



APPUNTI DELLE LEZIONI DI FISICA
PER INGEGNERIA EDILE ARCHITETTURA

MECCANICA

LUIGI PALUMBO
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale

a.a. 2017-18

SOMMARIO

CAPITOLO I: LA FISICA E LA MATEMATICA	6
I.1 INTRODUZIONE.....	6
I.2 FORMULE TRIGONOMETRICHE.....	6
I.2.1 Definizione di "radiante, funzioni trigonometriche.....	6
I.2.2 Relazioni trigonometriche notevoli.....	8
I.3 GRANDEZZE VETTORIALI.....	8
I.3.1 Somma e prodotto tra vettori.....	8
I.3.2 Operazioni tra vettori in coordinate cartesiane.....	11
I.4 CENNI DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA.....	12
I.4.1 Equazione esplicita di una retta.....	13
I.4.2 Equazione esplicita della parabola.....	14
I.4.3 Equazione della circonferenza.....	16
I.5 CALCOLO INFINITESIMALE.....	16
I.5.1 Funzioni continue.....	16
I.5.2 Funzione del tempo per descriveren il moto.....	17
I.5.3 Legge oraria, la posizione funzione del tempo.....	17
I.5.4 Rapidità del moto, velocità, funzione derivata della legge oraria.....	19
I.5.5 Accelerazione, derivata seconda della legge oraria.....	21
I.5.6 Esempi di funzioni del tempo e loro derivate.....	22
I.5.7 Relazioni notevoli nel calcolo delle derivate.....	23
I.6 CENNI DEL CALCOLO INTEGRALE.....	24
I.6.1 Calcolo delle aree e integrale definito.....	24
I.6.2 Tabella con integrali di funzioni notevoli.....	27
I.7 NUMERI COMPLESSI.....	28
I.7.1 L'unità immaginaria i	28
I.7.2 I numeri complessi.....	28
I.7.3 Operazioni tra numeri complessi.....	28
I.7.4 Rappresentazione dei numeri complessi sul piano di Argand-Gauss.....	29
DALLE FORMULE DI EULERO SI RICAVALANO ANCHE LE SEGUENTI RELAZIONI:.....	30
CAPITOLO II: CINEMATICA	31
II.1 CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE.....	31
II.2 VETTORE POSIZIONE E SISTEMI DI COORDINATE.....	31
II.3 TRAIETTORIA.....	33
II.4 VETTORE SPOSTAMENTO E LUNGHEZZA DELLA TRAIETTORIA.....	33
II.4.1 Vettore Spostamento in coordinate cartesiane.....	34
II.4.2 Vettore Spostamento in coordinate polari sul piano.....	35
II.5 VELOCITÀ SCALARE E VELOCITÀ VETTORIALE.....	36
II.5.1 Velocità in coordinate cartesiane.....	36
II.5.2 Velocità in coordinate polari per un moto piano.....	37
II.6 FORMULE DI POISSON.....	38
II.7 VETTORE ACCELERAZIONE.....	41
II.7.1 Accelerazione in coordinate cartesiane.....	41
II.7.2 Accelerazione in coordinate polari sul piano.....	41
II.7.3 Ascissa curvilinea e Piano Osculatore.....	42
II.8 DAL VETTORE ACCELERAZIONE AL VETTORE POSIZIONE.....	43
II.8.1 Condizioni iniziali del moto.....	43
II.9 MOTO RETTILINEO.....	44
II.9.1 Moto rettilineo uniforme.....	44
II.9.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato.....	45

II.9.3	<i>Moto armonico, equazione differenziale e condizioni iniziali</i>	45
II.10	MOTI PIANI	47
II.10.1	<i>Moto parabolico</i>	47
II.10.2	<i>Moto circolare in coordinate cartesiane</i>	50
II.10.3	<i>Cinematica del moto circolare in coordinate polari</i>	53
II.10.4	<i>Velocità areolare nei moti piani</i>	54
CAPITOLO III:	DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE	56
III.1	INTRODUZIONE	56
III.2	PRINCIPIO DI RELATIVITA' DI GALILEI	56
III.3	PRINCIPIO DI INERZIA – (I PRINCIPIO)	57
III.4	SECONDO PRINCIPIO – MASSA, FORZA E ACCELERAZIONE	58
III.4.1	<i>Effetto dell'azione di una forza sul moto di un p.m.</i>	58
III.4.2	<i>Forza gravitazionale, Forza peso, principio di equivalenza</i>	59
III.4.3	<i>Quantità di moto e Il Principio</i>	60
III.5	TERZO PRINCIPIO – AZIONE E REAZIONE	61
III.6	MOTI RELATIVI : SISTEMI INERZIALI	61
III.7	MOTI RELATIVI: SISTEMI ACCELERATI NON INERZIALI	63
III.7.1	<i>Sistemi non inerziali (SRNI) accelerati di moto traslatorio</i>	63
III.7.2	<i>Sistemi non inerziali (SRNI) accelerati di moto rotatorio</i>	64
III.8	LE FORZE DELLA NATURA NEI SRI	68
III.8.1	<i>Reazioni Vincolari</i>	69
III.8.2	<i>Forze interne di contatto tra due oggetti</i>	71
III.8.3	<i>Forza peso e tensione del filo, pendolo semplice</i>	72
III.8.4	<i>Forze elastiche, sistema massa molla senza attriti</i>	74
III.8.5	<i>Forze di attrito</i>	77
III.9	LE FORZE REALI E APPARENTI NEI SRNI	82
III.9.1	<i>Sistemi in moto traslatorio accelerato</i>	82
III.9.2	<i>Sistemi di riferimento non inerziali in moto rotatorio</i>	88
III.10	QUANTITA' DI MOTO E IMPULSO DI UNA FORZA	92
III.10.1	<i>Principio di conservazione della quantità di moto</i>	92
III.10.2	<i>Teorema dell'impulso e della quantità di moto</i>	93
III.10.3	<i>Forza media</i>	94
III.10.3	<i>Forza impulsiva</i>	94
III.11	MOMENTO DI UNA FORZA E MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO	95
III.11.1	<i>Definizione del momento di una forza</i>	95
III.11.2	<i>Momento della quantità di moto (momento angolare)</i>	97
III.11.3	<i>Relazione tra momento della forza e momento angolare</i>	102
III.11.4	<i>Studio della dinamica utilizzando il momento angolare</i>	103
III.11.5	<i>Variazione del momento angolare nel caso di forze impulsive</i>	104
CAPITOLO IV: LAVORO ED ENERGIA	106	
IV.1	LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA	106
IV.1.1	<i>Forza Peso</i>	108
IV.1.2	<i>Forza Gravitazionale</i>	108
IV.1.3	<i>Forza elastica</i>	109
IV.1.4	<i>Forza d'attrito cinematico</i>	110
IV.1.5	<i>Forza d'attrito viscoso</i>	110
IV.1.6	<i>Forze motrici</i>	111
IV.1.6	<i>Reazioni vincolari</i>	111
IV.2	TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA	111
IV.2.1	<i>Applicazioni del teorema del lavoro e dell'energia cinetica</i>	113
IV.3	LA POTENZA	117
IV.3.1	<i>Esempio: Forza peso</i>	117

IV.3.2	<i>Esempio: Forza elastica</i>	118
IV.3.3	<i>Esempio: Forza di attrito viscoso</i>	118
IV.4	FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE	119
IV.4.1	<i>Forze Conservative</i>	119
IV.4.2	<i>Energia Potenziale</i>	119
IV.5	ENERGIA MECCANICA	120
IV.5.1	<i>Conservazione dell'Energia meccanica per le forze conservative</i>	120
IV.5.2	<i>L'Energia meccanica in presenza di forze conservative e non conservative</i>	123
CAPITOLO V: LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE		125
V.1	CENNI STORICI	125
V.2	LEGGI DI KEPLERO	125
V.3	LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON	125
V.3.1	<i>Orbite piane e velocità areolare</i>	126
V.3.2	<i>Terza legge di Keplero</i>	126
V.3.3	<i>La costante G e le masse gravitazionali</i>	128
V.3.4	<i>Orbite circolari e geostazionarie</i>	128
V.4	ENERGIA MECCANICA GRAVITAZIONALE	129
V.4.1	<i>Energia meccanica su un'orbita circolare</i>	129
V.4.2	<i>Energia meccanica su un'orbita ellittica</i>	130
CAPITOLO VI: OSCILLATORI MECCANICI		131
VI.1	OSCILLATORE SMORZATO	131
VI.1.1	<i>Moto smorzato senza oscillazioni</i>	134
VI.1.2	<i>Smorzamento critico</i>	134
VI.1.3	<i>Oscillazioni smorzate</i>	134
VI.2	OSCILLATORE FORZATO	138
VI.2.1	<i>Risonanza</i>	139
CAPITOLO VII: DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI		141
VII.1	I PRIMA EQUAZIONE CARDINALE	141
VII.1.1	<i>Centro di Massa</i>	143
VII.2	SECONDA EQUAZIONE CARDINALE	144
VII.2.1	<i>Momento Angolare e Momento d'inerzia</i>	145
VII.3	ENERGIA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI	150
VII.3.1	<i>Energia Cinetica di un sistema di p.m., Teorema di Koenig</i>	150
VII.3.2	<i>Energia Potenziale di un sistema di p.m.</i>	152
CAPITOLO VIII: DINAMICA DEL CORPO RIGIDO		153
VIII.1	PRIMA E SECONDA EQUAZIONE CARDINALE PER IL CORPO RIGIDO	154
VIII.1.1	<i>Centro di Massa</i>	154
VIII.1.2	<i>Momento angolare</i>	156
VIII.1.3	<i>Momento d'inerzia</i>	158
VIII.1.4	<i>Teorema di Huygens-Steiner</i>	163
VIII.1.5	<i>Sistema di forze applicate a un corpo rigido</i>	165
VIII.1.6	<i>Statica del corpo rigido</i>	165
VIII.1.7	<i>Moto libero di un corpo rigido in assenza di forze</i>	168
VIII.1.8	<i>Rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse Principale di Inerzia</i>	170
VIII.1.9	<i>Rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso</i>	171
VIII.1.10	<i>Rotolamento</i>	174
VIII.1.11	<i>Moto di precessione</i>	179
VIII.2	ENERGIA CINETICA E POTENZIALE DI UN CORPO RIGIDO	184
VIII.2.1	<i>Energia Cinetica, teorema di Koenig</i>	184
VIII.2.2	<i>Energia Potenziale</i>	186

CAPITOLO IX: GLI URTI	186
IX.1 URTI TRA MASSE LIBERE	187
IX.1.1 <i>Conservazione della quantità di moto</i>	187
IX.1.2 <i>Effetti sull'energia cinetica</i>	188
IX.1.3 <i>Urto totalmente anelastico</i>	189
IX.1.4 <i>Urto centrale elastico</i>	189
IX.2 URTI TRA CORPI VINCOLATI.....	191
IX.2.1 <i>Pendolo balistico</i>	191

CAPITOLO I: LA FISICA E LA MATEMATICA

I.1 INTRODUZIONE

Questi appunti raccolgono gli argomenti principali della Meccanica presentati durante le lezioni di Fisica Generale agli studenti del corso di laurea in Ingegneria Edile Architettura.

Il corso tratta una parte della Fisica Classica, la Meccanica e la Termodinamica, che si sono sviluppate in circa 3 secoli a partire da Galileo Galilei, dal XVII secolo fino al XIX secolo.

Non si occupa pertanto né dell'elettromagnetismo né delle scoperte della fisica moderna del XX secolo riguardanti la meccanica quantistica e la teoria della relatività.

Compito della Fisica è di scoprire e descrivere le leggi della natura, essa non ha l'obiettivo di capire perché la natura funziona in un certo modo, domanda alla quale non esiste alcuna risposta di carattere scientifico.

Prendiamo ad esempio la più comune delle esperienze quotidiane, l'attrazione gravitazionale che spinge verso la superficie della terra. Se facciamo un salto, più o meno in alto, ricadiamo ineluttabilmente a terra con una spinta notevole. Ciò è dovuto all'attrazione gravitazionale tra due corpi, non sappiamo perché due masse si attraggono, fa parte dei misteri della natura, ma è ciò che osserviamo e che cerchiamo di descrivere attraverso modelli fisici. Fino alla rivoluzione scientifica di Galilei erano i filosofi a proporre modelli, da Galilei in poi, attraverso il metodo scientifico sono gli scienziati ad occuparsi della descrizione delle leggi della natura. La natura viene descritta mediante teorie e modelli che hanno valore finché sono in accordo con le osservazioni.

Tra le varie teorie che vengono proposte c'è una vera e propria selezione Darwiniana, alcune si estinguono rapidamente perché in contrasto con le osservazioni, altre sopravvivono a lungo finché qualche fenomeno incompreso non le mette in crisi. E' questo il caso della gravitazione di cui parleremo in un capitolo dedicato.

Galileo Galilei, inventore del metodo scientifico come procedimento per investigare le leggi della natura, diede avvio a quella rivoluzione scientifica e tecnologica che è in pieno sviluppo ancora nei nostri tempi. Nella sua famosa opera **Il Saggiatore** (1623) affermava: "La filosofia naturale è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi, io dico l'universo, ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto".

Newton andò ben oltre, nell'opera **Philosophiae naturalis principia mathematica** (1687) sviluppò il *calcolo infinitesimale* per descrivere l'evoluzione nel tempo di grandezze fisiche meccaniche come accelerazione, velocità, il moto dei pianeti, etc.

Il metodo scientifico parte dall'osservazione dei fenomeni per scoprire le leggi della natura e descriverle mediante un modello matematico. Le leggi della natura regolano l'evoluzione di tutto l'universo. La Fisica non va oltre la descrizione dei fenomeni naturali e non pone alcuna domanda né dà risposte sul perché tali fenomeni avvengano.

Essendo il linguaggio della matematica essenziale per descrivere le leggi, in questo primo capitolo introduciamo i concetti basilari di matematica necessari in un corso di Fisica a livello universitario. Una conoscenza più rigorosa e approfondita è demandata ai corsi di Analisi Matematica e di Geometria.

I.2 FORMULE TRIGONOMETRICHE

I.2.1 *Definizione di "radiante, funzioni trigonometriche*

Consideriamo una circonferenza di raggio R , con centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani x, y . Sia A il punto di intersezione dell'asse positivo delle x con la circonferenza. Dall'origine facciamo partire una semiretta che interseca la circonferenza nel punto B ; l'asse x

e la semiretta individuano la regione di piano corrispondente all'angolo α . Sia l_{AB} la lunghezza dell'arco di circonferenza da A a B , definiamo l'angolo α misurato in radianti il rapporto:

$$\alpha = \frac{l_{AB}}{R}$$

tale rapporto tra due lunghezze è adimensionale, ma viene espresso in radianti (rad).

Poiché l_{AB} è proporzionale a R , se consideriamo una circonferenza di raggio diverso avremo sempre lo stesso valore dell'angolo. Inoltre, sapendo che la lunghezza della circonferenza è pari a $2\pi R$, ricaviamo che un angolo giro vale: $\alpha = 2\pi$.

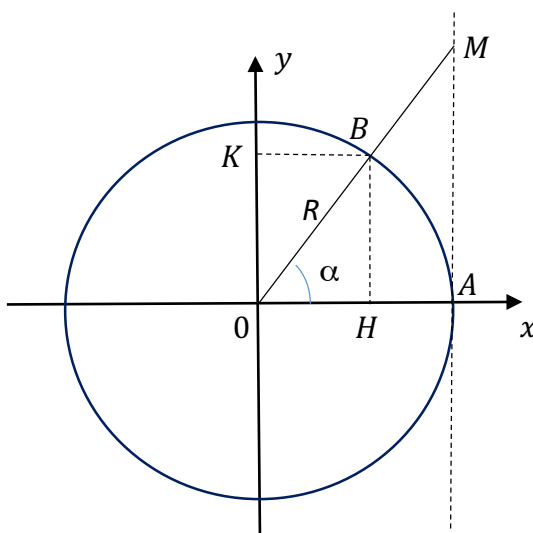


Fig.1: Circonferenza e funzioni trigonometriche

Dall'uguaglianza $2\pi = 360^\circ$ ricaviamo:

$$1 \text{ rad} = 57,32^\circ$$

Tracciamo ora le proiezioni del punto B sugli assi cartesiani, definiamo le seguenti funzioni trigonometriche fondamentali *seno*, *coseno* dell'angolo α :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{OH}{R} \\ \sin \alpha = \frac{OK}{R} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Tracciando inoltre la retta tangente alla circonferenza nel punto A , definiamo la funzione *tangente* dell'angolo ϕ come segue:

$$\tan \alpha = \frac{AM}{R}$$

Dalla similitudine dei triangoli OAM e OHB , otteniamo:

$$\frac{AM}{OA} = \frac{HB}{OK}$$

sostituendo abbiamo:

$$\frac{R \tan \alpha}{R} = \frac{\rho \sin \alpha}{\rho \cos \alpha}$$

cioè

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{I.2})$$

Nella tabella che segue, forniamo alcuni valori notevoli di queste tre funzioni trigonometriche nel I quadrante tra 0 e $\pi/2$:

ϕ	$\sin \phi$	$\cos \phi$	$\tan \phi$
0	0	1	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	∞

I.2.2 Relazioni trigonometriche notevoli

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (I.3)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

I.3 GRANDEZZE VETTORIALI

I.3.1 Somma e prodotto tra vettori

Le grandezze fisiche possono essere di natura scalare o vettoriale.

Una grandezza scalare è definita esclusivamente dal suo valore con le sue unità di misura (esempio: peso, altezza etc.). Una grandezza vettoriale è nota con completezza quando sono definiti tre attributi: **modulo**, **direzione**, **verso**.

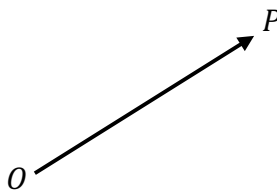
Il **modulo**, è il valore del vettore espresso con una sua unità di misura.

La **direzione**, è la retta su cui giace il vettore.

Il **verso**, è la direzione del vettore lungo la retta.

Esempio di grandezza vettoriale è la velocità. Per definire con completezza questa grandezza è necessario fornire il modulo (esempio 100 km/h), la direzione (esempio lungo una retta orizzontale), il verso (a destra o a sinistra).

Da un punto di vista geometrico un vettore è un segmento orientato con due estremi O e P e viene indicato con il simbolo \overrightarrow{OP} .



Operazione fondamentale è la **somma di due vettori** $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ che si ottiene con la regola del parallelogramma:

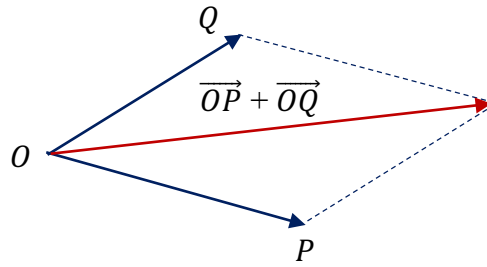


Fig.2: Somma di due vettori

Per eseguire la somma, si portano i due vettori nello stesso punto di applicazione O, si costruisce il parallelogramma con i lati uguali ai moduli dei due vettori, la diagonale del parallelogramma ottenuto fornisce il vettore somma.

Si definiscono due tipi di prodotti tra vettori: **prodotto scalare** e **prodotto vettoriale**.

Il **prodotto scalare** tra due vettori dà come risultato una grandezza scalare ottenuta come prodotto dei moduli dei due vettori, moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \alpha \quad (I.4)$$

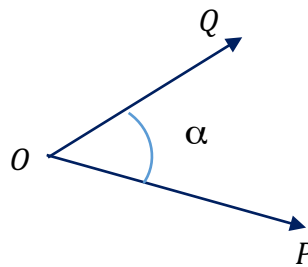


Fig.3: Prodotto scalare tra due vettori

Il valore dipende dall'angolo α , è facile vedere che il valore massimo si ha per $\alpha = 0$, mentre il prodotto è nullo per $\alpha = \pi/2$.

È utile interpretare il prodotto scalare come il prodotto del modulo vettore $|\overrightarrow{OP}|$ per la proiezione di \overrightarrow{OQ} su esso.

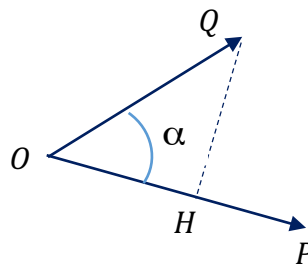


Fig.4: Proprietà del prodotto scalare tra due vettori

Essendo infatti $|\overrightarrow{OQ}| \cos \alpha = OH$, otteniamo:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| OH \quad (I.5)$$

Il **prodotto vettoriale** tra due vettori dà come risultato una grandezza vettoriale. Il modulo del prodotto è pari al prodotto di moduli moltiplicato per il seno dell'angolo compreso; il versore è perpendicolare al piano individuato dai due vettori:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \sin \alpha \hat{k} \quad (I.6)$$

Per individuare il versore \hat{k} del vettore si procede come segue:

I due vettori \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OQ} individuano un piano che per semplicità facciamo corrispondere al piano (x, y) . Scegliamo un punto di riferimento sul piano da cui partono i tre assi cartesiani (x, y, z) in cui riportiamo anche i tre versori \hat{i} e \hat{j} e \hat{k} i quali formano una terna ortogonale.

Il prodotto vettoriale è ortogonale al piano (x, y) , e pertanto può essere parallelo o antiparallelo al versore \hat{k} . Supponiamo di far ruotare il vettore \overrightarrow{OP} e di sovrapporlo a \overrightarrow{OQ} descrivendo l'angolo minore, se \overrightarrow{OP} ruota in verso antiorario, il prodotto vettoriale è parallelo al versore \hat{k} , e risulta diretto in alto (come in figura), se invece il vettore \overrightarrow{OP} ruota in verso orario il prodotto vettoriale è antiparallelo al versore \hat{k} e risulta diretto in basso.

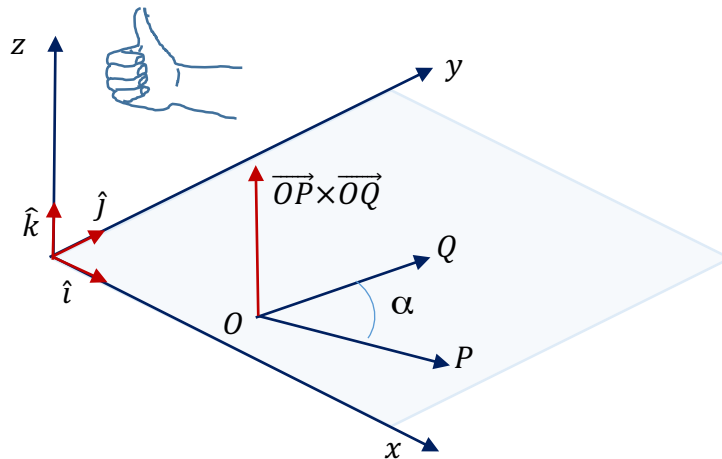


Fig.5: Prodotto vettoriale tra due vettori

Un metodo efficace per individuare il verso del prodotto vettoriale è il cosiddetto metodo della mano destra: le dita della mano sono dirette verso il primo vettore \overrightarrow{OP} e si richiudono verso il secondo vettore \overrightarrow{OQ} descrivendo l'angolo minore tra i due vettori (α), il pollice individua il verso.

Notiamo che il modulo del prodotto vettoriale rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori. Infatti essendo $|\overrightarrow{OQ}| \sin \alpha = QH$

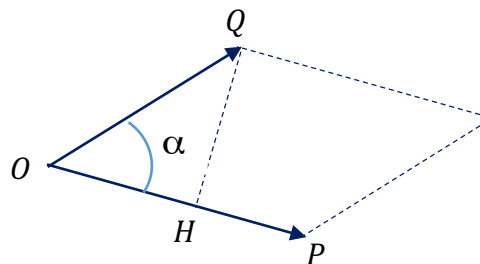


Fig.6: Prodotto vettoriale e area del parallelogramma

risulta:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot QH \hat{k} \quad (I.7)$$

il cui modulo è pari al prodotto della base per l'altezza del parallelogramma. Possiamo quindi verificare che quando i vettori sono paralleli il prodotto vettoriale è nullo ($\alpha = 0$, area nulla), mentre il prodotto vettoriale ha il suo valore massimo se i due vettori sono tra loro ortogonali ($\alpha = \pi/2$, area del rettangolo).

