FISICA

A.A. 2015-2016
Ingegneria Gestionale
6°appello del 3 Febbraio 2017
Esame completo

1. Un punto materiale di massa m=1kg è posto inizialmente in quiete sulla sommità di un cuneo liscio inclinato di un angolo α_1=20° rispetto all'orizzontale e ad una altezza h=2m rispetto alla base del cuneo. Il punto materiale viene lasciato libero di muoversi e scivolando a valle percorre un tratto orizzontale fino a risalire un secondo cuneo, inclinato di α_2=30° rispetto all'orizzontale, scabro con coefficiente di attrito μ_d=0.1. Calcolare l'accelerazione durante la discesa del primo cuneo, la velocità raggiunta in piano, la decelerazione avuta in salita sul secondo cuneo, e la quota massima raggiunta in risalita.

1. Soluz. Durante la discesa le forze agenti sono la forza peso e la reazione del piano inclinato. Proiettandole sugli assi normale e tangenziale (lungo il moto) si ottiene:

$$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P\cos\alpha = 0 \\ P\sin\alpha = ma_t \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n = P\cos\alpha_1 = mg\cos\alpha_1 \\ a_t = \dfrac{P\sin\alpha_1}{m} = \dfrac{mg\sin\alpha_1}{m} = g\sin\alpha_1 \end{cases}$$

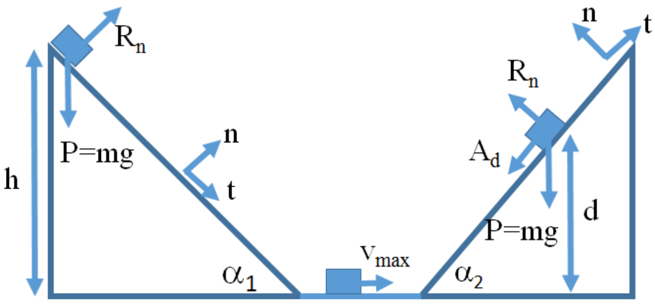
da cui **a=3.35 m/s²**

Durante la salita le forze agenti sono la forza peso e la reazione e l'attrito dinamico del piano inclinato. Proiettandole sugli assi normale e tangenziale (lungo il moto) si ottiene:

$$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P\cos\alpha = 0 \\ -P\sin\alpha - A_d = ma_t \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n = P\cos\alpha_2 = mg\cos\alpha_2 \\ a_t = \dfrac{-P\sin\alpha_2 - A_d}{m} = \dfrac{-mg\sin\alpha_2 - \mu_d mg\cos\alpha_2}{m} = -g(\sin\alpha_2 + \mu_d\cos\alpha_2) \end{cases}$$

da cui la decelerazione risulta **a= - 5.75 m/s²**



La velocità massima è raggiunta in piano dove tutta l'energia potenziale iniziale U_1=mgh si trasforma in energia cinetica $K_2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$. Applicando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene $U_1=K_2$ da cui $v_{max} = \sqrt{2gh}$ =**6.26 m/s**

La quota massima raggiunta sul secondo cuneo si ottiene invece considerando nel bilancio energetico la perdita di energia in salita dovuta all'attrito

$$L_A = -A_d \Delta s = -A_d \frac{d}{\sin\alpha_2} = -\mu_d R_n \frac{d}{\sin\alpha_2} = -\mu_d mg\cos\alpha_2 \frac{d}{\sin\alpha_2} = -\mu_d mgd\cot\alpha_2$$

In questo caso il lavoro delle forze non conservative fa diminuire l'energia meccanica $L_A = E_3 - E_1$ da cui $-\mu_d mgd\cot\alpha_2 = mgd - mgh$

da cui la quota massima $d = \dfrac{h}{1+\mu_d\cot\alpha_2} = \mathbf{1.7\ m}$

2. Un'asta omogenea di massa M=10kg e di lunghezza L=1m è appoggiata ad un fulcro liscio, distante d= 20cm dall'estremo A dove è anche posta una massa M_A=2kg. L'asta è in equilibrio quando una massa M_B viene posta sull'altro estremo B. Calcolare il valore di M_B e la reazione sul fulcro.

