | \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N\} \tag{39}$$

e inoltre

$$\Gamma_0(N)^+ \tag{40}$$

il normalizzatore di $\Gamma_0(N)$. Una funzione modulare di peso zero per un sottogruppo $G < SL_2(\mathbf{Z})$ è una funzione meromorfa su H invariante per l'azione di G, cosicché essa definisce una funzione sul quoziente H/G.

Nel caso dell'intero gruppo $SL_2(\mathbf{Z})$ il dominio fondamentale è ben noto.

Ci possiamo domandare che tipo di spazio è questo H/G. Risulta che è una superficie di Riemann compatta. Tali superfici sono classificate, come è noto, dal loro genere, cioè dal numero dei buchi. Quando otteniamo il genere zero?

Nel caso di $\Gamma_0(N)^+$ risulta che si ottiene il genere zero quando N è uno dei seguenti numeri primi:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71 \tag{!!}$$

Se H/G ha genere zero allora possiamo trovare una singola funzione f detta "Hauptmodul" in modo che tutte le altre forme modulari di peso zero sono funzioni razionali di f.

Nel caso $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, l' Hauptmodul è proprio j. Inoltre si osservano i fenomeni seguenti ("Monstrous Moonshine" o "Sciocchezze Mostruose"): McKay e Thompson suggerirono l'esistenza di una rappresentazione di dimensione infinita, graduata del mostro M:

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} V_n \tag{41}$$

tale che

$$\dim V_n = c(n-1) \tag{42}$$

dove $c(n-1)$ è il coefficiente di q^{n-1} di $j(\tau) - 744$.

Conway and Norton osservarono che le serie

$$T_g(\tau) = \sum_n Tr(g|V_n) q^{n-1} \tag{43}$$

(cosicché $T_1 = j(\tau) - 744$) sembravano essere un Huptmodul per opportuni sottogruppi di $SL_2(\mathbf{Z})$

7. Algebre di Vertice. Frenkel, Lepowsky e Murman costruirono tale raprresentazione naturale del Mostro $V^\natural$: essa è un esempio di algebra di vertice.

Le algebre di vertice sono alcuni oggetti di dimensione intrinsecamente infinita. L'esempio interessante più semplice è quello che si ottiene riprendendo la rappresentazione di $sl(2, \mathbf{C})^\sim$ accennata prima.

Lo spazio è

$$V = \mathbf{C}[x_1, x_3, x_5, \ldots] \tag{44}$$

In quel caso avevamo degli "operatori" $X(\zeta)$ le cui regole di commutazione ci danno una rappresentazione di $sl(2, \mathbf{C})^\sim$. Ora è possibile associare a ciascun elemento $v \in V$ un "operatore"

$$X(v, z) \tag{45}$$

e sono questi oggetti detti operatori di vertice, che per così dire definiscono le operazioni della nuova "algebra". Ad essere precisi queste algebre, algebre non sono affatto. Si tratta di spazi vettoriali di dimensione infinita graduati

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} V_{(n)} \tag{46}$$

tali che $\dim V = +\infty$ e $\dim V_{(n)} < +\infty$, dotati di una applicazione lineare

$$Y : V \to V((z)) \tag{47}$$

(dove $V((z))$ è l'anello delle serie di Laurent formali a coefficienti in V) soddisfacente vari assiomi tra i quali il principale è la cosiddetta Identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} & z_0^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_2}{z_0})Y(u, z_1)Y(v, z_2) - \\ & z_0^{-1}\delta(\frac{z_2 - z_1}{-z_0})Y(v, z_2)Y(u, z_1) = \\ & z_2^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_0}{z_2})Y(Y(u, z_0)v, z_2) \end{aligned} \tag{48}$$

che è una identità incredibilmente compatta, contenente una grandissima quantità di informazioni. Richiede inoltre molta attenzione per essere ben interpretata. Per esempio:

$$z_0^{-1}\delta(\frac{z_1 - z_2}{z_0}) = z_0^{-1} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\frac{z_1 - z_2}{z_0})^n \tag{49}$$