I.3.2 Operazioni tra vettori in coordinate cartesiane

Le operazioni di somma e prodotto tra vettori possono essere rappresentate in un sistema di coordinate. Nel caso delle coordinate cartesiane, il generico vettore \vec{A} avrà come componenti sugli assi cartesiani le proiezioni del vettore stesso pari a A_x, A_y, A_z . Il vettore \vec{A} è espresso da:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (\text{I.8})$$

dove $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono i tre versori dello spazio cartesiano.

Il **modulo** del vettore \vec{A} è dato da:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{I.9})$$

Il **versore** (vettore unitario) del vettore \vec{A} è dato dal rapporto tra il vettore e il suo modulo:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

Consideriamo ora un secondo vettore

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (\text{I.10})$$

La Somma dei due vettori \vec{A} e \vec{B} è data da un vettore che ha per componenti la somma delle componenti:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \quad (\text{I.11})$$

Il **prodotto scalare** dei due vettori \vec{A} e \vec{B} in coordinate cartesiane si ottiene facilmente considerando che

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= 1 & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1 & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0 & \hat{i} \cdot \hat{k} &= 0 & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

ed è dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti su x, y e z :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{I.13})$$

Data la definizione generale di prodotto scalare, è possibile ricavare l'angolo tra i due vettori:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (\text{I.14})$$

Il **prodotto vettoriale** di due vettori \vec{A} e \vec{B} , considerando che i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ formano una terna ortogonale tale che:

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= 0 & \hat{j} \times \hat{j} &= 0 & \hat{k} \times \hat{k} &= 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} & \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \\ \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j} & \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k} & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

si ottiene dai prodotti misti delle componenti dei vettori:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \quad (\text{I.16})$$

In forma sintetica, tale espressione si ottiene dallo sviluppo del seguente determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

ESEMPIO

Dati due vettori $\vec{A}:(3,1,2)$ e $\vec{B}:(2,4,1)$ calcolare i moduli A e B , la somma, il prodotto scalare, il prodotto vettoriale e l'angolo tra i due.

Moduli

$$A = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}; \quad B = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

Somma

$$\vec{A} + \vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

Prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6 + 4 + 2 = 12$$

Angolo tra i vettori

$$\cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{12}{7 \cdot \sqrt{6}} \approx 0.7$$

Prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B} = (1 - 8)\hat{i} - (3 - 4)\hat{j} + (12 - 2)\hat{k} = -7\hat{i} + \hat{j} + 10\hat{k}$$

I.4 CENNI DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

La geometria analitica descrive curve sul piano e nello spazio mediante equazioni in cui compaiono funzioni delle coordinate del sistema di riferimento scelto. Sul piano cartesiano x, y una qualsiasi equazione espressa da $f(x, y) = 0$ è rappresentata dal luogo dei punti che soddisfano l'equazione.

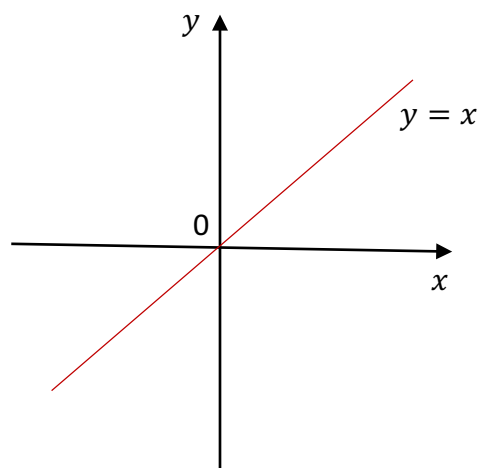


Fig.7: Luogo dei punti dell'equazione $y=x$

Ad esempio, l'equazione $y - x = 0$, ha come soluzione tutte le coppie di numeri reali tali che $y = x$. Il luogo dei punti che soddisfano tale relazione è dato dalla retta bisettrice del I e III quadrante del piano cartesiano. Le equazioni principali di interesse per questo corso di Fisica sono l'equazione della retta, della parabola, della circonferenza, dell'ellisse.

1.4.1 Equazione esplicita di una retta

Una retta sul piano rappresenta il luogo dei punti soluzione di un'equazione di primo grado:

$$y = mx + q \quad (\text{I.18})$$

dove m , coefficiente angolare, è pari alla tangente trigonometrica dell'angolo di inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale:

$$m = \tan \alpha \quad (\text{I.19})$$

mentre q è il punto in cui la retta intercetta l'asse verticale.

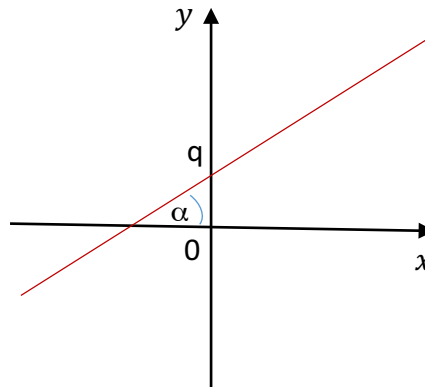


Fig.8: Inclinazione della retta, coefficiente angolare

Riportiamo qui alcune formule utili, quale l'equazione di una retta passante per il punto (x_0, y_0) con coefficiente angolare m noto:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (\text{I.20})$$

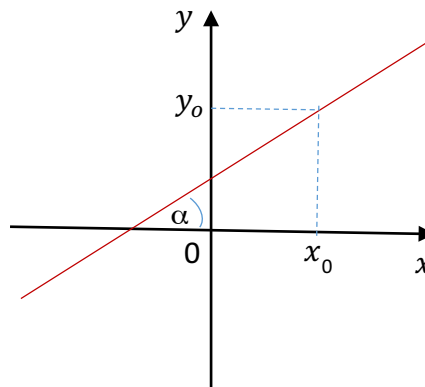


Fig.9: Retta passante per un punto nota l'inclinazione

e l'equazione di una retta passante per due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{I.21})$$

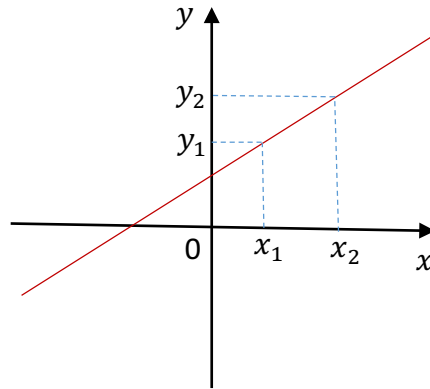


Fig.10: Retta passante per due punti

Inoltre, date due rette

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

esse sono parallele se $m_1 = m_2$, sono invece perpendicolari se $m_1m_2 = -1$

1.4.2 **Equazione esplicita della parabola**

L'equazione della parabola è rappresentata da un polinomio di secondo grado nella variabile x :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{I.23})$$

I punti di intersezione della parabola con l'asse x si trovano risolvendo l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{I.24})$$

che presenta in generale due soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{I.25})$$

Se il discriminante $b^2 - 4ac > 0$, ci sono due soluzioni reali e distinte, la parabola interseca in due punti l'asse delle ascisse.

Se il discriminante $b^2 - 4ac = 0$ esiste una sola soluzione reale (due soluzioni reali e coincidenti) la parabola tocca l'asse delle ascisse in un solo punto, punto di tangenza che corrisponde a un massimo o un minimo della funzione.

Se il discriminante $b^2 - 4ac < 0$ non esistono soluzioni reali, la parabola non interseca l'asse delle ascisse.

Inoltre abbiamo che se $a > 0$, la parabola si presenta con la concavità verso l'alto, mentre se $a < 0$ la concavità è verso il basso.

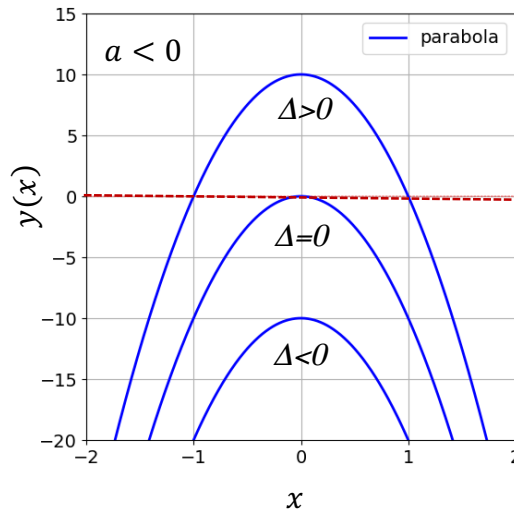


Fig.11: Famiglia di parabole $y(x)$ con concavità verso il basso

Data la simmetria della parabola, il punto di massimo/minimo della parabola si ottiene nel punto medio x^* delle soluzioni $x_{1,2}$:

$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \quad (I.26)$$

da cui

$$y^* = a \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c \quad (I.27)$$

$$y^* = -\frac{b^2}{4a} + c$$

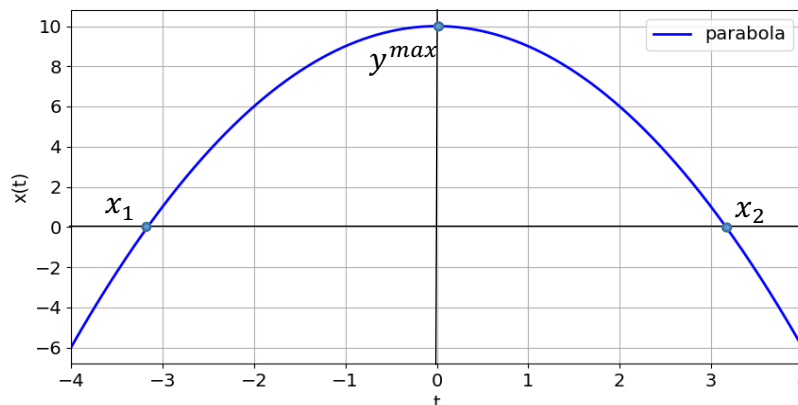


Fig.12: Curva corrispondente alla parabola $y=10 - x^2$

1.4.3 Equazione della circonferenza

Consideriamo una circonferenza di centro nel punto $C(x_0, y_0)$ e raggio ρ . Le coordinate x, y di tutti i punti della circonferenza soddisfano l'equazione

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = \rho^2 \quad (I.28)$$

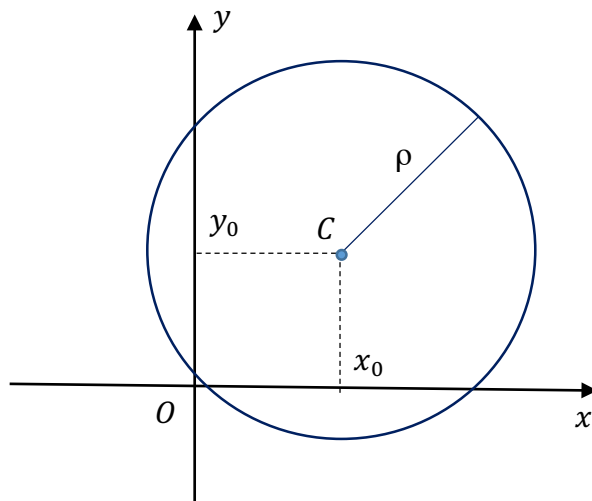


Fig.13: La circonferenza sul piano cartesiano

I.5 CALCOLO INFINITESIMALE

Le grandezze di interesse nella Fisica Classica variano con continuità nello spazio e nel tempo. Si immagini ad esempio la posizione di un'automobile su un'autostrada, la sua velocità, oppure la temperatura dell'aria in un luogo. In termini matematici ciò si traduce nell'affermare che queste grandezze fisiche sono funzioni continue delle coordinate dello spazio x, y, z e del tempo t .

Ma come variano queste grandezze? Quali sono le cause delle variazioni? Questo è quanto vogliamo descrivere nei capitoli successivi di queste lezioni.

Per raggiungere il nostro obiettivo, però, occorre conoscere le proprietà delle funzioni continue, e in particolare le funzioni derivate ad esse correlate, argomenti trattati rigorosamente nei corsi di Analisi Matematica.

L'aspetto rilevante che mette in stretta relazione le leggi della Fisica con la Matematica deriva dal fatto che la natura usa un linguaggio differenziale. Infatti, le leggi della natura descrivono l'evoluzione delle grandezze fisiche attraverso le loro variazioni. E poiché queste variazioni (nella meccanica classica) non sono discontinue, è conveniente descriverle su intervalli infinitesimi dello spazio e del tempo. (A livello atomico e subatomico la meccanica classica perde la sua validità ed è necessari rivolgersi alla meccanica quantistica in cui invece le grandezze fisiche possono essere discontinue)

I.5.1 Funzioni continue

Introduciamo innanzitutto la definizione di continuità di una funzione di una sola variabile, nel nostro caso possiamo prendere in esame una funzione che dipende dallo spazio $f(x)$ oppure dal tempo $f(t)$.

La funzione, reale di variabile reale, avrà un suo dominio di esistenza D , e diciamo che la funzione è continua in un punto del suo dominio se i due limiti destro e sinistro calcolati nel punto coincidono:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0)$$

1.5.2 Funzione del tempo per descrivere il moto

Supponiamo che un oggetto cada verticalmente e che la sua dimensione sia talmente piccola da poter individuare la sua posizione con un punto geometrico della retta y . Sia $y(t)$ la posizione che viene osservata a partire dall'istante iniziale (che poniamo $t_0 = 0$) in cui si fa partire il cronometro, la nostra funzione sarà definita da:

$$\begin{cases} y = y(t) \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Sul piano di coordinate y, t riportiamo il grafico della funzione $y(t)$ che può avere un andamento qualsiasi, non necessariamente descritto da una funzione nota. Ad esempio se consideriamo la posizione di un velocista che percorre 100 metri in 10 secondi, la sua posizione nel tempo dipenderà dalla progressione di velocità nella sua corsa, la curva ideale che rappresenta il moto è continua ma non è rappresentabile da una funzione nota.

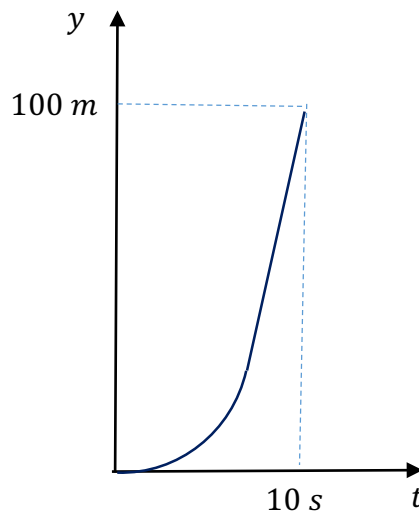


Fig.14: Grafico della posizione in funzione del tempo

Occorre notare che quando misuriamo le posizioni del velocista sperimentalmente, nessuno strumento di misura può fornire una curva continua. Possiamo però riportare sul piano $\{y, t\}$ tutti i punti misurati e cercare la migliore curva di interpolazione. Questa operazione è resa ancora più complessa dal fatto che ogni misura è soggetta a una fascia di incertezza, e quindi la curva che meglio rappresenta il moto è la curva più probabile, ricavata con metodi statistici.

1.5.3 Legge oraria, la posizione funzione del tempo

Quando l'equazione del moto è descritta da funzioni del tempo note, la relazione tra la posizione e il tempo è chiamata *legge oraria del moto*.

In questo paragrafo prendiamo in esame una funzione del tempo che descrive la caduta di un punto materiale da fermo sotto l'azione della forza di gravità.

Se il corpo cade da fermo da un'altezza y_0 la posizione al variare del tempo è data dalla seguente relazione sperimentale:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{I.29}$$

dove la costante $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ fu misurata da Galileo Galilei nei suoi famosi esperimenti sulla caduta dei gravi. Galilei dimostrò che lo spazio percorso nella caduta è proporzionale al quadrato del tempo, e che la legge del moto non dipende dalla massa dell'oggetto se si trascura l'attrito dell'aria. Sono molte le informazioni che possiamo ricavare dalla legge oraria. Ad esempio possiamo calcolare quanto tempo impiega il corpo per arrivare a terra. Se chiamiamo t^* il tempo di impatto al suolo, imponiamo in tale istante che la coordinata $y = 0$ e ricaviamo:



$$0 = y_0 - \frac{1}{2}g(t^*)^2$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Fig.15: Caduta di un grave da una quota

Con questo caso molto semplice di legge oraria, che descrive un moto rettilineo, possiamo introdurre altre caratteristiche del moto che dipendono dall'andamento della curva nel tempo. Nel grafico di Fig. 16, riportiamo la curva che descrive la legge oraria per un corpo che parte da fermo da un'altezza di 10 m.

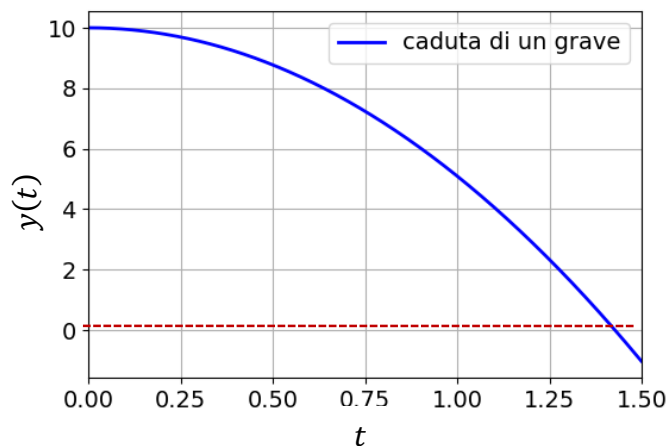


Fig.16: Legge oraria per la caduta di un grave

E' bene precisare che il grafico della legge oraria non va confuso con la *traiettoria*, formata da tutti i punti dello spazio occupato dal punto materiale durante il moto (una retta nel caso di caduta verticale). Il grafico della *legge oraria* visualizza la posizione al variare del tempo (una parabola nel nostro caso) da cui possiamo notare, ad esempio, la progressione della velocità durante la caduta del corpo. Se esso cade da un'altezza di 10 m da fermo, i primi 2 metri sono percorsi in circa 0,6 secondi, i successivi 2 metri in circa 0,3 secondi, i successivi in circa 0,2 secondi etc., cadendo da 10 metri l'impatto al suolo avviene dopo circa 1,4 secondi. Osserviamo quindi che la rapidità con cui il corpo cade varia nel tempo e ci chiediamo come possiamo esprimere la rapidità con cui la posizione cambia nel tempo attraverso una grandezza fisica. Rispondiamo a questa domanda introducendo il concetto di velocità.

1.5.4 *Rapidità del moto, velocità, funzione derivata della legge oraria*

Per formalizzare il concetto di rapidità con cui il punto si sposta sulla traiettoria, consideriamo un intervallo di tempo Δt , e chiamiamo Δy lo spazio percorso in tale intervallo di tempo. Il rapporto $\Delta y/\Delta t$ (misurato in metri al secondo, m/s) fornisce la rapidità della caduta del punto materiale nell'intervallo Δt e viene chiamato velocità media:

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (I.30)$$

espressa nelle unità di m/s . Da un punto di vista geometrico la velocità media misura l'inclinazione della retta secante che passa per i due punti estremi dell'intervallo. Infatti nel triangolo rettangolo individuate in Fig. 17 notiamo che il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \operatorname{tg}(\alpha) \quad (I.31)$$

è il coefficiente angolare della retta secante.

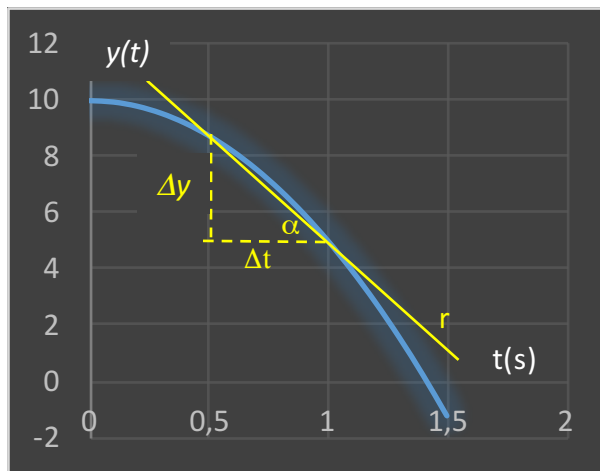


Fig.17: *Velocità media: coefficiente angolare della retta secante*

Se prendiamo in esame intervalli di tempo di $\Delta t = 0,5$ s in istanti diversi, osserviamo che la pendenza della secante cambia istante per istante, ed è minore alla partenza (r_1) e maggiore in prossimità dell'impatto (r_3).

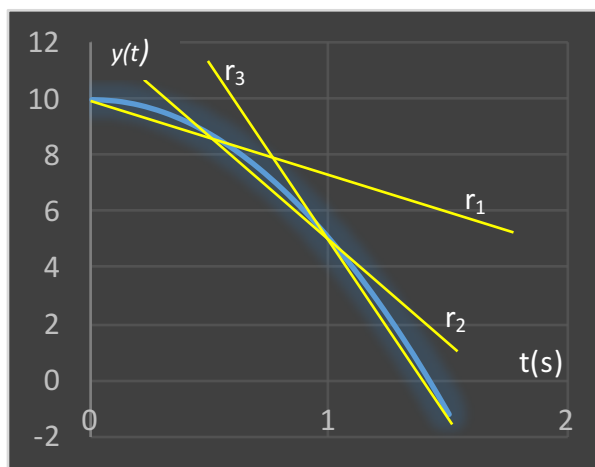


Fig.18: *Velocità media varia nel tempo*

Osserviamo inoltre che, essendo la scelta dell'intervallo di tempo Δt arbitraria, la pendenza della curva, e quindi la velocità media, dipende dall'istante t e dal valore di Δt .

Che cosa accade ora se scegliamo Δt pari a 0,1s, oppure 0,01 s, e così via sempre più piccolo? Dal grafico si vede che in un dato istante t , se riduciamo l'incremento di tempo Δt , rendendolo sempre più piccolo, la retta secante cambia la sua pendenza e tende a diventare tangente alla curva.

In matematica con questa operazione si dice che stiamo effettuando il limite per $\Delta t \rightarrow 0$. Ovviamente in questo procedimento anche lo spostamento (spazio percorso) $\Delta y \rightarrow 0$, essendo la curva continua. Il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo rappresenta la velocità istantanea (scalare) del punto materiale, misurata in m/s , nell'istante generico t :

$$v_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (I.32)$$

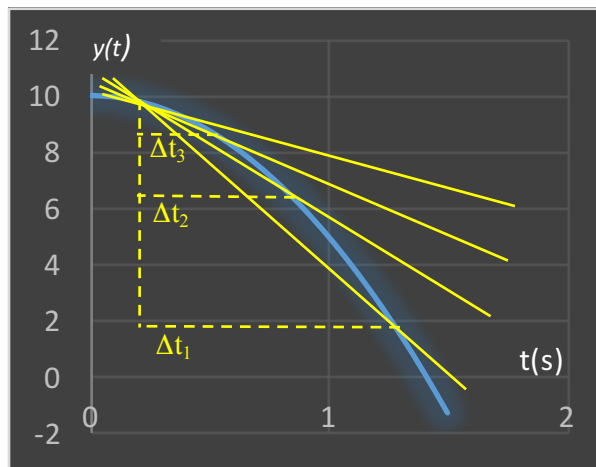


Fig.19: Velocità istantanea: coefficiente angolare della retta tangente alla curva)

Il limite qui introdotto definisce la *funzione derivata di $y(t)$* nell'istante t :

$$\frac{dy}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (I.33)$$

Per effettuare il calcolo della derivata si considera il valore della posizione $y(t)$ in un generico istante t , si incrementa poi il tempo $t + \Delta t$ e si calcola la nuova posizione $y(t + \Delta t)$.