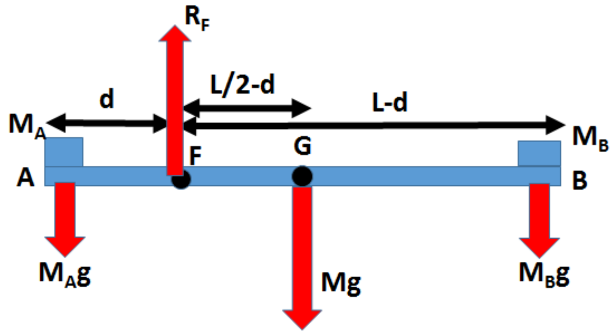
2. Soluz. Il sistema è in equilibrio quando sono nulle contemporaneamente la
1ª equazione cardinale e la 2ª equazione cardinale. In particolare dalla 2ª equazione cardinale applicata rispetto al punto F si ottiene

$$M_A + M_B + M_G + M_{F_1} = 0 \quad \text{da cui} \quad -M_A gd + M_B g(L-d) + Mg\left(\frac{L}{2}-d\right) = 0$$

(M_F=0 perché R_c è in F)

$$M_B = \frac{M_A d - M(L/2-d)}{L-d} = \mathbf{-3.25\ kg}$$

(ciò indica che non esiste possibile equilibrio a meno di non applicare in B una forza verso l'alto. In questo caso la reazione sul fulcro sarebbe R_F=85.8 N)

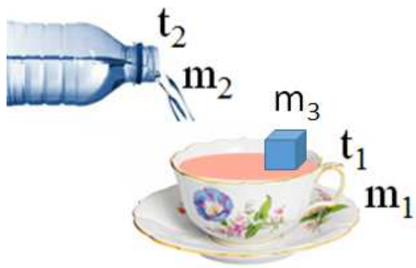


3. Una tazzina contiene 80g di acqua calda alla temperatura di 60°C. Viene inserito un cubetto di ghiaccio a 0°C di 10 g e viene aggiunta anche una piccola massa m di acqua calda a 80°C per compensare. Calcolare il valore della massa m aggiunta in modo da mantenere la temperatura finale costante. [calore specifico dell'acqua C=1kcal/kg °C, calore latente di fusione del ghiaccio λ=80 kcal/kg]

3. In condizioni di equilibrio termico il sistema rimane alla temperatura iniziale $\mathbf{t_f = t_1 = 60°C}$ che si ottiene dal bilancio termico tra il the in tazza e i cubetti di ghiaccio aggiunti:

L'acqua nella tazza quindi né cede né acquista calore secondo l'equazione

$Q_1 = m_1 C(t_f - t_1) = 0$ (calore ceduto)



L'acqua calda aggiunta alla temperatura di $\mathbf{t_2 = 80°C}$
Cede la quantità $Q_2 = m_2 C(t_f - t_2) \le 0$

Infine il cubetto di ghiaccio deve assorbire una quantità di calore latente solo per sciogliersi $m_3 \cdot q_f$ rimanendo alla temperatura di fusione 0°C, ed una seconda quantità di calore per portarsi ad alta temperatura finale $m_3 C(t_f - 0)$

In sintesi il cubetto deve assorbire la seguente quantità di calore

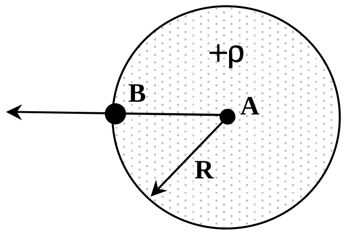
$$Q_3 = m_3 q_f + m_3 C(t_f) \geq 0 \quad \text{(calore assorbito)}$$

Se non esistono ulteriori scambi di energia con l'esterno la somma algebrica delle quantità di calore si deve annullare (bilanciamento termico)

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \Rightarrow m_2 C(t_f - t_2) + m_3 q_f + m_3 C t_f = 0$$

da cui $m_2 = m_3 \dfrac{C t_1 + q_f}{C(t_2 - t_1)} = m_3 \dfrac{60+80}{20} = 7 m_3 = \mathbf{70\ g}$

4. Una carica q=2μC, di massa m=20g viene posizionata all'interno di una sfera di raggio R=70cm avente densità di carica volumetrica $\rho = k \cdot r^2$, nel punto A centrale della sfera. Assumendo che la carica q sia inizialmente ferma, determinarne, durante il suo moto di allontanamento, la velocità raggiunta quando esce dalla sfera in B [densità volumetrica della sfera $\rho = k \cdot r^2$ con k=20μC/m^5].