e, per convenzione, $(z_1 - z_2)^n$ deve essere sviluppato in potenze positive di z_2 (questo spiega lo strano modo di scrivere l'altro termine come

$$z_0^{-1}\delta(\frac{z_2 - z_1}{-z_0}) \tag{50}$$

Altrimenti si arriva a delle conclusioni palesemente assurde come la seguente

$$\begin{aligned} \delta(z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} z^n = \sum_{n \geq 0} z^n + \sum_{n < 0} z^n \\ &= \frac{1}{1-z} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1} + z^{-1} - 1}{(1-z)(1-z^{-1})} = 0 \end{aligned} \tag{!!}$$

Per esempio, se prendiamo Res_{z_0} nell'identità di Jacobi otteniamo la formula del commutatore di due qualunque operatori di vertice. Ora, è possibile costruire una algebra di vertice a partire da un qualunque reticolo (cioè un gruppo abeliano libero finitamente generato e dotato di una forma bilineare a valori interi). L'esempio di prima corrisponde al reticolo **Z**. Questo non è l'unico modo di ottenere una algebra di vertice. Una classificazione delle algebre di vertice è ancora lontana. In particolare $V^\natural$ è ottenuta incollando in maniera non banale due algebre di vertice ottenute in due maniere differenti a partire dallo stesso reticolo di Leech, un oggetto interessante di per sé: è l'unico reticolo pari unimodulare di rango 24 senza elementi di lunghezza al quadrato 2 (ossia senza radici) (Leech 1965). Il Mostro è esattamente il gruppo degli automorfismi di $V^\natural$ una nuova specialissima struttura.

8.Il lavoro di Borcherds. Borcherds usa questa struttura su $V^{\natural}$ insieme a metodi di teoria delle stringhe (il cosiddetto teorema "no-ghost") per costruire una speciale algebra di Lie su cui agisce il Mostro. Non sorprendentemente essa viene chiamata algebra di Lie mostruosa. Si tratta di un nuovo tipo di algebra di Lie: è una algebra di Kac-Moody generalizzata. Borcherds estende la formula di Weyl-Kac a questa algebra e la usa per calcolare la "formula del denominatore" per essa. Questo viene sfruttato per dimostrare che le serie di Thompson $T_g(\tau)$ sono funzioni "completamente replicabili", il che significa, in particolare, che tutti i coefficienti del loro sviluppo in serie possono essere calcolati a partire da pochi coefficienti iniziali. Un risultato di Martin, Cummins, Gannon dimostra che le funzioni completamente replicabili sono in effetti delle funzioni modulari e sono Hauptmoduls per gruppi di genere zero. Questo permette di dimostrare le "congetture moonshine".

9.Commento. Le algebre di vertice sono dette dai fisici teorie quantistiche di campi conformi in dimensione 2. Si tratta di una parte della cosiddetta teoria delle stringhe, che promette di unificare la gravità con le teorie quantistiche delle altre tre forze fondamentali della Natura. Lo spazio degli stati di una stringa quantizzata è a volte una algebra di Kac-Moody generalizzata o a volte un'algebra di vertice. Una di queste algebre di Kac-Moody generalizzate porta alla dimostrazione delle congetture di moonshine.

L'algebra di Lie mostruosa è l'esempio più semplice di algebra di Lie degli stati fisici di una cosiddetta stringa chirale su un qualche "orbifold". Più precisamente si tratta di una stringa in moto su un opportuno quoziente (detto "orbifold") di un toro di dimensione 26, la dimensione critica in cui sembra funzionare la teoria delle stringhe.

Questo ci permette di parlare del Mostro come del gruppo delle simmetrie di una particolare variante di questa teoria fisica. Sarebbe veramente affascinante se questo specialissimo gruppo fosse così intimamente legato ad una teoria fisica che descrive la realtà.

Bibliografia essenziale.

G. Andrews, *The theory of partitions* in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1976.

I.B. Frenkel, J.Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster* Academic Press, 1988

U. Ray *Generalized Kac-Moody algebras and some related topics* Bulletin of the American Mathematical Society, **38** (1-42), 2001