Esprimiamo quindi la velocità istantanea come:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \quad (I.34)$$

Applichiamo tale formula al caso della caduta di un grave che abbiamo preso in esame di cui conosciamo legge oraria, otteniamo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[y_0 - \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 \right] - \left[y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \right]}{\Delta t}$$

Sviluppando il quadrato e semplificando il numeratore otteniamo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[-gt \cdot \Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2\right]}{\Delta t}$$

Ora se separiamo il limite in due parti, abbiamo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-gt) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2}g\Delta t\right)$$

Il primo termine non dipende da Δt , mentre il secondo termine è proporzionale a Δt e si annulla quando $\Delta t \rightarrow 0$. In conclusione abbiamo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -gt$$

La velocità è negativa, diretta verso il basso, ed è proporzionale al tempo. Notiamo che la funzione derivata (velocità) è nulla nell'origine, infatti il corpo parte da fermo. Inoltre, osserviamo che nel punto $t = 0$ la funzione $y(t)$ assume il valore massimo $y = y_0$. Affinché in un istante t ci sia un massimo o un minimo, la funzione derivata deve essere nulla in quell'istante.

1.5.5 **Accelerazione, derivata seconda della legge oraria**

Ora, poiché in generale anche la velocità può variare nel tempo, ci chiediamo come possiamo esprimere tale variazione nel tempo. In maniera analoga a quanto fatto per la velocità, consideriamo un intervallo di tempo Δt e chiamiamo Δv_y la variazione di velocità in tale intervallo, il limite del rapporto

$$a_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

definisce l'accelerazione del punto materiale, misurato in m/s^2 . L'accelerazione è quindi la *funzione derivata di $v_y(t)$* nell'istante t .

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

e riprendendo la relazione della velocità istantanea, vediamo che l'accelerazione è pari alla derivata seconda della funzione $y(t)$:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (I.35)$$

Per effettuare il calcolo consideriamo il valore della velocità $v_y(t)$ in un generico istante t , incrementiamo il tempo $t + \Delta t$ e calcoliamo la velocità $v_y(t + \Delta t)$.

Possiamo scrivere quindi la velocità come:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}$$

Nel caso della caduta di un grave che abbiamo preso in esame, otteniamo:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[-g(t + \Delta t)] - [-gt]}{\Delta t}$$

Sviluppando otteniamo:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[-g\Delta t]}{\Delta t}$$

semplificando Δt otteniamo:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -g$$

L'accelerazione è costante e negativa, diretta verso il basso. La costante $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità misurata da Galilei.

1.5.6 Esempi di funzioni del tempo e loro derivate

Nell'esempio della caduta di un corpo in assenza di attrito abbiamo considerato tre tipi di funzioni:

$$\begin{aligned} f(t) &= c \\ f(t) &= bt \\ f(t) &= at^2 \end{aligned}$$

dove a, b, c sono delle costanti, e abbiamo anche calcolato le loro derivate:

$$\begin{aligned} \frac{d(c)}{dt} &= 0 \\ \frac{d(bt)}{dt} &= b \\ \frac{d(at^2)}{dt} &= 2at \end{aligned}$$

Queste derivate sono casi particolari della regola generale:

$$\frac{d(At^n)}{dt} = nAt^{n-1}$$

Ci sono altre funzioni del tempo che compaiono nello studio del moto di fenomeni oscillatori di cui occorre conoscere la funzione derivata:

$$\begin{cases} f(t) = A \sin(\Omega t + \vartheta_0) \\ \frac{df}{dt} = A\Omega \cos(\Omega t + \vartheta_0) \end{cases}$$

dove A , Ω e ϑ_0 sono chiamate *ampiezza*, *pulsazione* (rad/s) e *fase iniziale* (rad), rispettivamente.

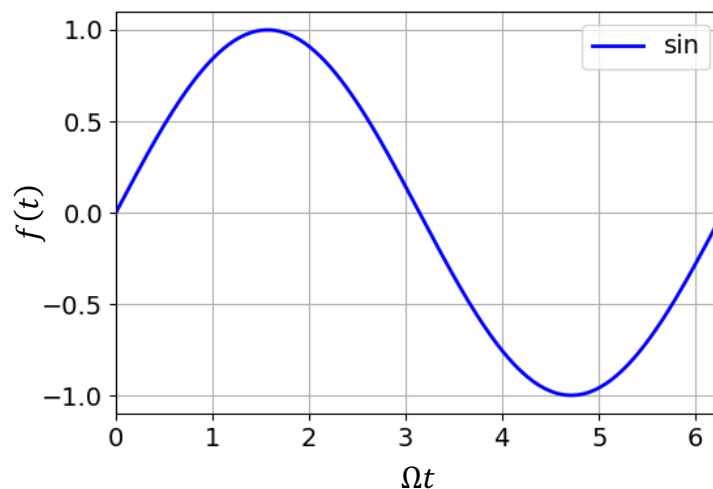


Fig.20: Funzione sinusoidale di periodo T

Analogamente useremo la funzione coseno nella forma:

$$\begin{cases} f(t) = A \cos(\Omega t + \vartheta_0) \\ \frac{df}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \vartheta_0) \end{cases}$$

Nel corso delle lezioni incontreremo inoltre la funzione esponenziale

$$\begin{cases} f(t) = A \exp(\alpha t) \\ \frac{df}{dt} = A\alpha \exp(\alpha t) \end{cases}$$

e la funzione logaritmo naturale

$$\begin{cases} f(t) = A \ln(\beta t) \\ \frac{df}{dt} = A \frac{1}{t} \end{cases}$$

1.5.7 Relazioni notevoli nel calcolo delle derivate

Nel corso di Analisi Matematica saranno ricavate anche le seguenti relazioni per il calcolo delle derivate.

Derivata di un prodotto di funzioni:

$$\begin{cases} f(t) = g(t)h(t) \\ \frac{df}{dt} = \frac{dg(t)}{dt}h(t) + g(t)\frac{dh(t)}{dt} \end{cases} \quad (I.36)$$

Esempio

$$\begin{cases} f(t) = At^2 \sin(2t) \\ \frac{df}{dt} = 2At \sin(2t) + 2At^2 \cos(2t) \end{cases}$$

Derivata di una funzione di funzione:

$$\begin{cases} f(t) = f[g(t)] \\ \frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt} \end{cases} \quad (I.37)$$

Esempio

$$\begin{cases} f(t) = A \sin[\phi(t)] \\ \frac{df}{dt} = A \cos[\phi(t)] \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} f(t) = A \cos[\phi(t)] \\ \frac{df}{dt} = -A \sin[\phi(t)] \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} f(t) = 4 \sin(2t^2) \\ \frac{df}{dt} = 8t \cos(2t^2) \end{cases}$$

I.6 CENNI DEL CALCOLO INTEGRALE

1.6.1 *Calcolo delle aree e integrale definito*

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la funzione “legge oraria” di un moto rettilineo $y(t)$ che individua la posizione del punto materiale in ogni istante. Con essa possiamo calcolare, ad esempio, lo spazio percorso Δy durante la caduta di un oggetto in un intervallo di tempo Δt .

Abbiamo poi analizzato la rapidità con cui il punto materiale si muove, e abbiamo introdotto la velocità istantanea che è pari alla derivata temporale della funzione posizione. Inoltre abbiamo analizzato che rapidità con cui varia la velocità del punto, introducendo l’accelerazione pari alla derivata temporale della velocità. In conclusione nota la legge oraria, attraverso il calcolo della derivata rispetto al tempo, possiamo ottenere posizione, velocità e accelerazione del p.m. Ma ora proviamo ad invertire il percorso, chiedendoci : se sto viaggiando di moto rettilineo lungo l’asse y con velocità v_y costante, quanto spazio avrò percorso nell’intervallo $\Delta t = t_f - t_0$? Qual sarà la mia posizione? Alla prima domanda possiamo dare una semplice risposta, mentre non abbiamo tutte le informazioni necessarie per rispondere alla seconda.

Proviamo a rispondere alla prima: quanto spazio ho percorso? In questo caso la risposta è semplice, moltiplico la velocità (m/s) costante v_y per l’intervallo di tempo $(t_f - t_0)$ e ottengo:

$$\Delta y = v_y(t_f - t_0)$$

Non siamo in grado di sapere però in quale posizione dell’asse y ci troviamo. Infatti, per calcolare la posizione finale y_f nell’istante t_f , è necessario sapere da quale punto y_0 siamo partiti, la posizione finale sarà:

$$y_f = y_0 + \Delta y = y_0 + v_y(t_f - t_0)$$

La posizione finale si ricava sommando lo spazio percorso alla posizione iniziale lo spazio. Nel caso di velocità costante il calcolo è semplice e intuitivo, ma cosa facciamo se la velocità non è costante? Ad esempio supponiamo che la velocità sia proporzionale al tempo:

$$v_y(t) = a_0 t$$

dove a_0 è una costante. Ci chiediamo ora quanto spazio abbiamo percorso in un intervallo di tempo $(t_f - t_0)$ e qual è la posizione finale? Operiamo nel seguente modo: consideriamo lo spazio percorso dy in un intervallo di tempo infinitesimo dt . Potendo assumere che in questa infinitesima frazione di tempo la velocità sia costante, e utilizziamo la seguente relazione dalla definizione di velocità:

$$dy = v_y(t)dt$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$dy = a_0 t \cdot dt$$

Conviene visualizzare sul piano x, t questo semplice calcolo:

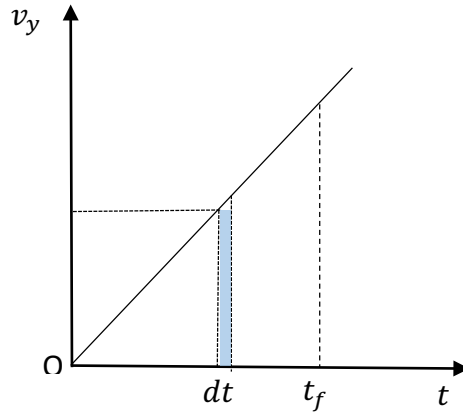


Fig.10: Spostamento infinitesimo

Osserviamo che lo spostamento infinitesimo dy è pari all'area (infinitesima) del rettangolo di base dt e altezza $v_y(t)$. Poniamo per semplicità l'istante iniziale $t_0 = 0$ (in pratica iniziamo l'osservazione nell'istante in cui parte il cronometro), e suddividiamo l'intervallo di tempo in un numero infinito di intervalli infinitesimi dt :

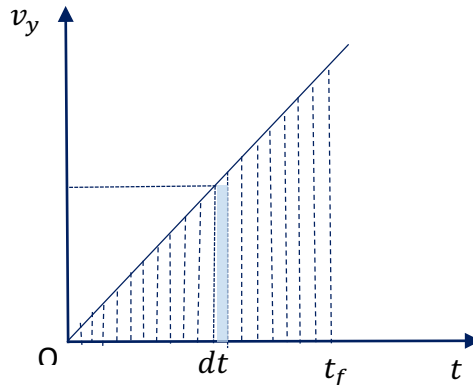


Fig.11: Spostamento come somma di spostamenti infinitesimi

Per ottenere lo spostamento totale da $t_0 = 0$ a t_f dobbiamo sommare tutti gli spostamenti infinitesimi dy , cioè sommare tutte le aree infinitesime nell'intervallo, che simbolicamente scriviamo come:

$$\Delta y = y(t_f) - y_0 = \int_0^{t_f} dy \quad (I.36)$$

In questo caso la somma delle aree è pari all'area del triangolo che ha base t_f e altezza $v_x(t_f)$

$$\Delta y = y(t_f) - y_0 = \frac{1}{2} t_f v_x(t_f) = \frac{1}{2} a_0 t_f^2$$

E quindi

$$y(t_f) = y_0 + \frac{1}{2} a_0 t_f^2$$

E' utile riscrivere questo risultato come segue:

$$\Delta y = y(t_f) - y_0 = \int_0^{t_f} a_0 t dt = \frac{1}{2} a_0 t_f^2$$

Notiamo che la funzione del tempo espressa dal termine $a_0 t$ è pari alla derivata temporale della funzione $\frac{1}{2} a_0 t^2$. Questo ci permette di vedere la relazione tra velocità e spostamento in un senso più ampio. Infatti se indichiamo la funzione velocità con

$$f(t) = a_0 t$$

e con)

$$F(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

la “funzione primitiva” di $f(t)$, tale che

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

allora possiamo generalizzare la formula nel seguente modo:

$$\Delta y = y(t_f) - y_0 = \int_0^{t_f} f(t) dt = F(t_f) - F(0) \quad (\text{I.37})$$

Se avessimo calcolato lo spostamento tra un istante iniziale $t_0 \neq 0$ e t_f avremmo ottenuto:

$$\Delta y = y(t_f) - y_0 = \int_{t_0}^{t_f} f(t) dt = F(t_f) - F(t_0) \quad (\text{I.38})$$

Che nel nostro esempio calcola l'area del trapezio nell'intervallo di tempo.

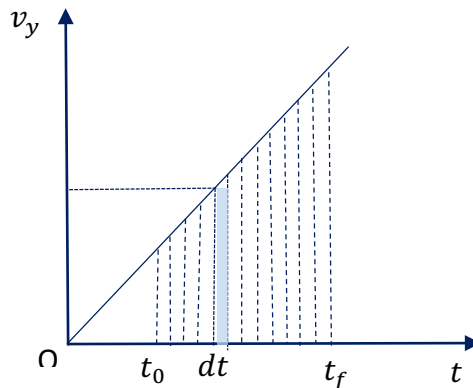


Fig.12: Integrale definito calcolo dell'area

La formula generale che abbiamo trovato di chiama “integrale definito” della funzione velocità. In conclusione se è nota la funzione velocità $v_y(t)$ ed è nota la posizione iniziale y_0 è possibile ricavare la funzione posizione $y(t)$ dalla seguente formula:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \quad (\text{I.39})$$

In maniera analoga, se l'accelerazione è espressa da una funzione del tempo $a_y(t)$, ed è nota la velocità iniziale v_{y0} ricaviamo la funzione velocità dall'accelerazione del seguente moto:

$$v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \quad (\text{I.40})$$

ESEMPIO

Consideriamo il caso della caduta di un grave la cui legge oraria è già nota, sappiamo che tutti i corpi cadono con una accelerazione pari a $g=9,81 \text{ m/s}^2$. Scegliendo l'asse y diretto verso l'alto, avremo un'accelerazione pari a:

$$a_y = -g$$

Assumiamo che nell'istante $t_0 = 0$ il corpo inizi la caduta con velocità $v_{y0} = 0$. Ricaviamo la velocità di caduta:

$$v_y(t) = \int_0^t -g dt$$

Integriamo mediante la funzione primitiva, otteniamo:

$$v_y(t) = -gt$$

Proseguiamo per il calcolo della posizione sapendo che il corpo parte da un'altezza y_0 , abbiamo:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t) dt$$

sostituiamo:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t -gt dt$$

Utilizziamo la funzione primitiva, otteniamo:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

legge oraria nota per la caduta dei gravi (in assenza di attriti).

1.6.2 *Tabella con integrali di funzioni notevoli*

$f(t)$	$F(t)$
At^n	$\frac{A}{n+1}t^{n+1}$
$A\sin(t)$	$-A\cos(t)$
$A\sin(\Omega t)$	$-\frac{A}{\Omega}\cos(\Omega t)$
$A\cos(t)$	$A\sin(t)$
$A\cos(\Omega t)$	$\frac{A}{\Omega}\sin(\Omega t)$
$\frac{A}{t}$	$A \ln t$

I.7 NUMERI COMPLESSI

1.7.1 *L'unità immaginaria i*

Nella risoluzione di equazioni polinomiale di qualunque grado si può incorrere in una espressione che contiene la radice quadrata di un numero negativo. Sappiamo che nessun numero reale elevato al quadrato può generare un numero negativo, quindi già la semplice equazione:

$$x^2 + 1 = 0 \quad (\text{I.41})$$

non ha soluzioni reali. Formalmente questa equazione di II grado produce le seguenti soluzioni:

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad (\text{I.42})$$

I matematici si sono trovati di fronte a questo tipo di problemi sin dai tempi antichi, I primi riferimenti riconducano agli studi di Erone di Alessandria. Il termine soluzione “immaginaria” fu introdotto da Cartesio nel XVII secolo, proprio ad indicare che questi numeri non avevano alcun significato reale, ma esprimevano soltanto formalmente una particolare soluzione matematica. In tal senso le soluzioni I.41 sono espresse da:

$$x = \pm i \quad (\text{I.43})$$

Avendo definito:

$$i = \sqrt{-1} \quad (\text{I.44})$$

1.7.2 *I numeri complessi*

La soluzione di equazioni polinomiali può porci di fronte a soluzioni più complesse. Prendiamo infatti ad esempio l'equazione di II grado:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad (\text{I.45})$$

Applicando la formula ridotta dell'equazione di II grado otteniamo:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} \quad (\text{I.46})$$

otteniamo

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \quad (\text{I.47})$$

Questa soluzione presenta una parte reale e una parte immaginaria e viene chiamata *numero complesso*. Un numero complesso è solitamente espresso dal simbolo $z=a+ib$, dove a e b sono numeri reali.

1.7.3 *Operazioni tra numeri complessi*

Le operazioni tra numeri complessi sono le stesse che abbiamo per numeri reali, tenendo conto che trattiamo ogni numero come un binomio. Dati due numeri complessi

$$z_1 = (a_1 + ib_1)$$

e

$$z_2 = (a_2 + ib_2)$$

abbiamo:

Somma di due numeri complessi $z = z_1 + z_2$

$$z = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Prodotto di due numeri complessi $z = z_1 \cdot z_2$

$$z = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

dove abbiamo utilizzato l'identità $i^2 = -1$.

Rapporto di due numeri complessi $z = z_1/z_2$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}$$

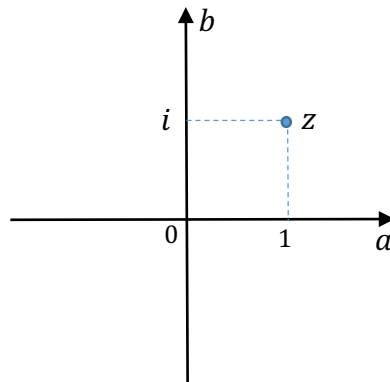
moltiplichiamo e dividiamo per $(a_2 - ib_2)$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \cdot \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)}$$

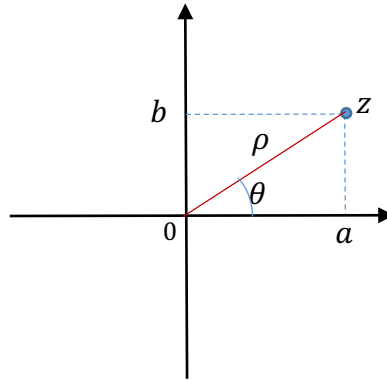
$$z = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(-a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 - b_2^2}$$

1.7.4 *Rappresentazione dei numeri complessi sul piano di Argand-Gauss*

Una semplice rappresentazione geometrica dei numeri complessi si ottiene utilizzando il piano cartesiano riportando sull'asse delle ascisse la parte reale del numero, e sulle ordinate la parte immaginaria. In tal modo un qualunque numero complesso definito da una coppia di numeri $z=(a,b)$ è rappresentato da un punto su tale piano. Ad esempio per le soluzioni I.46 abbiamo



Sul piano complesso osserviamo che un generico numero $z=(a,b)$ è individuato dalla sua distanza ρ dall'origine degli assi e dall'angolo θ che la semiretta forma rispetto all'asse orizzontale.



Numero complesso Z in coordinate polari

Il numero complesso pertanto può essere rappresentato anche con le coordinate *polari* (ρ, θ) con:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \text{artg} \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

e reciprocamente:

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

Date le coordinate *polari* (ρ, θ) possiamo esprimere il numero complesso come:

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \quad (\text{I.50})$$

cioè

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{I.51})$$

Nel 1748 Eulero dimostrò la seguente identità:

$$(\cos \theta \pm i \sin \theta) = e^{\pm i \theta} \quad (\text{I.52})$$

pertanto un numero complesso viene rappresentato in coordinate polari da:

$$z = \rho e^{i \theta} \quad (\text{I.53})$$

Dalle formule di Eulero si ricavano anche le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \left(\frac{e^{i \Omega t} + e^{-i \Omega t}}{2} \right) = \cos \Omega t \\ \left(\frac{e^{i \Omega t} - e^{-i \Omega t}}{2i} \right) = \sin \Omega t \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

Capitolo II: CINEMATICA

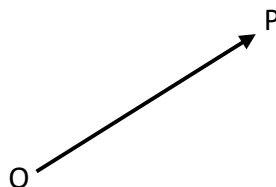
La cinematica moderna nasce con gli studi di Galileo Galilei il quale fu artefice di una rivoluzione del pensiero scientifico che aveva dominato la filosofia della natura fino al XV secolo, principalmente con la filosofia aristotelica. La cinematica si occupa dello studio del moto dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo hanno prodotto, e in particolare descrive il moto di un corpo rispetto a un osservatore. Un corpo che si muove nello spazio varia la sua posizione nel tempo. E' evidente che un corpo esteso, fermo o in moto, occupa una porzione di volume dello spazio. Lo studio della cinematica si sviluppa considerando inizialmente oggetti di dimensioni trascurabili *cinematica del punto materiale* e successivamente si estende ai corpi estesi nella *cinematica dei solidi*.

II.1 CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

Il concetto di punto materiale rende più agevole l'approccio allo studio del moto dei corpi perché rappresenta una semplificazione notevole. Infatti, se assumiamo che la dimensione dell'oggetto sia trascurabile rispetto alle distanze percorse durante il moto, la sua posizione può essere individuata da un solo punto geometrico dello spazio, e l'insieme di tutti i punti dello spazio occupati durante il moto ci fornirà la *traiettoria*. Bisogna notare però che con tale semplificazione potremo analizzare solo il cosiddetto moto di traslazione dell'oggetto, ma non il moto di rotazione intorno a sé stesso. Ad esempio il moto di rivoluzione della terra intorno al sole può essere studiato assimilando la terra a un punto materiale, essendo il raggio della terra (circa 6.300 km) molto minore della dimensione tipica della sua orbita (circa 150.000.000 di km). Con tale approssimazione non possiamo però studiare il moto di rotazione della terra intorno al proprio asse, cosa che faremo quando rimuoveremo l'ipotesi di dimensioni trascurabili e affronteremo la cinematica dei corpi estesi rigidi.

II.2 VETTORE POSIZIONE E SISTEMI DI COORDINATE

Nell'ipotesi quindi di un oggetto assimilabile a un punto materiale, la sua posizione è definita rispetto a un osservatore. L'osservatore in O vedrà il p.m. occupare un punto P dello spazio, posto ad una data distanza e in una data direzione. La posizione è individuata dal vettore (*vettore posizione*) che ha per estremi il punto O (osservatore) e il punto P (posizione).



Esistono vari sistemi di riferimento in cui si può rappresentare il vettore posizione. Per individuare il punto P nello spazio abbiamo bisogno di tre coordinate. Un sistema naturale è quello delle **coordinate sferiche**, r, θ, ϕ . L'osservatore misura la distanza r dall'origine e due angoli, l'angolo θ rispetto all'asse verticale passante per O, e l'angolo ϕ che individua la posizione della proiezione P' sul piano equatoriale (x,y) rispetto a una retta di riferimento scelta a piacere. Sono simili alle coordinate del GPS che individua la posizione di un punto sulla superficie terrestre, con la differenza che nel caso del GPS, il valore di ρ è vincolato sulla superficie della terra, l'angolo θ è misurato a partire dal piano equatoriale (latitudine) e l'angolo ϕ è misurato in modo simile rispetto al meridiano di Greenwich (longitudine).