4. Viene applicata la conservazione dell'energia meccanica nei punti A, B da cui $qV_A + 0 = qV_B + K_B$ (ove si è imposta l'energia cinetica iniziale nulla K_A=0) . Da questa condizione si ottiene l'espressione della velocità nel punto B; $w_B = \sqrt{2q(V_A - V_B)/m}$

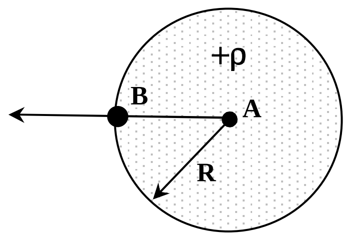
Calcolo del potenziale V nel punto di partenza A e di arrivo B

Applicando la legge di Gauss si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_{\text{int}} = k\, r^3 / 5\varepsilon_o \\ r > R & E_{ext} = k\, R^5 / 5\varepsilon_o r^2 \end{cases}$

Scegliendo il riferimento all'infinito, la differenza di potenziale fra i punti A e B si calcola come

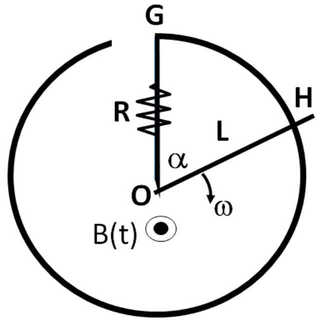
$$V_A - V_B = \int_0^R E_{\text{int}}\, dr = \frac{k}{5\varepsilon_o} \int_0^R r^3 dr = \frac{k}{5\varepsilon_o} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{20} \frac{kR^4}{\varepsilon_o}$$

da cui la velocità raggiunta in B vale

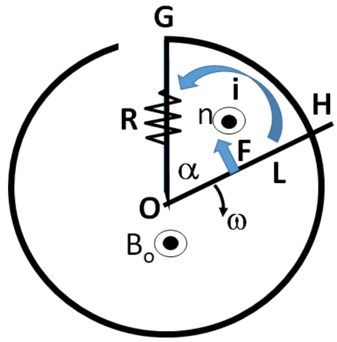


$w_B = \sqrt{qkR^4 / 10 m \varepsilon_o}$ **= 2.33 m/s**

5. Una barretta metallica di massa m e di lunghezza L è vincolata a ruotare lungo una guida metallica piana circolare di raggio L in modo da formare un circuito elettrico a forma di settore circolare GOH dove O è l'estremo vincolato della barretta mentre H è l'estremo libero. Il circuito giace in una regione piana dove è applicato un vettore induzione magnetica ortogonale (con verso uscente dal foglio) B_o. Assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, e sapendo che la barra ruota a velocità angolare costante ω, determinare l'espressione della corrente indotta nella spira. **Facoltativo:** calcolare la forza frenante cui è sottoposta la barretta ed il relativo momento assiale. [Dati: B_{max}=0.2T, L=50cm, α=10°, ω=0.1rad/s, R=20Ω, m=10g]



5. Soluz. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira (avente forma di settore circolare) in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:



$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = B_o S_{GOH} = B_o \left[\frac{1}{2} L^2 (\alpha + \omega_o t) \right]$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{ B_o \left[\frac{1}{2} L^2 (\alpha + \omega_o t) \right] \right\} = -\frac{\omega_o L^2 B_o}{2} = \mathbf{-2.5\ mV}$$

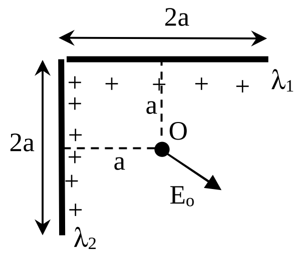
con intensità di corrente indotta nel circuito $i = \frac{f_i}{R} = -\frac{\omega_o L^2 B_o}{2R}$ **= -125μA**

(in senso opposto alla figura).

Facoltativo: La forza frenante sul lato mobile è $F = iLB_o = \frac{\omega_o L^3 B_o^2}{2R} = \mathbf{1.25 \cdot 10^{-5}\ N}$

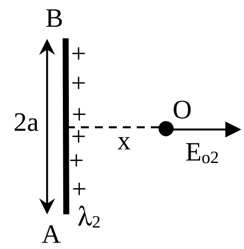
Il momento assiale vale quindi $M_a = \int_0^L r \cdot dF = iB_o \int_0^L r dr = \frac{\omega_o L^4 B_o^2}{4R} = \mathbf{3.125 \cdot 10^{-6}\ Nm}$

PROBLEMI SOSTITUTIVI PER ESONERO



1. Della carica elettrica è distribuita lungo due segmenti contigui mutuamente ortogonali di medesima lunghezza 2a=10cm, ma con densità lineica differente λ_1=30μC/m e λ_2=40μC/m. Determinare il vettore campo elettrico (modulo, direzione e verso) generato dalla distribuzione nel punto O che si trova alla medesima distanza a=5cm dai due segmenti.