La *legge oraria* in questo caso è data dalle tre equazioni:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Ad esempio, la seguente legge oraria:

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi/2 \\ \phi = 2\pi \cdot t \end{cases}$$

rappresenta il moto di un punto materiale che si muove sul piano x, y , ($\theta = \frac{\pi}{2}$), lungo una circonferenza di raggio $\rho = 2 \text{ m}$, e percorre una intera circonferenza in un secondo.

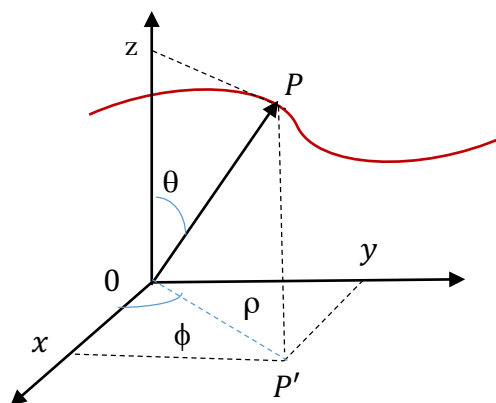


Fig.13: Coordinate sferiche e cartesiane

Facciamo notare che il vettore posizione in coordinate sferiche è espresso come prodotto del suo modulo per il versore:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \quad (\text{II.2})$$

Il sistema di riferimento più comune e più noto, però, è quello **delle coordinate cartesiane** x, y, z in cui la posizione del punto materiale è individuata attraverso le proiezioni del punto P sui tre assi. La legge oraria si esprime attraverso tre funzioni scalari del tempo:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Il vettore posizione si ottiene moltiplicando le coordinate per i rispettivi versori e sommando:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (\text{II.4})$$

da cui ricaviamo il modulo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{II.5})$$

e il versore \hat{r} del vettore (che individua la direzione del vettore):

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}(t)}{r} = \frac{x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{II.6})$$

C'è una sostanziale differenza tra l'espressione del vettore posizione in coordinate cartesiane rispetto alle coordinate sferiche. Infatti, mentre con le coordinate sferiche l'osservatore punta il suo sguardo alla posizione del punto materiale seguendone il moto, nel caso delle coordinate cartesiane l'osservatore considera il moto delle proiezioni del punto materiale sui tre assi, e da questi ricostruisce la posizione del punto nello spazio.

Uno dei vantaggi del sistema cartesiano sta nel fatto che qualunque moto del punto nello spazio può essere scomposto in tre moti rettilinei lungo i tre assi.

Nel caso generale di moto nello spazio, la trasformazione dalle coordinate sferiche a quelle cartesiane si ottiene proiettando il punto P sull'asse z (coordinata z) e sul piano x, y individuando il punto P', con la proiezione di questi sugli assi x, y otteniamo:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

II.3 TRAIETTORIA

Si definisce traiettoria la curva continua formata da tutti i punti geometrici dello spazio occupati dal punto materiale durante il moto.

La legge oraria fornisce l'equazione parametrica della curva dove il parametro è il tempo t . Quando è il parametro t è eliminabile, si può ricavare l'equazione della curva nello spazio.

Ad esempio, consideriamo per un moto sul piano x, y la legge oraria:

$$\begin{cases} x = t \\ y = at \end{cases}$$

ricaviamo $t = x$ dalla prima equazione, e sostituiamo nella seconda ottenendo l'equazione di una retta sul piano x, y .

$$y = ax$$

La traiettoria è rettilinea.

II.4 VETTORE SPOSTAMENTO E LUNGHEZZA DELLA TRAIETTORIA

Introduciamo ora il **vettore spostamento infinitesimo** del punto sulla traiettoria. Consideriamo la posizione del punto P nell'istante t individuata dal vettore $\vec{r}(t)$, e la posizione $\vec{r}(t + \Delta t)$ in un istante successivo ($t + \Delta t$). La differenza tra questi due vettori è dato dal vettore $\Delta\vec{r}$, detto vettore spostamento, che come si vede dalla figura è diretto lungo la secante alla curva.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Esso non fornisce alcuna indicazione utile sul moto, essendo la sua lunghezza calcolata sulla retta secante, minore della lunghezza dello spostamento sulla curva Δs .

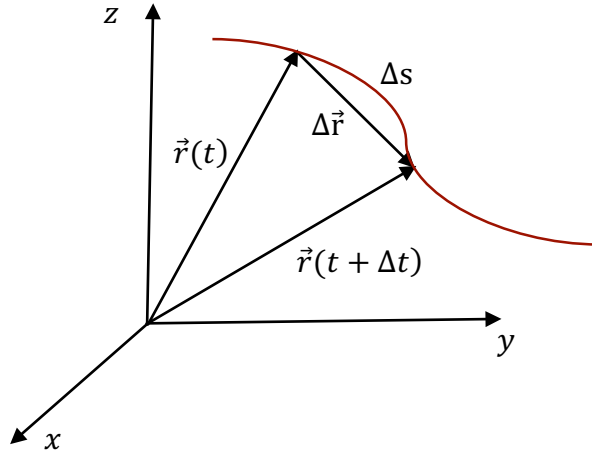


Fig.14: Spostamento sulla traiettoria Δs e vettore spostamento $\Delta \vec{r}$

Se facciamo però tendere $\Delta t \rightarrow 0$, otteniamo il vettore spostamento infinitesimo:

$$d\vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t))$$

osserviamo che il modulo di $|d\vec{r}| = ds$, infatti:

$$\begin{aligned} |d\vec{r}| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}| \\ ds &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

il modulo del vettore spostamento infinitesimo è uguale allo spostamento infinitesimo sulla traiettoria. Inoltre notiamo che il vettore infinitesimo $d\vec{r}$ è tangente alla traiettoria.

II.4.1 Vettore Spostamento in coordinate cartesiane

Utilizzando la legge oraria in coordinate cartesiane ricaviamo modulo e direzione del vettore spostamento:

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad (\text{II.9})$$

il cui modulo è pari a:

$$dr = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (\text{II.10})$$

Il versore \hat{t} tangente alla traiettoria, può essere calcolato come il rapporto

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \frac{dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}} \quad (\text{II.11})$$

La lunghezza della traiettoria l_{AB} tra due punti A e B, si ottiene sommando gli infiniti elementi ds in cui la curva può essere suddivisa:

$$l_{AB} = \int_A^B ds \quad (\text{II.12})$$

II.4.2 Vettore Spostamento in coordinate polari sul piano

La legge oraria del moto sul piano in coordinate polari è data dalle coordinate r e ϕ :

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Il punto è individuato da due coordinate, la distanza r e l'angolo ϕ . Introduciamo ora i versori $\hat{r}(t)$ e $\hat{\phi}(t)$, sono due versori ortogonali che durante il moto seguono la posizione del punto materiale e possono loro ruotare. Esprimiamo il vettore $\vec{r}(t)$ come:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \quad (\text{II.14})$$

Il vettore spostamento infinitesimo è dato da:

$$d\vec{r} = d[r(t)\hat{r}(t)] \quad (\text{II.15})$$

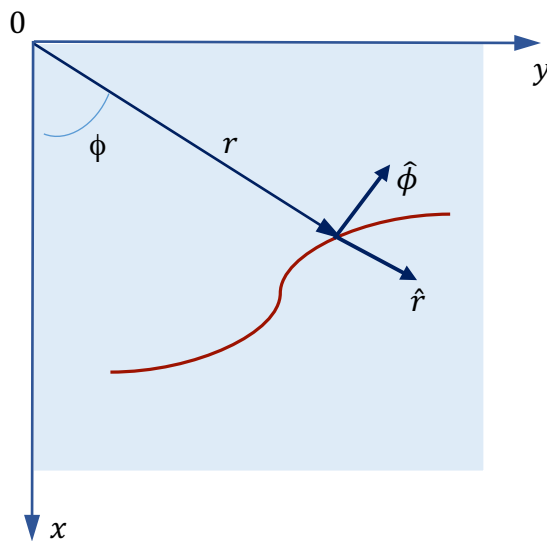


Fig.15: Coordinate polari sul piano

Prima di calcolare con rigore matematico questa quantità, cerchiamo di capire cosa ci aspettiamo. Il vettore ha un modulo e un versore, in generale quindi il vettore può variare in due modi: A) varia il modulo mantenendo la stessa direzione, oppure B) varia il versore, cioè varia la direzione mantenendo modulo costante (il vettore ruota).

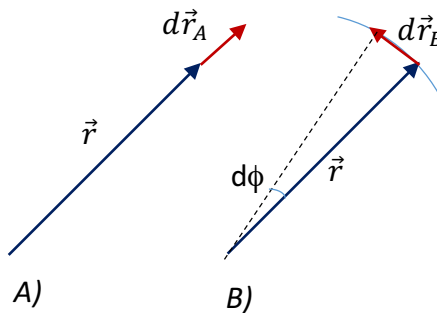


Fig.16, Variazioni del vettore \vec{r}

Ovviamente in generale variano entrambi e lo spostamento totale sarà la somma dei due spostamenti infinitesimi:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_A + d\vec{r}_B$$

Il primo termine rappresenta la variazione infinitesima dell'ampiezza del vettore, parallela al vettore \hat{r} , (caso A)

$$d\vec{r}_A = dr \hat{r}$$

e il secondo termine la rotazione infinitesima del vettore, perpendicolare ad \hat{r} (caso B)

$$d\vec{r}_B = r d\phi \hat{\phi}$$

Si deduce quindi facilmente dal disegno che il vettore $d\vec{r}_B$ è perpendicolare a \hat{r} e quindi è diretto lungo $\hat{\phi}$, mentre il suo modulo è pari alla lunghezza dell'arco pari a $r d\phi$.

D'altra parte, applicando la regola della derivata di un prodotto di funzioni ricaviamo:

$$d\vec{r} = d[r(t)\hat{r}(t)] = dr \hat{r} + r d\hat{r}$$

deve quindi risultare:

$$\begin{cases} d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\hat{r} \\ d\vec{r} = d\vec{r}_A + d\vec{r}_B \end{cases}$$

e confrontando con i risultati ottenuti con semplici argomenti geometrici, abbiamo:

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} \quad (\text{II.16})$$

Nei prossimi paragrafi ricaveremo lo stesso risultato ma con strumenti analitici.

II.5 VELOCITÀ SCALARE E VELOCITÀ VETTORIALE

Nel capitolo I abbiamo incontrato un esempio di equazione del moto che descrive la caduta di un oggetto che parte da fermo. Il moto rettilineo (verticale) è descritto dalla sola coordinata $y(t)$. Per tale moto abbiamo studiato la rapidità con cui cade il punto materiale, e abbiamo introdotto la grandezza velocità istantanea.

Nel caso generale di moto nello spazio la velocità istantanea ha un modulo (scalare) ma ha anche direzione e verso, e deve pertanto essere descritta da una grandezza vettoriale.

II.5.1 Velocità in coordinate cartesiane

Il modulo della velocità istantanea scalare si ricava dal rapporto:

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt} \quad (\text{II.17})$$

da cui

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (\text{II.18})$$

dove riconosciamo le componenti velocità relative alle proiezioni del punto sugli assi:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

da cui

$$v_s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{II.20})$$

Il vettore velocità avrà la stessa direzione del vettore spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ che, abbiamo già visto, è tangente alla traiettoria, e diretto lungo \hat{t} . La velocità istantanea vettoriale è pertanto definita da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad (\text{II.21})$$

che possiamo esprimere come:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

da cui possiamo ricavare nuovamente il versore tangente alla traiettoria:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v_s} = \frac{v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (\text{II.22})$$

II.5.2 Velocità in coordinate polari per un moto piano

In molti casi è utile esprimere il vettore velocità in coordinate sferiche (o polari). Per semplicità consideriamo solo moti piani, e per rendere agevole la trasformazione con le coordinate cartesiane, assumiamo che il piano su cui si muove il punto materiale coincida con il piano x, y . La legge oraria del moto sul piano in coordinate polari è data dalle coordinate r e ϕ :

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Il punto è individuato da due coordinate, la distanza r e l'angolo ϕ .

Le derivate temporali delle due coordinate definiscono la velocità radiale (velocità con cui cambia la distanza dall'origine) espressa in m/s:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (\text{II.24})$$

e la velocità angolare, che esprime la rapidità con cui varia l'angolo, espressa in rad/s.

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{II.25})$$

Introduciamo ora i versori $\hat{r}(t)$ e $\hat{\phi}(t)$, sono due versori ortogonali, che variano nel tempo e durante il moto possono solo ruotare. Il versore $\hat{r}(t)$ è anche la direzione del vettore posizione tale che:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \quad (\text{II.26})$$

Per definizione la velocità vettoriale istantanea è data da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [r(t)\hat{r}(t)] \quad (\text{II.27})$$

Applichiamo la regola della derivata di un prodotto, otteniamo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (\text{II.28})$$

Utilizzando l'espressione ricavata per lo spostamento vettoriale in coordinate polari, otteniamo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \quad (\text{II.29})$$

La velocità si compone di due termini. Il primo termine mantiene l'angolo ϕ costante e considera solo la variazioni della distanza, in altre parole calcola con che velocità il punto si allontana o si avvicina rispetto all'origine, e fornisce la cosiddetta *velocità radiale* che chiamiamo \vec{v}_r :

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \hat{r} \quad (\text{II.30})$$

Il secondo termine, in cui il punto materiale mantiene la distanza costante, calcola con che velocità il punto ruota rispetto all'origine ed è chiamato *velocità azimutale* v_ϕ :

$$\vec{v}_\phi = r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \quad (\text{II.31})$$

che, ricordando la definizione di velocità angolare è espressa come:

$$\vec{v}_\phi = r\omega \hat{\phi} \quad (\text{II.32})$$

dalle componenti calcoliamo il modulo della velocità:

$$v_s = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\phi)^2} \quad (\text{II.33})$$

e il versore della velocità (tangente alla traiettoria):

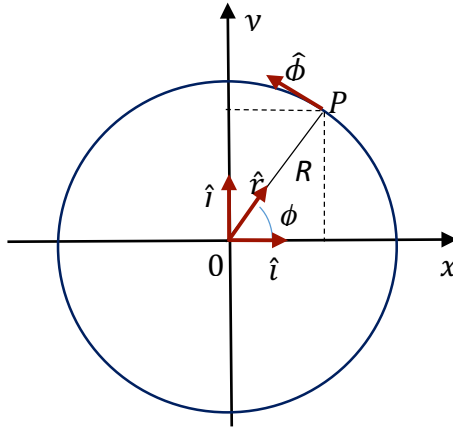
$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v_s} = \frac{v_r \hat{r} + \omega r \hat{\phi}}{\sqrt{(v_r)^2 + (v_\phi)^2}} \quad (\text{II.34})$$

II.6. FORMULE DI POISSON

Nel calcolo della velocità azimutale con considerazioni geometriche abbiamo ricavato:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \omega \hat{\phi}$$

Vogliamo ora ricavare analiticamente la derivata dei due versori $\hat{r}(t)$ e $\hat{\phi}(t)$. A tale scopo esprimiamo i due versori in coordinate cartesiane:



$$\begin{cases} \hat{r}(t) = \cos[\phi(t)]\hat{i} + \sin[\phi(t)]\hat{j} \\ \hat{\phi}(t) = -\sin[\phi(t)]\hat{i} + \cos[\phi(t)]\hat{j} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Calcoliamo la derivata

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = -\sin[\phi(t)]\frac{d\phi}{dt}\hat{i} + \cos[\phi(t)]\frac{d\phi}{dt}\hat{j} \quad (\text{II.36})$$

Utilizzando la definizione di velocità angolare otteniamo:

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = -\omega(t)\{-\sin[\phi(t)]\hat{i} + \cos[\phi(t)]\hat{j}\} \quad (\text{II.37})$$

da cui

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\hat{\phi}(t) \quad (\text{II.38})$$

Calcoliamo ora la derivata del vettore $\hat{\phi}(t)$ partendo dall'espressione del versore in coordinate cartesiane:

$$\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = -\cos[\phi(t)]\frac{d\phi}{dt}\hat{i} - \sin[\phi(t)]\frac{d\phi}{dt}\hat{j} \quad (\text{II.39})$$

$$\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = -\omega\{\cos[\phi(t)]\hat{i} + \sin[\phi(t)]\hat{j}\} \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = -\omega(t)\hat{r}(t) \quad (\text{II.41})$$

Anche in questo caso la derivata è proporzionale alla velocità angolare ed è perpendicolare a $\hat{\phi}$. Queste due relazioni sono fondamentali per lo studio di un moto generico in coordinate polari, e in particolare, come vedremo, per il moto circolare e per i sistemi di riferimento ruotanti. Facciamo notare che quando il punto si muove sul piano, la velocità angolare è definita positiva per angoli ϕ crescenti (moto antiorario) e negativa per angoli ϕ decrescenti (moto orario). Generalizziamo questa proprietà introducendo il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ che per un moto piano può essere espresso da:

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k} \quad (\text{II.42})$$

esso è diretto in alto se $\omega_z > 0$ (moto antiorario), e diretto in basso se $\omega_z < 0$ (moto orario).

Introducendo il versore \hat{k} perpendicolare al piano del moto otteniamo una terna di versori mutuamente ortogonali $\hat{r}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ e \hat{k} . E' bene notare che solo i primi due variano nel tempo, il terzo è un versore costante. Per tale terna di versori, seguendo la regola della mano destra, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \hat{r} \times \hat{r} = 0 & \hat{\phi} \times \hat{\phi} = 0 & \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{k} & \hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{r} & \hat{k} \times \hat{r} = \hat{\phi} \\ \hat{r} \times \hat{k} = -\hat{\phi} & \hat{\phi} \times \hat{r} = -\hat{k} & \hat{k} \times \hat{\phi} = -\hat{r} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

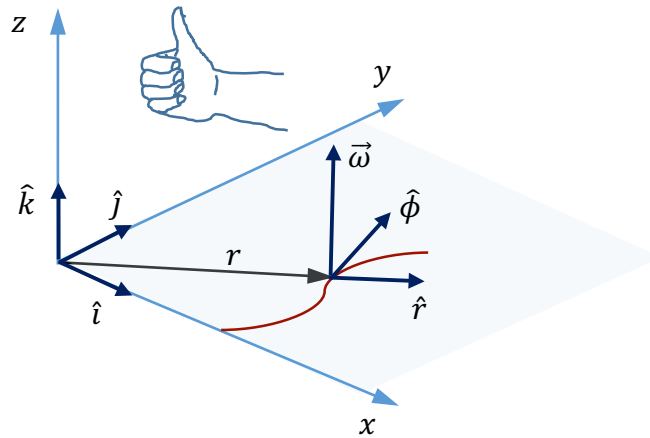


Fig.17, Terna versori in coordinate polari

che ci consentono di scrivere:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \times \hat{r} = \omega_z \hat{\phi} \\ \vec{\omega} \times \hat{\phi} = -\omega_z \hat{r} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

da cui otteniamo le seguenti equazioni di Poisson:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega_z(t) \hat{\phi}(t) = \vec{\omega} \times \hat{r} \\ \frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = -\omega_z(t) \hat{r}(t) = \vec{\omega} \times \hat{\phi} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

La derivata di un versore rotante è pari al prodotto vettoriale del vettore velocità angolare per il versore stesso.

Nel caso di un vettore \vec{A} di modulo costante che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, vige la stessa regola:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}(t)$$

II.7 VETTORE ACCELERAZIONE

Se il vettore velocità è funzione del tempo, analogamente a quanto fatto per la velocità, definiamo accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

II.7.1 Accelerazione in coordinate cartesiane

L'accelerazione istantanea scalare si ricava derivando le componenti della velocità:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Il modulo del vettore accelerazione

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{II.48})$$

Anche in questo caso possiamo ricavare il versore della velocità come rapporto tra vettore e modulo:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \quad (\text{II.49})$$

II.7.2 Accelerazione in coordinate polari sul piano

L'espressione dell'accelerazione è in genere più complessa se utilizziamo le coordinate polari (sul piano).

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + \omega r \hat{\phi} \right) \quad (\text{II.48})$$

sviluppiamo le derivate:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{r} + \frac{dr}{dt} \frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r \hat{\phi} + \omega \frac{dr}{dt} \hat{\phi} + \omega r \quad (\text{II.50})$$

poniamo:

$$\begin{cases} a_r = \frac{d^2r}{dt^2} \\ v_r = \frac{dr}{dt} \\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

dove α è l'accelerazione angolare espressa in rad/s^2 . Sappiamo inoltre che

$$\begin{cases} \frac{d\hat{r}}{dt} = \omega\hat{\phi} \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\omega\hat{r} \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

otteniamo:

$$\vec{a} = (a_r - \omega^2 r)\hat{r} + (2v_r\omega + \alpha r)\hat{\phi} \quad (\text{II.53})$$

in cui riconosciamo l'espressione dell'accelerazione per il moto circolare uniforme se $a_r = 0$ e $\alpha = 0$.

Il modulo dell'accelerazione è pari a:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} \quad (\text{II.54})$$

II.7.3 *Ascissa curvilinea e Piano Osculatore*

Nello studio della cinematica esiste anche un terzo sistema di riferimento che può descrivere il moto. Esso ha l'origine in un punto $0'$ arbitrario sulla traiettoria, i versori sono tangente $\hat{t}(t)$ e normale $\hat{n}(t)$ alla traiettoria, essi si muovono insieme al punto materiale. Questi assi formano un piano che si chiama "piano osculatore" su cui giace in ogni istante la curva della traiettoria nello spazio. Di queste coordinate abbiamo già imparato molto. Ad esempio abbiamo visto che il vettore spostamento infinitesimo e la velocità istantanea sono diretti come $\hat{t}(t)$ mentre possiamo vedere che l'accelerazione ha due componenti lungo $\hat{t}(t)$ e $\hat{n}(t)$.

Contrariamente al vettore velocità che è sempre tangente alla traiettoria, il vettore accelerazione può avere una qualunque direzione purché diretta verso la concavità della curva. Pertanto, l'accelerazione ha una componente tangente alla traiettoria \vec{a}_t e una componente perpendicolare alla traiettoria \vec{a}_n .

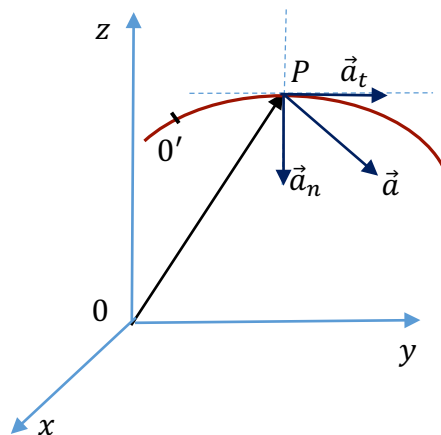


Fig.18, Piano osculatore

Per verificare questa proprietà dell'accelerazione consideriamo la velocità espressa tramite il modulo v_s e il versore \hat{v} :

$$\vec{v} = v_s\hat{v} \quad (\text{II.55})$$

l'accelerazione si ricava derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_s}{dt} \hat{v} + v_s \frac{d\hat{v}}{dt} \quad (\text{II.56})$$

Il primo termine corrisponde all'accelerazione tangenziale \vec{a}_τ che misura la variazione della velocità scalare nella direzione del moto, nel secondo termine invece la velocità scalare è costante e varia la direzione del moto. Per dare un'immagine concreta di queste componenti dell'accelerazione prendiamo come esempio un'auto che viaggia su un'autostrada. Quando premiamo il pedale dell'accelerazione causiamo l'*accelerazione tangente*, perché acceleriamo nella direzione istantanea del moto. Quando affrontiamo una curva a velocità costante, il vettore velocità non cambia in modulo ma solo in direzione e quindi causiamo un'accelerazione perpendicolare alla traiettoria che viene chiamata *accelerazione normale* a_n .

Ricordando la proprietà del prodotto scalare tra due vettori, possiamo ricavare la componente tangenziale dell'accelerazione mediante il prodotto scalare:

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \hat{t} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot \left(\frac{v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}}{v_s} \right) \quad (\text{II.57})$$

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{v_s} \quad (\text{II.58})$$

Per la componente normale possiamo sfruttare la relazione:

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 \quad (\text{II.59})$$

II.8 DAL VETTORE ACCELERAZIONE AL VETTORE POSIZIONE

II.8.1 Condizioni iniziali del moto

Vedremo nel capitolo sulla dinamica che le forze che agiscono sul punto materiale sono causa della sua accelerazione. Una volta nota l'accelerazione, come ricaviamo la velocità e la posizione nel tempo?

In questa operazione di passaggio dall'accelerazione alla posizione è necessario conoscere apriori le condizioni iniziali del moto, cioè la velocità \vec{v}_0 e la posizione \vec{r}_0 nell'istante $t = t_0$. Applicando i risultati (I.38), presentati nel capitolo I, alle tre coordinate abbiamo:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) = v_{y0} + \int_{t_0}^t a_y(t) dt \\ v_z(t) = v_{z0} + \int_{t_0}^t a_z(t) dt \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

Che può essere espressa da un'unica relazione vettoriale:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \quad (\text{II.61})$$

Analogamente per la posizione abbiamo:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t) dt \\ z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t v_z(t) dt \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

sinteticamente espressa da:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt \quad (\text{II.63})$$

II.9 MOTO RETTILINEO

Se il punto materiale si muove lungo una retta parliamo di moto rettilineo. Ricordiamo che un moto qualsiasi nello spazio in coordinate cartesiane è rappresentato da tre moti rettilinei lungo i tre assi, pertanto lo studio del moto rettilineo sta alla base della descrizione del moto in tale sistema di coordinate.

Nei prossimi paragrafi descriviamo tre esempi di moti rettilinei che hanno particolare rilevanza, considerando il moto sull'asse x .

II.9.1 Moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo si dice uniforme se il punto si muove con velocità costante v_{x0} , il che significa con accelerazione nulla:

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ v_x(t) = v_{x0} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Per ricavare la legge oraria in questo caso, serve una sola condizione iniziale, la posizione x_0 .

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_{x0} dt \quad (\text{II.65})$$

Abbiamo già incontrato questo caso particolare nel capitolo I, ma lo rivediamo dal punto di vista del calcolo. La velocità è costante pertanto può essere messa a fattore nella somma (cioè può essere portata all'esterno dell'integrale):

$$x(t) = x_0 + v_{x0} \int_{t_0}^t dt \quad (\text{II.66})$$

L'integrale nella formula è molto semplice, essendo la funzione primitiva pari al tempo t , abbiamo:

$$x(t) = x_0 + v_{x0} [t]_{t_0}^t \quad (\text{II.67})$$

che sviluppiamo in:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) \quad (\text{II.68})$$

L'equazione rappresenta la retta che passa per il punto (x_0, t_0) , con inclinazione data dalla velocità iniziale $m = v_{x0}$.

II.9.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

In questo caso l'accelerazione del punto materiale è costante pari a a_{x0} , per ricavare la legge orario bisogna conoscere posizione e velocità iniziale (x_0, v_{x0}) . Utilizzando le formule ricavate nel paragrafo II.8.1 otteniamo:

Anche in questo caso il termine nella somma (integrale) è costante pertanto:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_{x0} \int_{t_0}^t dt \quad (\text{II.69})$$

che dà come risultato:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}(t - t_0) \quad (\text{II.70})$$

L'osservatore fa partire il cronometro nell'istante t_0 e vede la velocità crescere linearmente nel tempo, la pendenza dipende dall'accelerazione a_{x0} . Sostituiamo questa espressione nella relazione integrale della posizione, otteniamo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_{x0} dt = x_0 + \int_{t_0}^t [v_{x0} + a_{x0}(t - t_0)] dt \quad (\text{II.71})$$

Questo integrale lo possiamo dividere in due parti e tenendo conto delle costanti abbiamo:

$$x(t) = x_0 + v_{x0} \int_{t_0}^t dt + a_{x0} \int_{t_0}^t (t - t_0) dt \quad (\text{II.72})$$

che fornisce il seguente risultato:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{x0}(t - t_0)^2 \quad (\text{II.73})$$

Ad esempio, nel caso della caduta di un grave da fermo con accelerazione $a_{y0} = -g$, in assenza di attriti, ponendo $t_0 = 0$ abbiamo:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{II.74})$$

II.9.3 Moto armonico, equazione differenziale e condizioni iniziali

Si definisce *moto armonico* un moto rettilineo descritto da una legge oraria sinusoidale, in cui il punto materiale oscilla tra due posizioni estreme $\pm x_M$ con un periodo T . La forma generale del moto armonico è data da:

$$x(t) = x_M \sin(\Omega t + \vartheta) \quad (\text{II.75})$$

dove x_M è l'ampiezza dell'oscillazione, Ω è la *pulsazione* dell'oscillazione, e ϑ la fase iniziale.

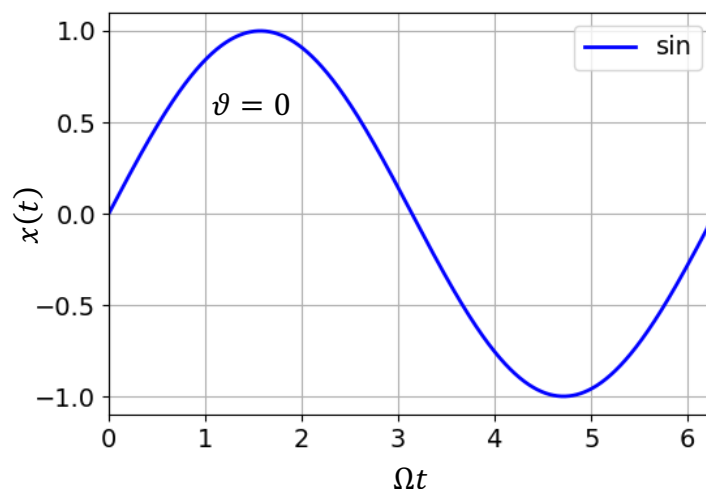


Fig.19, Moto periodico con ampiezza unitaria e fase nulla

La pulsazione dipende dal periodo T dell'oscillazione, infatti il punto materiale esegue una oscillazione completa quando l'argomento della funzione seno varia di 2π , per cui vale:

$$\Omega T = 2\pi \quad (\text{II.76})$$

Mentre l'ampiezza e la fase iniziale dipendono dalle condizioni iniziali del moto. Dalla legge oraria ricaviamo facilmente velocità e accelerazione:

$$\begin{cases} v_x(t) = \Omega x_M \cos(\Omega t + \vartheta) \\ a_x(t) = -\Omega^2 x_M \sin(\Omega t + \vartheta) \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

Osserviamo che l'accelerazione può essere espressa tramite la funzione $x(t)$:

$$a_x(t) = -\Omega^2 x(t) \quad (\text{II.78})$$

Questa relazione tra accelerazione e posizione fornisce l'equazione differenziale del moto armonico che viene scritta anche nel seguente modo:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\Omega^2 x(t) \quad (\text{II.79})$$

Ogni qual volta dalle leggi della Fisica ricaviamo una relazione differenziale simile tra la posizione e l'accelerazione (con il segno meno !!) abbiamo a che fare con un moto armonico la cui la soluzione generale è data da:

$$x(t) = x_M \sin(\Omega t + \vartheta) \quad (\text{II.80})$$

Come già detto, in questa espressione compaiono due costanti x_M e ϑ che si ricavano a partire dalle condizioni iniziali (x_0, v_{x0}) . Infatti, note le funzioni del tempo posizione e velocità, imponiamo nell'istante $t = 0$ le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = x_M \sin \vartheta \\ v_{x0} = \Omega x_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{II.81})$$

Poiché il periodo dell'oscillazione è noto, il sistema presenta due equazioni e due incognite x_M e ϑ . Osserviamo che il sistema non è lineare, la risoluzione con la tecnica della sostituzione ci porterebbe su un percorso molto complesso. Operiamo invece nel seguente modo: riscriviamo le due equazioni

$$\begin{cases} x_0 = x_M \sin \vartheta \\ \frac{v_{x0}}{\Omega} = x_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{II.82})$$

Eleviamo al quadrato e sommiamo:

$$\begin{cases} x_0^2 = x_M^2 \sin^2 \vartheta \\ \frac{v_{x0}^2}{\Omega^2} = x_M^2 \cos^2 \vartheta \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

essendo $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$, otteniamo

$$x_M^2 = x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\Omega^2} \quad (\text{II.84})$$

da cui

$$x_M = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\Omega^2}} \quad (\text{II.85})$$

Una volta nota l'ampiezza dell'oscillazione x_M , la fase iniziale ϑ si può ricavare da:

$$\cos \vartheta = \frac{v_{x0}}{\Omega x_M} \quad (\text{II.86})$$

oppure:

$$\tan \vartheta = \frac{\Omega x_0}{v_{x0}} \quad (\text{II.87})$$

II.10 MOTI PIANI

Quando il moto si sviluppa in due dimensioni (es. x, y) parliamo di moto piano. In questo paragrafo studiamo le caratteristiche cinematiche di alcuni moti piani: il moto parabolico, il moto circolare, moto lungo una spirale. Per ciascun moto studieremo la traiettoria, ricaveremo la velocità, l'accelerazione e altre grandezze di interesse.

II.10.1 Moto parabolico

Legge Oraria e Equazione Traiettoria

Consideriamo un punto materiale soggetto all'azione della gravità. Nel vuoto esso cade con una accelerazione pari a $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ diretta verso il basso. Supponiamo che il punto materiale sia lanciato nell'istante $t_0 = 0$ dalla posizione ($x_0 = 0, y_0 = 0$) con una velocità \vec{v}_0 , con un angolo φ rispetto all'asse orizzontale,.

Lo studio del moto viene effettuato separatamente sui due assi per i quali abbiamo:

$$\begin{cases} a_{x0} = 0 \\ v_{x0} = v_0 \cos \varphi \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

e per l'asse y :

$$\begin{cases} a_{y0} = -g \\ v_{y0} = v_0 \sin\varphi \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.89})$$

Riconosciamo che sull'asse x abbiamo un moto rettilineo uniforme, mentre sull'asse y il moto è rettilineo uniformemente accelerato.

Vettore velocità e versore tangente

Per le componenti delle velocità otteniamo:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = v_{y0} - gt \end{cases} \quad (\text{II.90})$$

da cui ricaviamo il vettore velocità

$$\vec{v} = (v_{x0})\hat{i} + (v_{y0} - gt)\hat{j} \quad (\text{II.91})$$

la velocità scalare

$$v_s = \sqrt{(v_{x0})^2 + (v_{y0} - gt)^2} \quad (\text{II.92})$$

e il versore tangente alla traiettoria:

$$\hat{v} = \frac{(v_{x0})\hat{i} + (v_{y0} - gt)\hat{j}}{\sqrt{(v_{x0})^2 + (v_{y0} - gt)^2}} \quad (\text{II.93})$$

Integrando le velocità otteniamo la legge oraria del moto:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

Per ottenere l'equazione della traiettoria nel piano x, y , ricaviamo il parametro t dalla prima e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_{0x}} \\ y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

otteniamo una parabola interseca l'asse x in due punti:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

La gittata x_G è la distanza di impatto dell'oggetto al suolo ($y = 0$).
Sostituendo le condizioni iniziali abbiamo:

$$x_G = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} \quad (\text{II.97})$$

che, conoscendo la relazione trigonometrica $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi \cos\varphi$, scriviamo:

$$x_G = \frac{v_0^2 \sin(2\varphi)}{g} \quad (\text{II.98})$$

Il cui massimo valore si ottiene per $\varphi = \pi/4$.

La parabola ha un massimo nel punto

$$\begin{cases} x_{max} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \\ y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

Per calcolare l'istante in cui il punto raggiunge la massima altezza, occorre porre a zero la derivata prima della funzione $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt = 0 \quad (\text{II.100})$$

che si annulla nell'istante

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} \quad (\text{II.101})$$

Vettore spostamento, versore tangente

Eseguiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{cases} dx = v_{0x}dt \\ dy = v_{0y}dt - gtdt \end{cases}$$

$$d\vec{r} = (v_{0x})dt \hat{i} + (v_{0y} - gt)dt \hat{j}$$

$$dr = ds = dt \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2} \quad (\text{II.102})$$

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \frac{(v_{0x}) \hat{i} + (v_{0y} - gt) \hat{j}}{\sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2}}$$

Notiamo che quando il punto raggiunge il punto massimo il versore \hat{t} è orizzontale, la componente lungo \hat{j} deve essere nulla, e ciò avviene nell'istante

$$t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} \quad (\text{II.103})$$

II.10.2 Moto circolare in coordinate cartesiane

Consideriamo il moto circolare di raggio R , e sia $[\phi(t)]$ la legge oraria con cui varia l'angolo misurato in *radianti*. Gli assi x e y sono individuati dai versori \hat{i} e \hat{j} , mentre \hat{r} e $\hat{\phi}$ sono i versori delle coordinate polari sul piano.

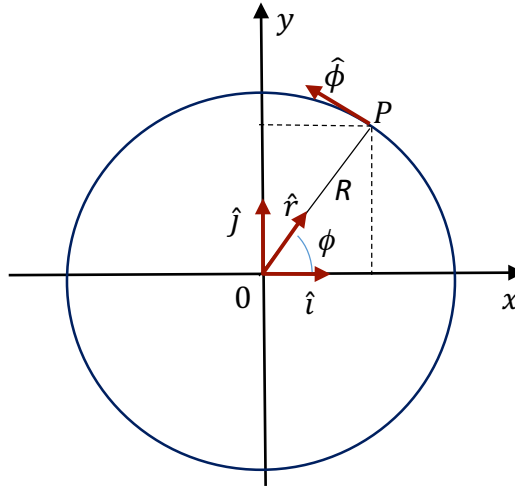


Fig.20, Moto circolare, coordinate cartesiane e polari

I versori \hat{r} e $\hat{\phi}$ hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \hat{r}(t) = \cos[\phi(t)]\hat{i} + \sin[\phi(t)]\hat{j} \\ \hat{\phi}(t) = -\sin[\phi(t)]\hat{i} + \cos[\phi(t)]\hat{j} \end{cases} \quad (\text{II.104})$$

In coordinate cartesiane la legge oraria è data da:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos[\phi(t)] \\ y(t) = R \sin[\phi(t)] \end{cases} \quad (\text{II.105})$$

osserviamo che il moto circolare si compone di due moti rettilinei lungo gli assi x, y sfasati di $\pi/2$. Il vettore posizione si ottiene sommando le componenti:

$$\vec{r}(t) = R \{ \cos[\phi(t)]\hat{i} + \sin[\phi(t)]\hat{j} \} \quad (\text{II.106})$$

l'equazione della traiettoria si calcola elevando al quadrato le coordinate e sommando i termini:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 \cos^2[\phi(t)] \\ y^2 = R^2 \sin^2[\phi(t)] \end{cases} \quad (\text{II.107})$$

da cui:

$$x^2 + y^2 = R^2 \{ \cos^2[\phi(t)] + \sin^2[\phi(t)] \} = R^2 \quad (\text{II.108})$$

che rappresenta l'equazione della circonferenza di raggio R . Notiamo che quando eliminiamo il parametro tempo t , si ottiene l'equazione analitica della curva ma si perde l'informazione della posizione del punto al variare del tempo, che solo la legge oraria può fornire.

Vettore spostamento, versore tangente e lunghezza traiettoria

Per semplicità omettiamo la dipendenza dal tempo.

Dalla legge oraria ricaviamo:

$$\begin{cases} dx = -R \sin\phi \, d\phi \\ dy = R \cos\phi \, d\phi \end{cases} \quad (\text{II.109})$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} = (-R \sin\phi \, d\phi)\hat{i} + (R \cos\phi \, d\phi)\hat{j}$$

da cui ricaviamo il modulo dello spostamento infinitesimo.

$$dr = ds = \sqrt{(-R \sin\phi \, d\phi)^2 + (R \cos\phi \, d\phi)^2} = R \, d\phi \quad (\text{II.110})$$

sommando lungo un arco che va da ϕ_A a ϕ_B otteniamo la lunghezza della traiettoria:

$$l_{AB} = \int_{\phi_A}^{\phi_B} R \, d\phi = R(\phi_B - \phi_A) \quad (\text{II.111})$$

Vettore velocità e versore tangente

Abbiamo definito la velocità angolare ω , espressa in radianti/secondo (rad/s), la grandezza:

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{II.112})$$

che rappresenta la rapidità con cui varia l'angolo ϕ nel tempo. Calcoliamo ora le componenti della velocità in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} v_x = -R \sin\phi \frac{d\phi}{dt} \\ v_y = R \cos\phi \frac{d\phi}{dt} \end{cases} \quad (\text{II.113})$$

sostituiamo la velocità angolare:

$$\begin{cases} v_x = -R\omega \sin\phi \\ v_y = R\omega \cos\phi \end{cases} \quad (\text{II.114})$$

e calcoliamo in sequenza il vettore velocità:

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = -R\omega \sin\phi \hat{i} + R\omega \cos\phi \hat{j} \quad (\text{II.115})$$

la velocità scalare:

$$v_s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R|\omega|\sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = R|\omega| \quad (\text{II.116})$$

il versore della velocità, che sappiamo deve essere tangente alla circonferenza:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}(t)}{v_s} = \frac{-R\omega \sin\phi \hat{i} + R\omega \cos\phi \hat{j}}{R|\omega|} \quad (\text{II.117})$$

in cui riconosciamo le componenti del versore $\hat{\phi}$:

$$\hat{v} = \frac{\omega}{|\omega|} (-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}) = \pm \hat{\phi} \quad (\text{II.118})$$

Vettore accelerazione, accelerazione tangente e centripeta

Per il calcolo dell'accelerazione notiamo che la velocità è espressa dal prodotto di una funzione che moltiplica una funzione di funzione. Occorre quindi applicare entrambe le regole delle derivate. Detta α l'accelerazione angolare, abbiamo:

$$\begin{cases} a_x = -R \alpha \sin\phi - R\omega^2 \cos\phi \\ a_y = R \alpha \cos\phi - R\omega^2 \sin\phi \end{cases} \quad (\text{II.119})$$

Il vettore accelerazione è dato da:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \\ \vec{a} &= -R\omega^2 \{\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}\} + R\alpha \{-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}\} \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

essendo note le espressioni dei versori $\hat{r}(t)$ e $\hat{\phi}(t)$, l'accelerazione diventa:

$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{r} + R\alpha \hat{\phi} \quad (\text{II.121})$$

dove il primo termine è la cosiddetta accelerazione centripeta, mentre il secondo termine è l'accelerazione tangente alla circonferenza.

Moto circolare uniforme

In questo caso l'accelerazione angolare è nulla e la velocità angolare è costante:

$$\begin{cases} \alpha(t) = 0 \\ \omega(t) = \omega_0 \end{cases} \quad (\text{II.122})$$

Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x(t) = R \cos[\omega_0 t] \\ y(t) = R \sin[\omega_0 t] \end{cases} \\ &\begin{cases} v_x = -R \omega_0 \sin[\omega_0 t] \\ v_y = R \omega_0 \cos[\omega_0 t] \end{cases} \\ &\begin{cases} a_x = -R \omega_0^2 \cos[\omega_0 t] \\ a_y = -R \omega_0^2 \sin[\omega_0 t] \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

$$v_s = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R|\omega_0| \quad (\text{II.124})$$

$$\vec{a} = -R\omega_0^2 \hat{r} \quad (\text{II.125})$$

II.10.3 Cinematica del moto circolare in coordinate polari

La complessità dello studio del moto circolare in coordinate cartesiane si dissolve se utilizziamo le coordinate più naturali per questo tipo di moto, cioè le coordinate polari. La legge oraria in coordinate polari, con un raggio costante, è data da:

$$\begin{cases} r = R \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \quad (\text{II.126})$$

Nella rappresentazione del moto utilizziamo i versori $\hat{r}(t)$ radiale e $\hat{\phi}(t)$, perpendicolare a \hat{r} e tangente alla circonferenza. Il vettore posizione viene espresso da:

$$\vec{r}(t) = R\hat{r}(t) \quad (\text{II.127})$$

Quando il punto materiale si muove sulla circonferenza, il vettore $\vec{r}(t)$ si comporta come un vettore rotante, pertanto la velocità si può ricavare dalle formule di Poisson:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\vec{\omega} \times \hat{r}(t) \quad (\text{II.128})$$

dove $\vec{\omega}$ è perpendicolare al piano del moto. In particolare se il moto avviene nel piano x, y , utilizziamo il vettore velocità angolare:

$$\begin{cases} \omega_z(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \\ \vec{\omega}(t) = \omega_z(t)\hat{k} \end{cases} \quad (\text{II.129})$$

e il vettore accelerazione angolare:

$$\begin{cases} \alpha_z(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \\ \vec{\alpha}(t) = \alpha_z(t)\hat{k} \end{cases} \quad (\text{II.130})$$

Essendo $\hat{r}(t), \hat{\phi}(t), \hat{k}$ una terna di versori ortogonali, ricaviamo per la velocità:

$$\vec{v}(t) = R\omega_z(t)\hat{\phi}(t) \quad (\text{II.131})$$

Per ricavare l'accelerazione, calcoliamo da derivata della velocità (prodotto di due funzioni):

$$\vec{a}(t) = R\alpha_z(t)\hat{\phi}(t) + R\omega_z(t)\vec{\omega} \times \hat{\phi}(t) \quad (\text{II.132})$$

essendo $\vec{\omega} \times \hat{\phi}(t) = -\omega_z(t)\hat{r}(t)$, abbiamo:

$$\vec{a}(t) = R\alpha_z(t)\hat{\phi}(t) - R\omega_z^2(t)\hat{r}(t) \quad (\text{II.133})$$

con un procedimento molto più semplice abbiamo ricavato la velocità e l'accelerazione. Come atteso, la velocità è tangente alla circonferenza, mentre l'accelerazione consta di due termini, uno tangenziale che tiene conto dell'accelerazione angolare del punto materiale, e l'altro è

diretta verso il centro della circonferenza (accelerazione centripeta) che tiene conto della variazione continua della direzione del moto dovuto alla curvatura. Facciamo notare un' importante relazione tra il modulo della velocità $v_s(t) = R|\omega_z(t)|$, il modulo dell'accelerazione centripeta $a_n(t) = R\omega_z^2(t)$, e il raggio della circonferenza R :

$$R = \frac{v_s^2}{a_n} \quad (\text{II.134})$$

Questa relazione applicata a una traiettoria qualsiasi fornisce il raggio di curvatura locale ρ del cosiddetto cerchio osculatore. In ogni istante t calcoliamo sulla curva la velocità istantanea v_s e l'accelerazione normale a_n e ricaviamo:

$$\rho = \frac{v_s^2}{a_n} \quad (\text{II.135})$$

II.10.4 Velocità areolare nei moti piani

Abbiamo visto nel capitolo di introduzione al calcolo vettoriale che il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma avente per lati i due vettori. Scelto un polo Ω sul piano, consideriamo il prodotto vettoriale tra il vettore posizione $\vec{r}_{\Omega P}$ e il vettore spostamento infinitesimo $\vec{v}dt$, il modulo del prodotto è pari al doppio dell'area dA tratteggiata in figura. Essa rappresenta l'area infinitesima spazzata dal raggio vettore $\vec{r}_{\Omega P}$ in un intervallo di tempo dt .