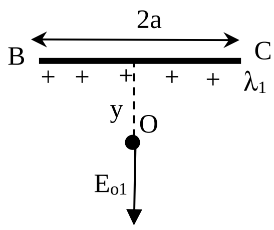
1. Calcolo del campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita lungo un segmento rettilineo. Calcolo lungo la mediana



Per ragioni di simmetria il campo elettrico generato dalla seconda distribuzione in tutti i punti della mediana del segmento AB risulta ortogonale al segmento stesso e con un modulo

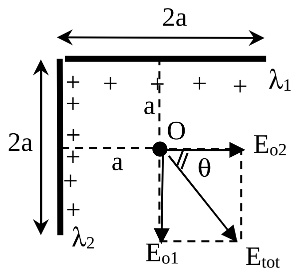
$$E_{o2}(x) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{che per } x=a \quad E_{o2}(O) = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a}$$

Calcolo analogo per la prima distribuzione lungo il segmento BC porta a



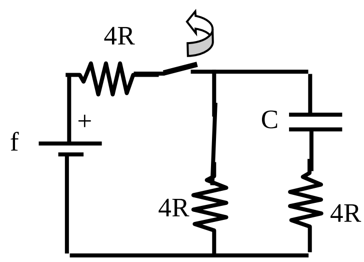
$$E_{o1}(y) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o y}\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \quad \text{che per } y=a \quad E_{o1}(O) = \frac{\lambda_1}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a}$$

Componendo i due contributi di campo si ha



$$E_o^{tot} = \sqrt{E_{o1}^2 + E_{o2}^2} = \frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a} = \mathbf{1.27 \cdot 10^7 V/m}$$

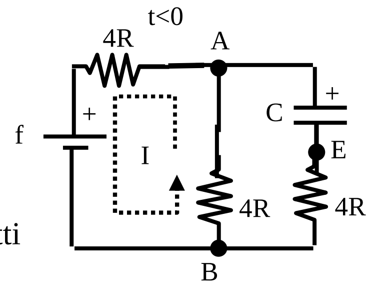
con inclinazione (rispetto orizz.) $\theta = \arctan\left(\frac{E_{o1}}{E_{02}}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = \mathbf{36°52'}$



4. Il circuito in figura è da lungo tempo nella configurazione riportata con l'interruttore T chiuso. Determinate la carica presente sulle armature del condensatore. Nell'istante t=0 l'interruttore T viene aperto. Dare l'espressione della carica sul condensatore q(t) per t>0 e fornirne il valore dopo un tempo t=2ms [f=5V, R=2kΩ, C=2μF]

4. Analisi del circuito per t<0

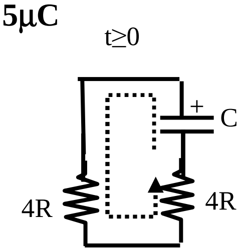
Prima dell'apertura del circuito la carica nel condensatore ha raggiunto da lungo tempo il suo valore asintotico di regime Q_o. Per determinare tale valore è sufficiente ipotizzare che nel ramo contenente il condensatore e la resistenza R non scorra corrente. La corrente scorre solo nella prima maglia: $I = \dfrac{\sum_k f_k}{\sum_h R_h} = \dfrac{f}{8R}$



La differenza di potenziale sul ramo AB vale: $V_A - V_B = (4R)I = f/2$

Tale differenza è anche quella che si instaura ai capi del condensatore ΔV_c, infatti

$$V_A - V_B = (V_A - V_E) + (V_E - V_B) = \Delta V_C - 0 = f/2 \quad \text{da cui} \quad Q_o = C\Delta V_c = fC/2 = \mathbf{5\mu C}$$



Analisi del circuito per t≥0
Dopo l'apertura dell'interruttore nel circuito si disattiva la prima maglia e si attiva la seconda ed il condensatore si scarica sulle resistenze

Facoltativo: il processo di carica di un condensatore già parzialmente carico si ottiene imponendo q(t=0)=Q_o alla soluzione dell'equazione differenziale di carica. L'espressione della carica diviene quindi

$$q(t) = Q_o \exp[-t/\tau] \quad \text{dove} \quad \tau = 8RC = \mathbf{32ms}$$

La carica totale presente sul condensatore al tempo t*=2ms è quindi

$$q(t^*) = Q_o \exp[-2/32] = \mathbf{4.7\mu C}$$