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r}_{\Omega P} \times \vec{v}dt| \quad (\text{II.136})$$

da cui ricaviamo la velocità areolare scalare:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r}_{\Omega P} \times \vec{v}| \quad (\text{II.137})$$

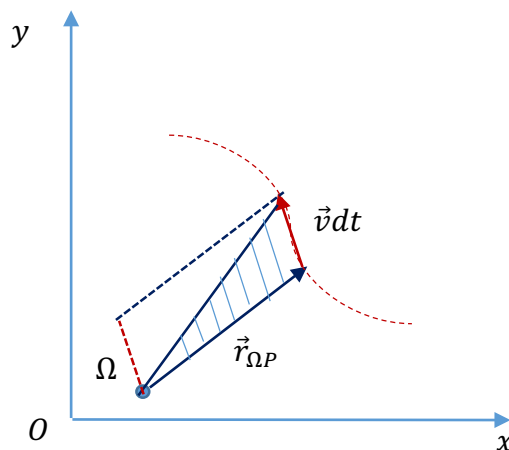


Fig.21, Velocità Areolare rispetto al polo Ω

Facciamo notare che è possibile definire anche una velocità areolare vettoriale se assumiamo una superficie orientata con il versore \hat{n} perpendicolare al piano:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r}_{\Omega P} \times \vec{v}) \quad (\text{II.138})$$

II.10.4.1 Velocità areolare per un moto rettilineo

Nel caso di un moto rettilineo, tenendo conto che il braccio b (distanza del polo dalla retta) è costante, la velocità areolare è data da:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} b \cdot v(t) \hat{k} \quad (\text{II.139})$$

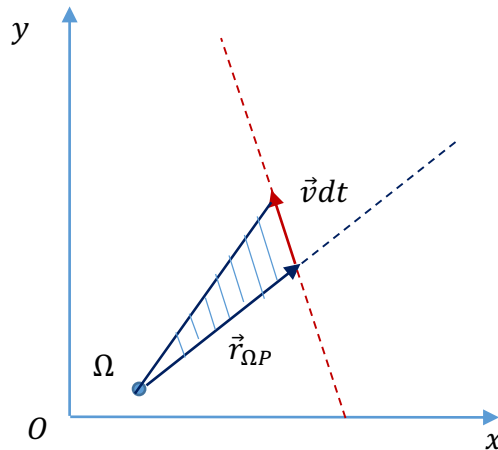


Fig.22, Velocità Areolare di un moto rettilineo rispetto al polo Ω

Notiamo che se il punto materiale si muove di moto rettilineo uniforme, la velocità areolare è costante.

II.10.4.2 Velocità areolare per un moto circolare

Tenendo conto che per un moto circolare il braccio è sempre pari al raggio R , e la velocità è pari a ωR , è facile ricavare la velocità areolare:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \omega R^2 \hat{k} \quad (\text{II.140})$$

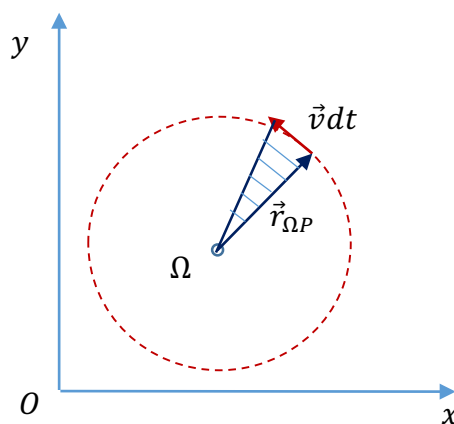


Fig.23, Velocità Areolare di un moto circolare rispetto al polo Ω

Notiamo che se il punto materiale si muove di moto circolare uniforme, la velocità areolare è costante.

CAPITOLO III: DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

III.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vogliamo presentare i principi della Meccanica Classica che analizza le proprietà del moto sotto l'azione di forze. Bisogna precisare che la meccanica classica ha dei limiti di validità: essa riguarda oggetti che posseggono una velocità molto minore della velocità della luce, $v \ll c$, in caso contrario bisogna ricorrere alla Meccanica Relativistica; gli oggetti, inoltre, sono molto più grandi dell'atomo, infatti a livello atomico le leggi della fisica sono descritte dalla Meccanica Quantistica.

Esponiamo qui di seguito i principi della dinamica:

- Principio di Relatività di Galilei
- Principio di Inerzia (I Principio)
- $\vec{f} = m_i \vec{a}$ (II Principio)
- Principio di azione e reazione (III principio)

III.2 PRINCIPIO DI RELATIVITA' DI GALILEI

Con questo principio Galilei affermava che se due osservatori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme, i loro sistemi di riferimento sono equivalenti, nel senso che le osservazioni dello stesso fenomeno fisico (la meccanica per Galilei) realizzate nei due sistemi sono descritte dalle stesse leggi e *due sistemi sono indistinguibili*.

Cerchiamo di chiarire, intanto questo principio tratta di moti relativi di un osservatore O' rispetto a un altro sistema O , dobbiamo immaginare che ciascun osservatore si trovi nell'origine di un proprio sistema di coordinate (ad esempio cartesiane) e che durante il moto tutti i punti dello spazio si muovano insieme all'osservatore, con una velocità che chiamiamo *velocità di trascinamento*.

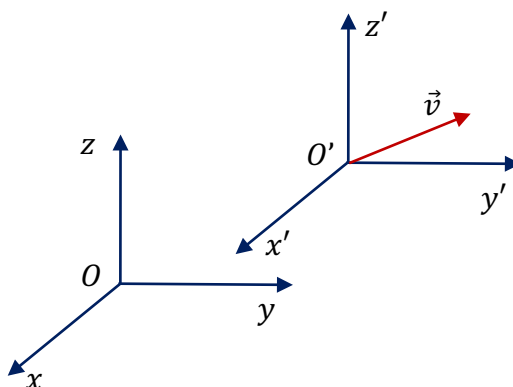


Fig.24, Moti relativi tra sistemi di riferimento

Quando parliamo di un Osservatore (del moto) immaginiamo ci sia una telecamera collocata nell'origine in grado di "vedere" tutto lo spazio in cui gli oggetti si muovono, non attribuiamo altre proprietà all'osservatore.

Consideriamo il moto relativo di un osservatore in O rispetto a un altro in O' , l'uno di moto rettilineo uniforme rispetto all'altro. Non ci sono riferimenti esterni, pensiamo ad esempio a due astronavi nello spazio, lontane da qualunque corpo celeste, che durante il moto si incontrano. Non avendo riferimenti esterni, ciascuna astronave potrà misurare solo la velocità relativa rispetto all'altra e perde di significato la velocità assoluta.

Ora, se si eseguono esperimenti di meccanica nei due sistemi, si ottengono gli stessi risultati, ad esempio se si lascia un oggetto fermo in assenza di gravità, rimarrà fermo in entrambi i sistemi, oppure se si lancia un oggetto con una data velocità, all'interno di ciascuna astronave si osserverà lo stesso moto.

Pertanto questo principio mette in evidenza non esiste il moto assoluto, infatti non è possibile capire mediante osservazioni se sia O a muoversi rispetto a O' o viceversa. Sarà capitato di prendere un treno e di vedere partire il treno affianco, ma subito dirigiamo lo sguardo verso l'altro finestrino per capire chi si è realmente in moto.

Galilei assumeva che le proprietà dello spazio e del tempo fossero le stesse nei due sistemi. Sarà Newton a dare maggior forza a tale uguaglianza introducendo lo spazio assoluto e il tempo assoluto.

III.3 PRINCIPIO DI INERZIA – (I PRINCIPIO)

Il Principio di Inerzia enunciato da Galileo Galilei (1638) afferma: “In un Sistema di Riferimento Inerziale (SRI) un punto materiale libero di muoversi e non soggetto ad azioni esterne mantiene il suo stato di moto, cioè rimane in quiete se è in quiete oppure mantiene il suo moto rettilineo uniforme”. In altre parole, se in un SRI non ci sono azioni esterne che agiscono sul punto materiale, il suo stato di moto non è perturbato.

A prima vista questo principio sembra basarsi su qualcosa non definito, il concetto di sistema di riferimento inerziale. In realtà il primo principio fornisce una ricetta operativa per verificare se un sistema di riferimento è inerziale. Consideriamo ad esempio di sistema di riferimento l'astronave nello spazio in assenza di gravità. Supponiamo che l'astronauta sia in grado di lasciare un oggetto fermo davanti a sé, se esso rimane fermo l'astronave è un sistema inerziale. Ma immaginiamo ora che durante l'esperimento il capitano dell'astronave decida di accendere i propulsori, a causa della brusca accelerazione dell'astronave l'oggetto non rimane fermo, anzi si muoverà in direzione opposta all'accelerazione e andrà a sbattere violentemente contro la parete opposta. Ebbene, in questo caso il principio di inerzia non è soddisfatto, l'astronave accelerata non è un SRI.

Sulla superficie terrestre non abbiamo mai la condizione di oggetto libero di muoversi in assenza di azioni esterne a causa della forza verticale della gravità, ma possiamo realizzare un esperimento ideale per il moto orizzontale. Immagiamo di essere su di un autobus che viaggia con velocità costante su una strada perfettamente asfaltata e perfettamente piana (orizzontale) e, visto che siamo in un mondo ideale, supponiamo che non ci siano neanche le vibrazioni del motore.

Supponiamo ora che un passeggero sia in piedi in equilibrio, senza appigli, sul pavimento dell'autobus costituito da un piano perfettamente liscio senza attrito (come una lastra di ghiaccio). Finché l'autobus viaggia con velocità costante egli riesce a mantenersi in equilibrio, e possiamo affermare che il sistema di riferimento dell'autobus è Inerziale. Ma cosa accade se improvvisamente l'autobus frena? Avete sicuramente sperimentato la spinta che si avverte in avanti verso il conducente e, essendo su una lastra di ghiaccio e non avendo appigli, il passeggero andrebbe inesorabilmente a sbattere contro la parete di fronte. Se una telecamera riprendesse la scena inquadrando solo l'interno dell'autobus vedrebbe un oggetto libero di muoversi (passeggero) che improvvisamente, senza alcuna evidente azione esterna, non mantiene il suo stato di moto, anzi era fermo ed è andato a sbattere sulla parete del conducente.

Il sistema di riferimento accelerato (l'autobus) non è inerziale. In conclusione sono inerziali solo i sistemi non accelerati che viaggiano di moto rettilineo uniforme.

Una conseguenza importante del principio di inerzia e del principio di relatività: se il sistema di riferimento O è inerziale, anche il sistema O' sarà inerziale.

III.4 SECONDO PRINCIPIO – MASSA, FORZA E ACCELERAZIONE

III.4.1 *Effetto dell'azione di una forza sul moto di un p.m.*

Abbiamo visto che in un Sistema di Riferimento Inerziale in assenza di azioni esterne il punto materiale mantiene il suo stato di moto. Ora se nel SRI agiscono delle forze, il secondo principio della dinamica ci permette di valutare qual è l'effetto sul moto.

Il secondo principio fu enunciato da Isaac Newton, il quale mise in relazione tre grandezze: la forza \vec{f} che agisce sul p.m., la quantità di materia che si trova nell'oggetto, che chiamiamo massa inerziale m_i , l'accelerazione \vec{a} del p.m. Egli affermò che se in un SRI agisce una forza, la velocità dell'oggetto cambia, si osserva un'accelerazione proporzionale alla forza e inversamente proporzionale massa inerziale:

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m_i} \quad (\text{III.1})$$

Abbiamo una relazione causa-effetto, la forza è la causa, l'accelerazione, vettore parallelo alla forza, è l'effetto. Questa relazione viene di solito presentata come

$$\vec{f} = m_i \vec{a} \quad (\text{III.2})$$

Se la massa è misurata in chilogrammi, kg, le dimensioni della forza sono date da $(\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2)$, unità che prende il nome di newton (N):

$$\text{N} \equiv \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Si ha che 1 newton è la forza che applicata a un oggetto di massa pari a 1 chilogrammo causa un'accelerazione di 1 metro al secondo, ogni secondo. Se è nota la forza, mediante il II principio ricaviamo l'accelerazione e integrando, note le condizioni iniziali del moto, calcoliamo la velocità, la legge oraria e la traiettoria.

Come detto, il secondo principio si applica al moto di oggetti sottoposti all'azione di forze in un Sistema di Riferimento Inerziale, e le cause del moto possono essere solo le forze che agiscono in natura. Nello studio dei fenomeni fisici si è riusciti a unificare le forze agenti in natura in tre grandi categorie:

- Le forze gravitazionali, di cui abbiamo già parlato, legate alla massa dei corpi, cioè dalla quantità di materia che li compone.
- Le forze elettromagnetiche, dovute all'interazione a livello atomico, dovute principalmente agli elettroni orbitanti intorno al nucleo di un atomo.
- Le forze nucleari che agiscono all'interno del nucleo, lo tengono insieme opponendosi alla repulsione delle forze elettromagnetiche, esse agiscono anche a livello subnucleare

La Fisica è riuscita a scoprire e a descrivere le leggi con cui agiscono queste forze, ma la loro origine rimane un mistero impossibile da sciogliere. E' un dato di fatto, però, che l'insieme di queste forze ha reso possibile la formazione degli atomi, delle molecole, dei processi chimici e biologici, lo sviluppo della vita sul pianeta.

Fa parte dell'esperienza comune sentire l'effetto della gravitazione che attira tutti i corpi verso il suolo. Ci soffermiamo rapidamente sulle forze elettromagnetiche per far presente che queste non riguardano solo i magneti, il campo magnetico terrestre o le onde elettromagnetiche. Esse sono alla base di tutte cosiddette le forze di "contatto". Se un libro non attraversa il tavolo su cui poggia è dovuto alla repulsione elettromagnetica tra gli strati atomici superficiali.

Anche una comune passeggiata non sarebbe possibile senza le forze di attrito che sono di natura elettromagnetica. In conclusione, senza coinvolgere la moderna tecnologia, la nostra vita quotidiana è caratterizzata da una forza gravitazionale che ci spinge sulla superficie della terra e dalle tante forme in cui si manifestano le forze elettromagnetiche. Se a questo aggiungiamo l'energia elettromagnetica che giunge dal sole concludiamo che la nostra specie si è evoluta sotto l'azione dell'elettromagnetismo e della gravità.

III.4.2 Forza gravitazionale, Forza peso, principio di equivalenza

Galilei, mediante i suoi esperimenti sulla caduta dei corpi per gravità, aveva già compreso che se si elimina l'effetto dell'attrito dell'aria tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione pari a una costante che chiamiamo $g=9,81 \text{ m/s}^2$. Nel vuoto, quindi, tutti i corpi cadono verso il suolo con un'accelerazione pari a:

$$a = g \quad (\text{III.3})$$

La legge della gravitazione universale di Newton afferma che due masse gravitazionali M_G e m_G (assimilabili a due punti materiali) si attraggono con una forza che è proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r :

$$\vec{f}_G = -G \frac{M_G m_G}{r^2} \hat{r} \quad (\text{III.4})$$

dove $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$ è la costante di gravitazione universale¹, \hat{r} è il versore della retta che unisce i due punti, il segno meno indica che la forza è attrattiva.

In questa relazione abbiamo deliberatamente indicato con il pedice "G" le masse "gravitazionali", anch'esse rappresentano la quantità di materia presente nei due corpi ma in linea di principio non possiamo affermare che identiche alle masse inerziali. Notiamo, infatti, che le masse gravitazionali sono la causa della forza gravitazionale e hanno una funzione del tutto diversa dalla massa inerziale a cui il II principio attribuisce il compito di stabilire come si muove un corpo sotto l'azione di una qualsiasi forza.

Sulla superficie terrestre il modulo della forza gravitazionale viene indicata come forza peso f_p il cui valore è dato dalla seguente formula:

$$f_p = G \frac{M_T m_G}{R_T^2} \quad (\text{III.5})$$

Dove M_T è la massa gravitazionale della terra, R_T è il raggio (medio) della Terra. Ora, per calcolare con che accelerazione cade un corpo soggetto alla forza peso applichiamo il secondo principio della dinamica:

$$f_p = m_i a \quad (\text{III.6})$$

sostituendo abbiamo:

¹ Misurata da Henry Cavendish nel 1798. Da questa misura fu possibile calcolare la massa della Terra:

$$M_T = g R_T^2 / G = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G \frac{M_T m_G}{R_T^2} = m_i a \quad (\text{III.7})$$

da cui ricaviamo l'accelerazione del corpo:

$$a = G \frac{M_T m_G}{R_T^2 m_i} \quad (\text{III.8})$$

questa accelerazione dipende quindi dalle costanti G , M_T , R_T e dal rapporto m_G/m_i .
Gli esperimenti di Galilei hanno dimostrato che sotto l'azione della forza di gravità tutti i corpi cadono con un'accelerazione pari g , pertanto possiamo affermare che:

$$a = G \frac{M_T m_G}{R_T^2 m_i} \equiv g \quad (\text{III.9})$$

da cui ricaviamo il rapporto tra massa gravitazionale e massa inerziale:

$$\frac{m_G}{m_i} = \frac{g R_T^2}{G M_T} \quad (\text{III.10})$$

tutti i termini a destra dell'equazioni sono costanti, pertanto anche il rapporto tra m_G e m_i deve essere costante per tutti i corpi.

Newton dimostrò con accuratezza, mediante esperimenti con il pendolo, che le due masse sono proporzionali. Questo risultato viene espresso come **principio di equivalenza** tra massa gravitazionale e massa inerziale il cui rapporto è costante per tutti i corpi di qualsiasi sostanza. In base al principio di equivalenza le masse sono considerate equivalenti (di eguale valore e unità di misura) e saranno indicate con lo stesso simbolo:

$$m_i = m_G = m \quad (\text{III.11})$$

Con tale semplificazione otteniamo:

$$a = G \frac{M_T}{R_T^2} = g \quad (\text{III.12})$$

l'accelerazione di gravità misurata da Galilei dipende quindi dalla costante di gravitazione universale, dalla massa e dal raggio della Terra. E' evidente che l'accelerazione di gravità sarà diversa sulla superficie della Luna, dove infatti è pari a $g_L = 1,62 \text{ m/s}^2$.

Questi risultati ci consentono di esprimere la forza peso mediante il prodotto della massa m per l'accelerazione di gravità g :

$$f_p = mg \quad (\text{III.13})$$

che più in generale, considerando che l'accelerazione di gravità ha una direzione e un verso, la forza peso è espressa in forma vettoriale da:

$$\vec{f}_p = m\vec{g} \quad (\text{III.14})$$

III.4.3 **Quantità di moto e Il Principio**

Definiamo quantità di moto la grandezza

$$\vec{q} = m\vec{v} \quad (\text{III.15})$$

le cui unità di misura sono: kg·m/s.

La quantità di moto è una grandezza di cui faremo spesso uso nel prosieguo di queste lezioni, essa porta con sé l'informazione della velocità istantanea di un oggetto e della sua massa inerziale. A parità di velocità la quantità di moto è maggiore per oggetti di massa maggiore. Mediante questa grandezza il II principio di Newton è espresso in una forma più generale:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (\text{III.16})$$

che è valida anche nei sistemi a massa variabile nel tempo $m(t)$, dove risulta:

$$\vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \quad (\text{III.17})$$

Osserviamo che in assenza di forze la quantità di moto si conserva così come prescritto dal principio di inerzia.

III.5 TERZO PRINCIPIO – AZIONE E REAZIONE

Il terzo principio non si inserisce nella dinamica di un singolo punto isolato soggetto a forze esterne, ma riguarda piuttosto le forze con cui interagiscono due corpi. Esso afferma semplicemente che a ogni azione corrisponde un'azione uguale e contraria. Si può comprendere il significato del terzo principio se consideriamo ad esempio l'attrazione gravitazionale tra due corpi, la Terra e la Luna di attraggono reciprocamente con una forza uguale e contraria (la Terra attira la Luna con la stessa forza con cui la Luna attira la Terra).

Consideriamo il caso molto comune di un oggetto fermo su un tavolo, la forza gravitazionale con cui l'oggetto preme sul tavolo è uguale e contraria alla forza con cui il tavolo tiene fermo l'oggetto. Trattandosi di una interazione tra due corpi, il terzo principio si sintetizza nella formula

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} \quad (\text{III.18})$$

III.6 MOTI RELATIVI : SISTEMI INERZIALI

Dati due sistemi di riferimento O e O' , se il sistema di riferimento O è inerziale (SRI), e O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O , per il Principio di Relatività avremo che anche il sistema O' è inerziale, pertanto anche nello studio del moto in O' considereremo solo le forze della natura.

Consideriamo due osservatori O e O' posti nell'origine di due sistemi di riferimento e supponiamo che stiano osservando il moto dello stesso punto materiale. L'osservatore inerziale O individua il punto materiale mediante il vettore posizione $\vec{r}(t)$ mentre l'osservatore O' lo individua mediante il vettore $\vec{r}'(t)$ e ciascuno potrà ricavare la legge oraria nel proprio sistema di riferimento.

Dobbiamo notare che abbiamo implicitamente ipotizzato che il tempo scorra nello stesso modo nei due sistemi di riferimento e i due osservatori hanno lo stesso orologio che misura il tempo. Dalla figura vediamo che vale la seguente relazione tra i vettori posizione:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{oo'}(t) + \vec{r}'(t) \quad (\text{III.19})$$

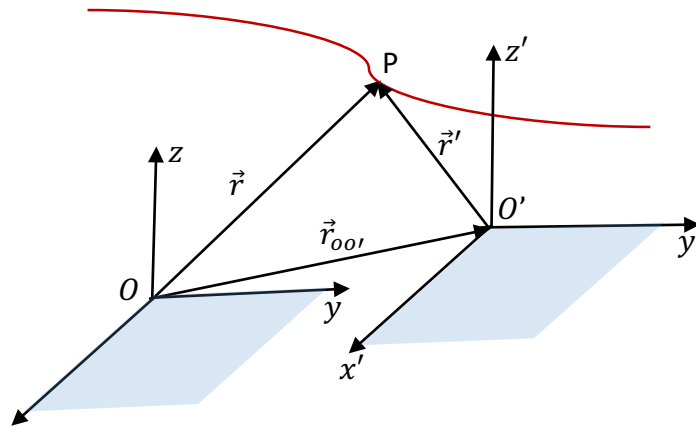


Fig.25, Moti di un punto materiale osservato dai due sistemi di riferimento O e O'

I due osservatori descrivono il moto con due leggi orarie diverse, e diversa sarà anche la traiettoria relativa.

Ora supponiamo che il sistema O' sia in moto rettilineo uniforme rispetto a O , con ciò intendiamo che il sistema O' trasla con velocità costante senza ruotare e che tutti i punti dello spazio O' si muovano con la stessa velocità che chiamiamo velocità di trascinamento \vec{v}_t :
Dalla legge oraria ricaviamo la relazione per le velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_t + \vec{v}'(t) \quad (\text{III.20})$$

dove abbiamo posto $\vec{v}_{oo'}$ = \vec{v}_t . Chiamiamo:

- $\vec{v}(t)$ velocità assoluta del punto materiale nel sistema di riferimento inerziale O
- \vec{v}_t velocità di trascinamento di tutti i punti dello spazio O' rispetto a O . Per gli sviluppi successivi relativi ai sistemi rotanti, facciamo notare che il punto geometrico dello spazio O' occupato dal punto materiale si muove anch'esso con velocità \vec{v}_t .
- $\vec{v}'(t)$ velocità relativa del punto materiale nel sistema di riferimento O' .

Questa relazione è chiamata legge di composizione delle velocità di Galileo.

Procedendo con l'accelerazione, e sapendo che \vec{v}_t è costante, ricaviamo:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) \quad (\text{III.21})$$

dove

- $\vec{a}(t)$ è l'accelerazione assoluta del punto materiale nel sistema di riferimento inerziale O
- $\vec{a}'(t)$ è l'accelerazione relativa del punto materiale nel sistema di riferimento O' .

Ne deduciamo che gli osservatori, nonostante vedano una diversa traiettoria e misurino una diversa velocità, troveranno che il punto materiale si muove con la stessa accelerazione. Ma l'accelerazione assoluta è causata dalle forze della natura, pertanto anche quella relativa sarà causata dalle stesse forze:

$$m\vec{a}(t) = m\vec{a}'(t) = \vec{f} \quad (\text{III.22})$$

possiamo affermare quindi che essendo O un sistema inerziale, anche O' sarà un sistema inerziale.

III.7 MOTI RELATIVI: SISTEMI ACCELERATI NON INERZIALI

Abbiamo già visto nel paragrafo III.3 che i sistemi di riferimento accelerati non sono inerziali. Supponiamo ora che il sistema O' si muova di moto non uniforme, e consideriamo separatamente i casi di moto accelerato dovuto alla traslazione del sistema O' , e di moto accelerato dovuto alla rotazione del sistema O' intorno a un asse.

III.7.1 Sistemi non inerziali (SRNI) accelerati di moto traslatorio

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo III.6 chiamiamo \vec{v}_t e \vec{a}_t la velocità e l'accelerazione di trascinamento dei punti dello spazio O' (e quindi anche del punto geometrico dello spazio occupato dal p.m. in un certo istante t). Le relazioni tra le posizioni, le velocità e le accelerazioni dei due sistemi in questo caso diventano:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_{o'o'}(t) + \vec{r}'(t) \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_t(t) + \vec{v}'(t) \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}_t(t) + \vec{a}'(t)\end{aligned}\quad (\text{III.23})$$

Osserviamo che tutte le grandezze cinematiche posizione, velocità e accelerazione sono diverse per i due osservatori, ma è ancora valida la legge di composizione delle velocità.

In questo caso ci chiediamo se le forze della natura da sole possono giustificare il moto del p.m. osservato in O' . Esprimiamo l'accelerazione in O' :

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_t(t) \quad (\text{III.24})$$

nel sistema O inerziale l'accelerazione assoluta è data da $\vec{f}(t) = m\vec{a}(t)$, dove \vec{f} è la somma delle forze della natura agenti sul p.m., quindi possiamo scrivere:

$$\vec{a}'(t) = \frac{\vec{f}(t)}{m} - \vec{a}_t(t) \quad (\text{III.25})$$

Il risultato è relativamente semplice e atteso: l'accelerazione misurata da O' non dipende solo dalle forze della natura, ma anche dall'accelerazione di trascinamento \vec{a}_t del sistema stesso rispetto a O .

III.7.1.1 Forza apparente di trascinamento.

Consideriamo un autobus con pavimento privo di attrito su cui si trova un passeggero in equilibrio. Improvvisamente l'autobus parte con un'accelerazione pari a \vec{a}_t .

Ora supponiamo che in un angolo dell'autobus ci sia una telecamera che riprende la scena, sul video vedrà il passeggero muoversi con un'accelerazione:

$$\vec{a}'(t) = -\vec{a}_t(t) \quad (\text{III.26})$$

l'osservatore O' sa che il passeggero è fermo in equilibrio tra forza peso e reazione normale, ma non sa che l'autobus ha accelerato (supponiamo di oscurare tutti i vetri), egli penserà che il passeggero abbia subito una spinta (ed effettivamente così sembra anche al passeggero). Sappiamo che ciò non è vero, non c'è stata alcuna spinta, ma chi guarda la scena vede un corpo accelerato, e si chiederà quale forza l'ha spinto. Non essendoci forze reali a causare il moto del passeggero, dedurrà che il sistema di riferimento non è inerziale e non può applicare il II principio. Infatti il moto è governato dalla relazione:

$$\vec{f}(t) - m\vec{a}_t(t) = m\vec{a}'(t) \quad (\text{III.27})$$

Se desideriamo interpretarla come una relazione tra le cause (a sinistra) ed effetto (a destra), la quantità $-m\vec{a}_t(t)$ può essere vista come una causa del moto osservato in O' . Notiamo inoltre che essa ha le dimensioni di una forza e la chiamiamo *forza apparente di trascinamento*:

$$\vec{f}_t(t) = -m\vec{a}_t(t) \quad (\text{III.28})$$

non è una forza reale, ma agisce come una forza, e ci permette di scrivere anche in un sistema di riferimento non inerziale:

$$\vec{f}(t) + \vec{f}_t(t) = m\vec{a}'(t) \quad (\text{III.29})$$

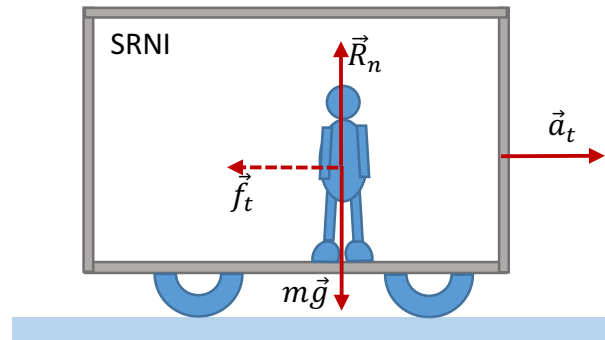


Fig.26, passeggero su un autobus accelerato O'

La somma delle forze, reali e apparenti in un sistema O' , è pari al prodotto della massa per l'accelerazione relativa. In tal modo attraverso l'introduzione delle forze apparenti possiamo continuare ad esprimere la relazione forze-accelerazione nella forma del II Principio, il quale però rimane rigorosamente valido solo nei Sistemi di Riferimento Inerziali.

III.7.2 Sistemi non inerziali (SRNI) accelerati di moto rotatorio

Ci limitiamo in questo caso solo ai moti piani. Assumiamo, inoltre, che $O \equiv O'$, e che il sistema O' ruoti intorno all'asse z in modo tale che l'asse x' rispetto all'asse x formi un angolo che detto angolo di trascinamento $\phi_t(t)$.

Il punto materiale è individuato nel sistema O dalle coordinate:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \phi = \phi(t) \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Osserviamo che essendo $O=O'$ abbiamo l'uguaglianza delle seguenti grandezze:

$$\begin{cases} r(t) = r'(t) \\ \hat{r}(t) = \hat{r}'(t) \\ \hat{\phi}(t) = \hat{\phi}'(t) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Per i due osservatori l'unica differenza, pertanto riguarda, l'angolo:

$$\phi(t) = \phi_t(t) + \phi'(t) \quad (\text{III.32})$$

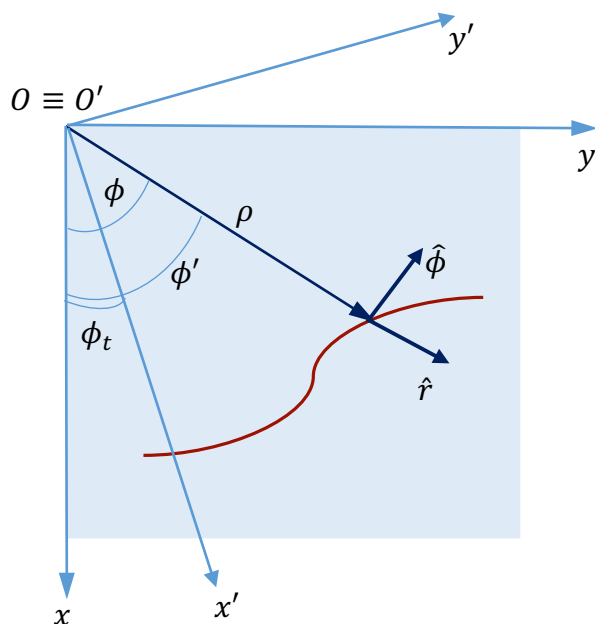


Fig.27, sistemi di riferimento ruotanti

Tutti gli angoli variano nel tempo, e conviene introdurre la velocità angolare vettoriale, parallela all'asse z per ciascuno di essi:

$$\begin{cases} \vec{\omega}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \hat{k} \\ \vec{\omega}'(t) = \frac{d\phi'(t)}{dt} \hat{k} \\ \vec{\omega}_t(t) = \frac{d\phi_t(t)}{dt} \hat{k} \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

Anche per le velocità angolari vale la legge di composizione delle velocità:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_t(t) + \vec{\omega}'(t) \quad (\text{III.34})$$

Analoghe relazioni le ricaviamo per le accelerazioni angolari:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \\ \vec{\alpha}'(t) = \frac{d\vec{\omega}'(t)}{dt} \\ \vec{\alpha}_t(t) = \frac{d\vec{\omega}_t(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}_t(t) + \vec{\alpha}'(t)$$

III.7.2.1 Velocità e accelerazione di trascinamento

Definiamo velocità di trascinamento e l'accelerazione di trascinamento due grandezze cinematiche relative al punto geometrico dello spazio occupato dal punto materiale nell'istante t . Se tutto lo spazio O' è in rotazione con una legge oraria $\phi_t(t)$, anche questo punto geometrico

ruota insieme spazio ed è caratterizzato dalla velocità e dall'accelerazione di trascinamento $\vec{v}_t(t)$ e $\vec{a}_t(t)$ di un moto circolare vario:

$$\begin{cases} \vec{v}_t(t) = r\omega_t(t)\hat{\phi}(t) \\ \vec{a}_t(t) = r\alpha_t(t)\hat{\phi}(t) - r\omega_t^2(t)\hat{r}(t) \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

III.7.2.2 Sistemi non inerziali (SNRI) ruotanti in coordinate polari

Utilizzando le definizioni e relazioni introdotti nel paragrafo precedente studiamo il moto del punto materiale in coordinate polari. Scriviamo innanzitutto l'espressione del vettore posizione nei due sistemi O e O':

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \\ \vec{r}'(t) = r(t)\hat{r}'(t) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

dove sappiamo che i versori $\hat{r}(t) = \hat{r}'(t)$.

Calcoliamo le velocità derivando i vettori posizione; essendo i due versori ruotanti applichiamo le formule di Poisson:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = v_r(t)\hat{r}(t) + r(t)\vec{\omega}(t) \times \hat{r}(t) \\ \vec{v}'(t) = v_r(t)\hat{r}'(t) + r(t)\vec{\omega}'(t) \times \hat{r}'(t) \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Notiamo che le due espressioni differiscono solo per il valore della velocità angolare. Sviluppando il prodotto vettoriale abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = v_r(t)\hat{r}(t) + r(t)\omega(t)\hat{\phi}(t) \\ \vec{v}'(t) = v_r(t)\hat{r}'(t) + r(t)\omega'(t)\hat{\phi}'(t) \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

che, omettendo la dipendenza temporale, riscriviamo in maniera più sintetica nel seguente modo:

$$\begin{cases} \vec{v} = v_r\hat{r} + r\omega\hat{\phi} \\ \vec{v}' = v_r\hat{r}' + r\omega'\hat{\phi}' \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Sostituiamo la relazione $\omega = \omega_t + \omega'$ nell'espressione di \vec{v} :

$$\begin{cases} \vec{v} = v_r\hat{r} + r(\omega_t + \omega')\hat{\phi} \\ \vec{v}' = v_r\hat{r}' + r\omega'\hat{\phi}' \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

da cui ricaviamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_t(t) \quad (\text{III.42})$$

che rappresenta la legge di composizione delle velocità di Galilei, valida anche nei moti relativi di sistemi di riferimento in rotazione.

Per ricavare l'accelerazione, occorre derivare le espressioni della velocità. Tutti i termini sono funzioni del tempo, ma per semplicità ometteremo la dipendenza temporale. Definiamo l'accelerazione radiale:

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} \quad (\text{III.43})$$

deriviamo le velocità, utilizzando le formule di Poisson:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_r \hat{r} + v_r \vec{\omega} \times \hat{r} + v_r \omega \hat{\phi} + r \alpha \hat{\phi} + r \omega \vec{\omega} \times \hat{\phi} \\ \vec{a}' = a'_r \hat{r} + v_r \vec{\omega}' \times \hat{r} + v_r \omega' \hat{\phi} + r \alpha' \hat{\phi} + r \omega' \vec{\omega}' \times \hat{\phi} \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Sviluppando i prodotti vettoriali abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_r - r\omega^2) \hat{r} + (2v_r \omega + r\alpha) \hat{\phi} \\ \vec{a}' = (a'_r - r\omega'^2) \hat{r} + (2v_r \omega' + r\alpha') \hat{\phi} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Sostituendo nella prima $\omega = \omega_t + \omega'$ e $\alpha = \alpha_t + \alpha'$ otteniamo:

$$\begin{cases} \vec{a} = (a_r - r\omega'^2) \hat{r} - r\omega_t^2 \hat{r} - 2r\omega_t \omega' \hat{r} + (2v_r \omega' + r\alpha') \hat{\phi} + (2v_r \omega_t + r\alpha_t) \hat{\phi} \\ \vec{a}' = (a'_r - r\omega'^2) \hat{r} + (2v_r \omega' + r\alpha') \hat{\phi} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

e ricordando l'espressione dell'accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a}_t = r\alpha_t \hat{\phi} - r\omega_t^2 \hat{r} \quad (\text{III.47})$$

otteniamo con alcuni passaggi:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_t - 2r\omega_t \omega' \hat{r} + 2v_r \omega_t \hat{\phi} \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_t - 2\omega_t (r\omega' \hat{r} + v_r \hat{\phi}) \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_t + 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Nel caso di un sistema ruotante, oltre ai tre termini finora incontrati di accelerazione assoluta, trascinamento e relativa, incontriamo un nuovo termine che chiamiamo accelerazione di Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_t \times \vec{v}' \quad (\text{III.49})$$

Per cui la relazione delle accelerazioni diventa:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c \quad (\text{III.50})$$

L'accelerazione nel sistema O' sarà quindi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_c \quad (\text{III.51})$$

III.7.2.3 Sistemi non inerziali ruotanti, forze di trascinamento e forza di Coriolis

Moltiplichiamo per la massa del corpo, abbiamo:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c \quad (\text{III.52})$$

dove $m\vec{a} = \vec{f}$, è il risultante delle forze della natura.

Anche in questo caso l'osservatore O' che si trova su un sistema di riferimento accelerato risconterà la presenza di accelerazioni che non sono dovute alle forze della natura e ne dedurrà che il sistema di riferimento non è inerziale, l'accelerazione \vec{a}' dipende anche da altri due termini cinematici. Separando in maniera fittizia anche in questo caso le cause (sx) e l'effetto (dx), scriviamo:

$$\vec{f} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}' \quad (\text{III.53})$$

Il termine $-m\vec{a}_t(t)$ è anche in questo caso interpretato come una causa e lo chiamiamo forza apparente di trascinamento:

$$\vec{f}_t = -m\vec{a}_t = -m(r\alpha_t\hat{\phi} - r\omega_t^2\hat{r}) \quad (\text{III.54})$$

la seconda causa apparente del moto è chiamata *forza di Coriolis*:

$$\vec{f}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_t \times \vec{v}' \quad (\text{III.55})$$

non sono forze reali, ma in O' agiscono come se fossero forze, e ci permettono di scrivere anche in un sistema di riferimento non inerziale:

$$\vec{f} + \vec{f}_t + \vec{f}_c = m\vec{a}' \quad (\text{III.56})$$

La somma delle forze, reali e apparenti in un sistema O', è pari al prodotto della massa per l'accelerazione relativa. In tal modo attraverso l'introduzione delle forze apparenti possiamo continuare a esprimere la relazione forze-accelerazione nella forma del II Principio, il quale però, ripetiamo, rimane rigorosamente valido solo nei Sistemi di Riferimento Inerziali.

III.7.2.4 Effetti delle forze apparenti nei sistemi ruotanti

Per descrivere il moto nel sistema ruotante O' oltre alle forze della natura consideriamo due forze apparenti di trascinamento e di Coriolis:

$$\begin{aligned} \vec{f}_t(t) &= -m\vec{a}_t(t) = -m(r\alpha_t\hat{\phi} - r\omega_t^2\hat{r}) \\ \vec{f}_c(t) &= -m\vec{a}_c(t) = -2m\vec{\omega}_t \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

Notiamo che:

- La forza di Coriolis agisce solo se il p.m. è in moto relativo rispetto ad O', ovvero se $\vec{v}' \neq 0$
- La forza di trascinamento è composta di due termini, uno legato solo alla rotazione del sistema, che essendo diretta verso l'esterno prende il nome di forza centrifuga:

$$\vec{f}_{centr}(t) = mr\omega_t^2\hat{r} \quad (\text{III.58})$$

- Il secondo termine esiste solo se il sistema ruotante accelera, ed è in direzione opposta al verso dell'accelerazione:

$$\vec{f}_{t\phi}(t) = -mr\alpha_t\hat{\phi} \quad (\text{III.59})$$

- Se il p.m. è fermo su una piattaforma che ruota con velocità costante agisce solo la forza centrifuga.
- Se il p.m. è fermo su una piattaforma ruotante che accelera, occorre considerare anche il secondo termine di trascinamento.
- Se il p.m. è in moto sulla piattaforma ruotante, dovremo considerare la forza di Coriolis.

III.8 LE FORZE DELLA NATURA NEI SRI

Consideriamo un sistema di Riferimento Inerziale O in cui vale il II principio della Dinamica

$$\sum \vec{f} = m\vec{a}$$

L'accelerazione è nota una volta note le forze della natura che agiscono sul punto materiale. Abbiamo già detto che escludendo le forze nucleari, la dinamica dei corpi è dettata dalla forza gravitazionale e dalle forze elettromagnetiche. Avendo già introdotto la forza gravitazionale, ci proponiamo ora di descrivere alcuni modi in cui si manifestano di forze di natura

elettromagnetica. Esamineremo i seguenti casi: reazione vincolare, forze di contatto, tensione in un filo inestensibile, forze elastiche, forze di attrito.

III.8.1 Reazioni Vincolari

III.8.1.1 Oggetto in equilibrio su un piano orizzontale

La reazione vincolare è una forza passiva che limita i gradi di libertà del moto del p.m. Ad esempio, un p.m. appoggiato su un piano orizzontale sotto l'azione della forza peso, rimane in quiete grazie alla reazione normale \vec{R}_n esercitata dalla superficie del tavolo.

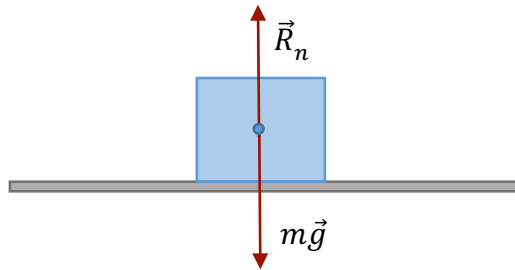


Fig.28, equilibrio di un corpo su un piano orizzontale

Dato che il punto è in quiete, per il II principio abbiamo:

$$\sum \vec{f} = 0$$

cioè

$$m\vec{g} + \vec{R}_n = 0$$

da cui ricaviamo la condizione di statica:

$$\vec{R}_n = -m\vec{g} \quad (\text{III.60})$$

La reazione vincolare in generale dipende dalla dinamica del punto materiale che analizzeremo in dettaglio nei prossimi capitoli.

III.8.1.2 Oggetto su un piano obliquo privo di attrito

Consideriamo un oggetto assimilabile a un punto materiale posto a un'altezza h su un piano obliquo liscio inclinato di un angolo ϑ .

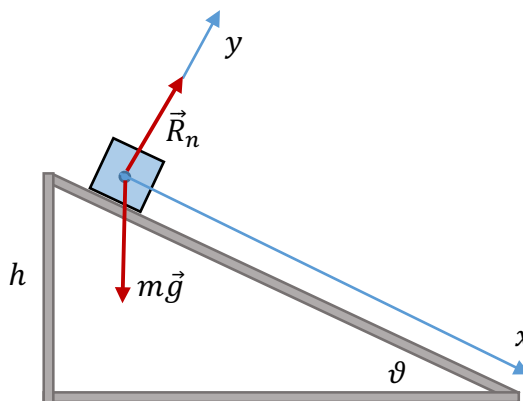


Fig.29, Moto di un punto materiale su un piano inclinato

Sulla massa agiscono due forze, la forza peso e la reazione vincolare. Per studiare il moto dell'oggetto scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'asse x parallelo al piano con origine sulla massa e l'asse y perpendicolare al piano. Applichiamo il II principio e proiettiamo la forza peso sui due assi:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n = m\vec{a} \quad (\text{III.61})$$

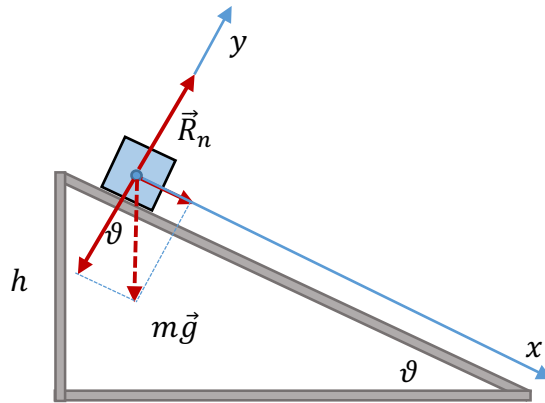


Fig.30, Moto di un punto materiale su un piano inclinato

Tenendo conto che la massa si muove solo sull'asse x , abbiamo:

$$\begin{cases} mg \sin\vartheta = ma_x \\ -mg \cos\vartheta + R_n = 0 \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} a_x = g \sin\vartheta \\ R_n = mg \cos\vartheta \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

L'accelerazione lungo x è costante, si tratta pertanto di un moto rettilineo uniformemente accelerato con condizioni iniziali $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$.

Integrando otteniamo:

$$\begin{cases} v_x(t) = g \sin\vartheta t \\ x(t) = \frac{1}{2} g \sin\vartheta t^2 \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

Per calcolare in quale istante t^* la massa arriva alla fine del piano inclinato, ci serve la lunghezza del piano:

$$L = \frac{h}{\sin\vartheta} \quad (\text{III.65})$$

sostituiamo nella legge oraria, otteniamo:

$$\frac{h}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2} g \sin\vartheta \cdot t^{*2} \quad (\text{III.66})$$

da cui:

$$t^* = \frac{1}{\sin\vartheta} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{III.67})$$

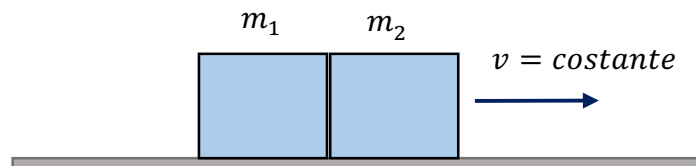
la velocità all'arrivo è:

$$v_x(t^*) = \sqrt{2gh} \quad (\text{III.68})$$

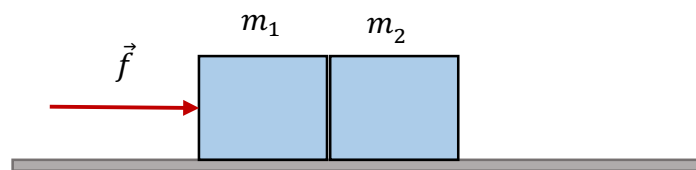
Osserviamo che mentre il tempo t^* si dilata rispetto alla caduta verticale libera, la velocità di arrivo invece non dipende dall'inclinazione (finché si possono trascurare gli attriti).

III.8.2 Forze interne di contatto tra due oggetti

Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 di dimensioni trascurabili che si muovono senza attriti su un piano orizzontale liscio con velocità costante e in assenza di azioni esterne. Se i due corpi sono a contatto, in questa condizione le forze interne tra i due corpi sono nulle.



Supponiamo ora che essi siano spinti da una forza esterna \vec{f} (nota) applicata alla massa m_1 .



La massa m_1 spinge la massa m_2 che si oppone al moto, tra le due masse nascono forze di contatto interne che per il III Principio sono uguali e contrarie $f_{12} = -f_{21}$. Il sistema si muoverà con la stessa accelerazione. Appliciamo il II principio separatamente alle due masse per le componenti orizzontali:

$$\begin{cases} f - f_{21} = m_1 a \\ f_{12} = m_2 a \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

Sommando le due equazioni troviamo:

$$\begin{aligned} f &= (m_1 + m_2)a \\ a &= \frac{f}{(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Le due masse si muovono come se fosse un'unica massa spinta dalla forza f . Sostituendo troviamo l'intensità delle forze interne:

$$f_{12} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} f \quad (\text{III.71})$$

da cui verificiamo che se $f = 0$ le forze interne sono nulle.

III.8.3 Forza peso e tensione del filo, pendolo semplice

Consideriamo un filo inestensibile di massa trascurabile e di lunghezza l con un estremo vincolato, e supponiamo di aver fissato una massa m all'estremo libero. Trascurando l'attrito dell'aria la massa sarà soggetta in questo caso solo alla forza peso $m\vec{g}$ e alla tensione del filo $\vec{\tau}$, di natura elettromagnetica. Quest'ultima è diretta lungo il filo e trattiene la massa su una traiettoria circolare quando è in moto.

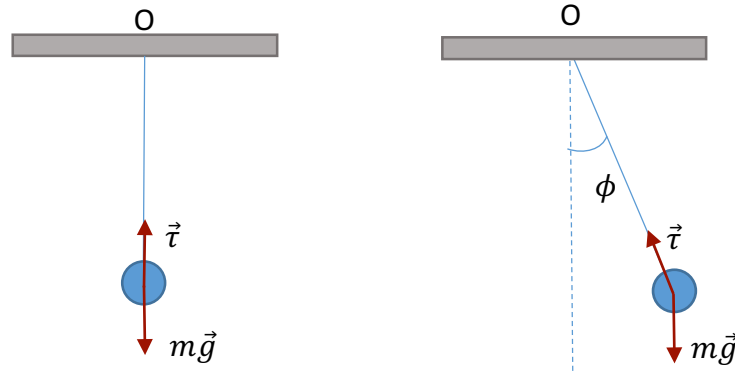


Fig.31, Oscillazioni di un pendolo semplice

Nel caso di equilibrio statico, la massa è ferma, $\phi = 0$, e la somma delle forze deve annullarsi. Sulla massa agiscono la forza peso e la tensione del filo che chiamiamo $\vec{\tau}$:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} = 0 \quad (\text{III.72})$$

da cui si ricava:

$$\vec{\tau} = -m\vec{g} \quad (\text{III.73})$$

Se spostiamo la massa dalla posizione verticale, si vede chiaramente che le due forze non sono in equilibrio e si sommano in modo tale da riportare la massa nella posizione verticale. Questa forza di richiamo causa un moto oscillatorio che, per piccoli angoli, è descritto dal moto armonico.

Per studiare il moto della massa, applichiamo il II principio:

$$m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a} \quad (\text{III.74})$$

trattandosi di un moto su di una traiettoria circolare di raggio l , utilizziamo le coordinate polari e proiettiamo l'equazione vettoriale sui due versori \hat{r} e $\hat{\phi}$:

$$\begin{cases} mg \cos\phi - \tau = ma_r \\ -mg \sin\phi = ma_\phi \end{cases} \quad (\text{III.75})$$

Per un moto circolare abbiamo trovato le seguenti espressioni cinematiche per le componenti dell'accelerazione:

$$\begin{cases} a_r = -\omega^2 l \\ a_\phi = a l \end{cases} \quad (\text{III.76})$$

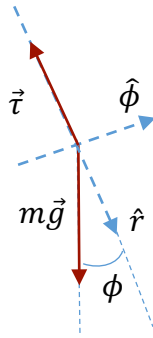


Fig.31, scomposizione delle forze in coordinate polari

sostituendo dalla seconda equazione otteniamo:

$$-mg \sin\phi = mal \quad (\text{III.77})$$

da cui, semplificando la massa, e ricordando la definizione dell'accelerazione angolare, ricaviamo:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\phi = 0 \quad (\text{III.78})$$

che rappresenta l'equazione differenziale generale per le oscillazioni di un pendolo. Non abbiamo sufficienti strumenti matematici per discutere la soluzione generale, però possiamo ricavare una soluzione approssimata se le oscillazioni avvengono per piccoli angoli, tali che:

$$\sin\phi \approx \phi \quad (\text{III.79})$$

In tal caso, infatti, l'equazione diventa:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \phi = 0 \quad (\text{III.80})$$

che abbiamo incontrato nello studio del moto armonico. In effetti, le piccole oscillazioni del pendolo sono armoniche e l'angolo varia secondo la legge oraria:

$$\phi(t) = \phi_M \sin(\Omega t + \vartheta) \quad (\text{III.81})$$

La pulsazione si ricava da:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (\text{III.82})$$

E il periodo è pari a

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{III.83})$$

Il periodo dell'oscillazione non dipende dalla massa dipende esclusivamente dalla lunghezza del filo e dall'accelerazione di gravità. Dall'osservazione di tale proprietà Newton trovò conferma dell'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

Le altre due costanti, ampiezza ϕ_M , e fase iniziale ϑ , si possono calcolare una volta fissate le condizioni iniziali del moto in $t = 0$:

$$\begin{cases} \phi_0 \\ \omega_0 \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Derivando la funzione $\phi(t)$ ricaviamo la velocità angolare:

$$\begin{cases} \phi(t) = \phi_M \sin(\Omega t + \vartheta) \\ \omega(t) = \Omega \phi_M \cos(\Omega t + \vartheta) \end{cases} \quad (\text{III.85})$$

Che calcolate nell'istante $t = 0$ danno:

$$\begin{cases} \phi_0 = \phi_M \sin \vartheta \\ \omega_0 = \Omega \phi_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

Abbiamo un sistema di due equazioni (non lineari) con due incognite, per trovare la soluzione procediamo come segue. Riscriviamo

$$\begin{cases} \phi_0 = \phi_M \sin \vartheta \\ \frac{\omega_0}{\Omega} = \phi_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

Eleviamo entrambe le equazioni al quadrato e sommiamo, otteniamo:

$$\phi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 = \phi_M^2 \quad (\text{III.88})$$

da cui:

$$\phi_M = \sqrt{\phi_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2} \quad (\text{III.89})$$

Per quanto riguarda la fase iniziale, una volta nota l'ampiezza, essa può ricavata da una delle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sin \vartheta = \frac{\phi_0}{\phi_M} \\ \cos \vartheta = \frac{\omega_0}{\Omega \phi_M} \\ \tan \vartheta = \frac{\phi_0 \Omega}{\omega_0} \end{cases} \quad (\text{III.90})$$

La tensione del filo τ è una forza passiva che dipende dal moto. Infatti dalla prima equazione ricaviamo:

$$\tau = m(g \cos \phi + \omega^2 l) \quad (\text{III.91})$$

Come c'era da attendersi la tensione dipende, oltre che dalla forza peso, dalla posizione e dalla velocità dell'oggetto in oscillazione. Un'espressione della tensione in funzione del tempo nella presente trattazione può essere ottenuta solo nell'approssimazioni di oscillazioni armoniche per piccoli angoli.

III.8.4 Forze elastiche, sistema massa molla senza attriti

III.8.4.1 Forze elastiche, legge di Hooke

Tutti i corpi si deformano quando sono sottoposti all'azione di una forza esterna che può produrre tre effetti principali: a) cessata l'azione della forza il corpo riprende la sua forma originaria, in tal caso parliamo di deformazioni elastiche; b) cessata l'azione il corpo rimane deformato, parliamo allora di deformazioni plastiche; c) la struttura del corpo cede rompendosi in tal caso diciamo che la forza supera il valore limite di rottura.

L'elasticità trova spiegazioni, a livello microscopico, nella variazione della distanza tra gli atomi sotto l'azione della forza esterna, che produce a livello macroscopico la deformazione del corpo. Nel materiale si accumula un'energia che viene rilasciata completamente se la forza non supera un valore limite detto *limite di elasticità*. Il modello matematico più semplice di rappresentazione del comportamento elastico è quello lineare della legge di Hooke: l'allungamento (o accorciamento) subito da un corpo elastico è direttamente proporzionale alla forza ad esso applicata, la costante di proporzionalità viene detta costante elastica k che dipende dalla natura del materiale. Il modello classico di elasticità lineare è la *molla perfetta* o *ideale*, cioè una molla priva di massa, in assenza di fenomeni dissipativi interni.

Consideriamo una molla ideale di lunghezza l_0 a riposo, e supponiamo di vincolare un estremo, mentre l'altro estremo è libero, e supponiamo che sulla molla non agiscano forze esterne. Scegliamo ora un sistema di riferimento formato dall'asse x con origine nell'estremo libero della molla.

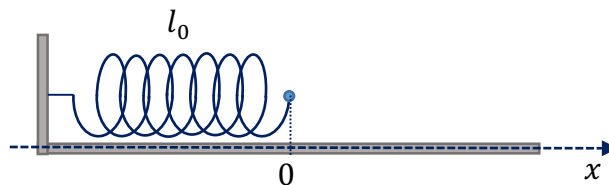


Fig.32, una molla ideale di lunghezza l_0 a riposo

Se allunghiamo la molla con una forza esterna \vec{f}_{ext} , per la legge di Hooke la molla reagisce con una forza elastica di richiamo proporzionale alla deformazione:

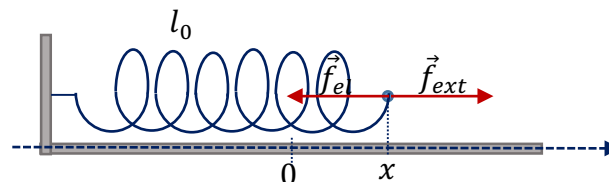


Fig.33, molla deformata da una forza esterna \vec{f}_{ext}

$$\vec{f}_{el} = -kx\hat{i} \quad (\text{III.92})$$

Nota che la coordinata x dell'estremo libero dà la misura della deformazione della molla, positiva se è allungata, negativa se è compressa. La costante k è misurata in N/m.

III.8.4.2 Oscillazioni armoniche del sistema massa molla

Consideriamo ora un sistema meccanico ideale composto da una massa m (che assumiamo puntiforme) collegata all'estremo libero della molla. Se la massa è spostata dalla posizione di equilibrio, su di essa agirà la forza elastica di richiamo proporzionale allo spostamento x .

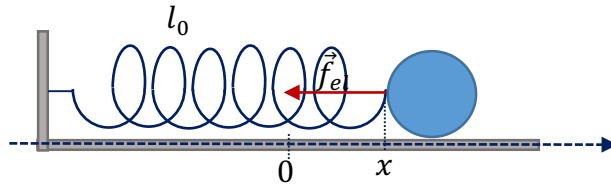


Fig.34, Sistema massa-molla ideale

Applichiamo il II Principio della dinamica in assenza di attriti abbiamo:

$$\vec{f}_{el} = m\vec{a} \quad (\text{III.93})$$

e proiettiamo sull'asse x :

$$-kx = ma_x \quad (\text{III.94})$$

esplicitiamo l'accelerazione come derivata seconda della posizione, e ricaviamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (\text{III.95})$$

Riconosciamo che si tratta dell'equazione differenziale del moto armonico, la cui soluzione generale è:

$$x(t) = x_M \sin(\Omega t + \theta) \quad (\text{III.96})$$

dove la pulsazione è:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{III.97})$$

e il periodo si ricava da:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{III.98})$$

Abbiamo visto che l'ampiezza e la fase dipendono dalle condizioni iniziali x_0, v_0 . Ripetiamo qui il procedimento adottato per il pendolo semplice. Dalla legge oraria ricaviamo la velocità:

$$\begin{cases} x(t) = x_M \sin(\Omega t + \vartheta) \\ v(t) = \Omega x_M \cos(\Omega t + \vartheta) \end{cases} \quad (\text{III.99})$$

Sostituiamo i valori in $t = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = x_M \sin \vartheta \\ v_0 = \Omega x_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{III.100})$$

Abbiamo un sistema di due equazioni (non lineari) con due incognite che risolviamo come segue:

$$\begin{cases} x_0 = x_M \sin \vartheta \\ \frac{v_0}{\Omega} = x_M \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{III.101})$$

Eleviamo entrambe le equazioni al quadrato e sommiamo, otteniamo:

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2 = x_M^2 \quad (\text{III.102})$$

da cui:

$$x_M = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega}\right)^2} \quad (\text{III.103})$$

Per quanto riguarda la fase iniziale, una volta nota l'ampiezza, essa può ricavata da una delle seguenti equazioni:

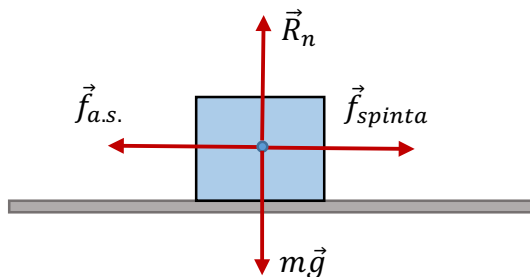
$$\begin{cases} \sin \vartheta = \frac{x_0}{x_M} \\ \cos \vartheta = \frac{v_0}{\Omega x_M} \\ \tan \vartheta = \frac{x_0 \Omega}{v_0} \end{cases} \quad (\text{III.104})$$

III.8.5 Forze di attrito

Finora abbiamo considerato il moto di oggetti su superfici ideali perfettamente lisce e nel vuoto. In queste condizioni ideali se un oggetto è lanciato con una data velocità su una superficie orizzontale esso continua a viaggiare con velocità costante perché nessuna forza si oppone al moto. Nella realtà superfici perfettamente lisce non esistono, per quanto fine sia la levigatura rimane una rugosità superficiale e il piano si dice *scabro*. L'oggetto stesso avrà una superficie scabra, e se lo lanciamo su un piano reale il suo moto rallenterà a causa di forze di attrito dovute al contatto tra le superfici. Le forze di attrito hanno un effetto sia sulla statica sia sulla dinamica dei corpi.

III.8.5.1 Forze di attrito statico, valore limite

L'esperienza ci insegna che quando spingiamo un oggetto fermo su una superficie orizzontale, non riusciamo a spostarlo finché non raggiungiamo un valore minimo della forza di spinta \vec{f}_{spinta} . Questo accade perché la forza di attrito si oppone alla spinta. In questo caso parliamo di forze di attrito statico $\vec{f}_{a.s.}$. Finché la spinta non supera tale limite il corpo rimane fermo e la forza di attrito è uguale e contraria alla forza di spinta.



La forza di attrito statico $\vec{f}_{a.s.}$ non ha quindi un valore definito, ma varia tra zero e un valore massimo, oltre il quale il corpo si mette in moto. Si osserva sperimentalmente che il valore massimo dipende dalla forza con cui il corpo è spinto sulla superficie e da un coefficiente di attrito statico μ_s . Per generalizzare al caso di superfici oblique, la spinta sul piano è calcolata tramite la reazione normale $|\vec{R}_n|$ e il limite massimo della forza d'attrito è espressa da:

$$|\vec{f}_{a.s.}| \leq \mu_s |\vec{R}_n| \quad (\text{III.105})$$

Il valore di μ_s dipende dal materiale e dalle caratteristiche delle superfici di contatto.

III.8.5.2 Forze di attrito statico su un piano inclinato

Consideriamo di nuovo il problema del piano inclinato. Una massa appoggiata sul piano può essere bloccata dalla forza di attrito statico e rimane ferma sul piano. E' facile sperimentare che se innalziamo l'angolo ϑ oltre un valore limite, la forza di attrito non è più in grado di bloccare la massa la quale si mette in moto. Vogliamo calcolare questo angolo limite ϑ_{lim} .

Applichiamo di nuovo il II Principio imponendo la condizione di statica:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_{a.s.} = 0 \quad (\text{III.106})$$

proiettiamo le forze sugli assi cartesiani

$$\begin{cases} mg \sin\vartheta - f_{a.s.} = 0 \\ -mg \cos\vartheta + R_n = 0 \end{cases} \quad (\text{III.107})$$

da cui ricaviamo le due forze incognite passive:

$$\begin{cases} f_{a.s.} = mg \sin\vartheta \\ R_n = mg \cos\vartheta \end{cases} \quad (\text{III.108})$$

Finché è verificata la condizione

$$|\vec{f}_{a.s.}| \leq \mu_s |\vec{R}_n| \quad (\text{III.109})$$

la massa rimane ferma. Quando arriviamo all'angolo limite ϑ_{lim} la forza di attrito raggiunge il suo valore massimo,

$$\begin{cases} \mu_s R_n = mg \sin\vartheta_{lim} \\ R_n = mg \cos\vartheta_{lim} \end{cases} \quad (\text{III.110})$$

dividendo membro a membro otteniamo:

$$\mu_s = \tan\vartheta_{lim} \quad (\text{III.111})$$

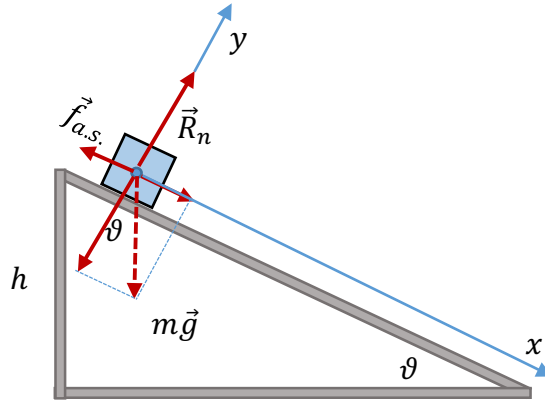


Fig.35, Massa in equilibrio su un piano inclinato con attrito

questa formula ci permette di misurare il coefficiente di attrito statico mediante una semplice esperienza con il piano inclinato oppure, se è noto α_s possiamo ricavare ϑ_{lim} :

$$\vartheta_{lim} = \arctan \mu_s \quad (III.112)$$

III.8.5.3 Forze di attrito cinematico

Quando viene superato il limite della forza di attrito statico, la massa si muove strisciando sul piano scabro, ed è soggetta a un'azione contrastante il moto che prende il nome di *attrito cinematico* (o dinamico). Questa forza ha un valore definito che dipende dalle caratteristiche delle superfici a contatto mediante un coefficiente di attrito cinematico α_c :

$$\vec{f}_{a.c.} = -\mu_c |\vec{R}_n| \hat{v} \quad (III.113)$$

dove \hat{v} è il versore della velocità. Sperimentalmente risulta $\alpha_c < \alpha_s$.

Studiamo il moto della massa sul piano inclinato. Applichiamo il II Principio:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_{a.c.} = m\vec{a} \quad (III.114)$$

e proiettiamo sugli assi cartesiani:

$$\begin{cases} mg \sin\vartheta - \mu_c R_n = ma_x \\ -mg \cos\vartheta + R_n = 0 \end{cases} \quad (III.115)$$

Ricaviamo R_n dalla seconda equazione e sostituiamo nella prima:

$$mg \sin\vartheta - \mu_c mg \cos\vartheta = ma_x \quad (III.116)$$

da cui:

$$a_x = g(\sin\vartheta - \mu_c \cos\vartheta) \quad (III.117)$$

Si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato in cui vediamo che la forza di attrito rallenta il moto:

$$\begin{cases} v_x(t) = g(\sin\vartheta - \mu_c \cos\vartheta) t \\ x(t) = \frac{1}{2} g(\sin\vartheta - \mu_c \cos\vartheta) t^2 \end{cases} \quad (\text{III.118})$$

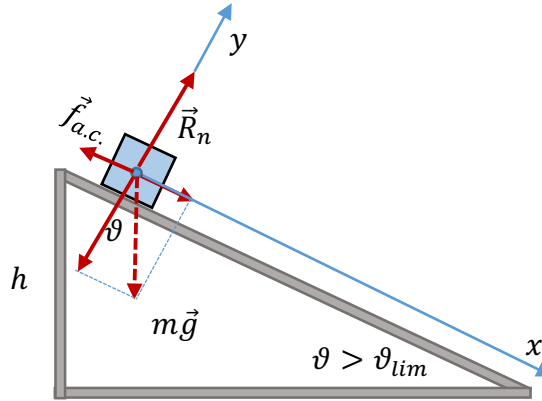


Fig.35, Massa che striscia su un piano inclinato con attrito cinematico

Il tempo t^* necessario alla massa per percorrere tutta la lunghezza $L = h/\sin\vartheta$ si ricava da:

$$\frac{h}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2} g(\sin\vartheta - \mu_c \cos\vartheta) t^{*2} \quad (\text{III.119})$$

da cui

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g \sin\vartheta (\sin\vartheta - \mu_c \cos\vartheta)}} \quad (\text{III.120})$$

III.8.5.4 Forze di attrito viscoso

Il moto di un corpo che si muove gas o in un liquido è rallentato a causa degli urti con le molecole. In generale parliamo di forza di *resistenza del mezzo* la cui intensità dipende dalle proprietà del mezzo in cui il corpo si muove, dalla velocità e dalla sua forma. Se la forza di attrito è proporzionale alla velocità parliamo di *forza di attrito viscoso* data da:

$$\vec{f}_{a.v.} = -b\vec{v} \quad (\text{III.121})$$

La costante b , che dipende dalle proprietà del mezzo e dalla forma del corpo, è misurata in Ns/m.

Supponiamo ora di far cadere da una data altezza h un oggetto inizialmente fermo in un mezzo viscoso, e assumiamo che sia nota la costante b . Le forze che agiscono sono la forza peso e la forza di attrito, entrambe dirette nella direzione verticale. Appliciamo il II principio

$$m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} \quad (\text{III.122})$$

e proiettiamo sull'asse y :

$$-mg - bv_y = ma_y \quad (\text{III.123})$$

Osserviamo che l'accelerazione non è data da una funzione esplicita del tempo ma dipende dalla velocità. Ci troviamo di fronte a una equazione differenziale che esprimiamo come segue:

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{b}{m}v_y = -g \quad (\text{III.124})$$

Non abbiamo ancora incontrato questo tipo di equazione e dobbiamo imparare a risolverla. Osserviamo innanzitutto che quando forza peso e forza di attrito sono in equilibrio, la velocità del corpo è costante (la sua derivata è nulla) e raggiunge un valore limite:

$$v_y^{lim} = -\frac{mg}{b} \quad (\text{III.125})$$

L'equazione differenziale può essere risolta con il metodo della separazione delle variabili. Dovendo trovare la soluzione $v_y(t)$ il metodo consiste nel separare le variabili velocità e tempo.

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{b}{m}\left(\frac{mg}{b} + v_y\right) \quad (\text{III.126})$$

per cui riscriviamo l'equazione come segue:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v_y - v_y^{lim}) \quad (\text{III.127})$$

a questo punto separiamo le variabili:

$$\frac{dv_y}{(v_y - v_y^{lim})} = -\frac{dt}{\tau} \quad (\text{III.128})$$

integriamo entrambi i membri tra l'istante iniziale e il generico istante t :

$$\int_{v_0}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{(v_y - v_y^{lim})} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad (\text{III.129})$$

otteniamo:

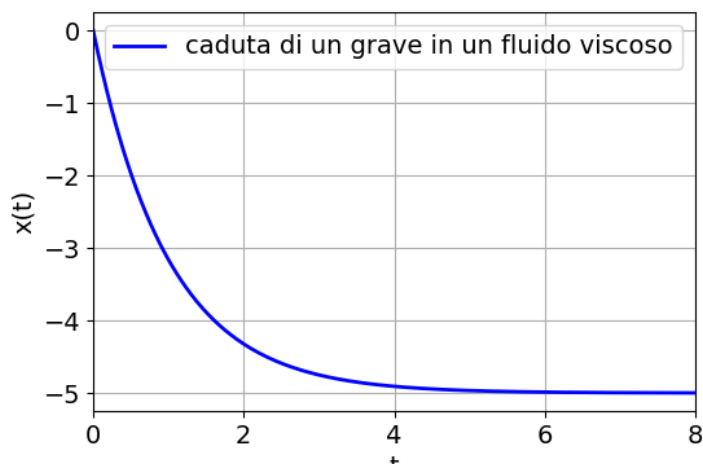
$$\ln \left[\frac{v_y(t) - v_y^{lim}}{(v_0 - v_y^{lim})} \right] = -\frac{t}{\tau} \quad (\text{III.130})$$

risolvendo per l'argomento del logaritmo troviamo:

$$\left[\frac{v_y(t) - v_y^{lim}}{(v_0 - v_y^{lim})} \right] = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{III.131})$$

da cui si ricava facilmente la soluzione generale:

$$v_y(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + v_y^{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (\text{III.132})$$



Andamento della velocità nel tempo per un corpo in caduta in un fluido viscoso

Nell'esempio in figura riportiamo il caso di un grave che cade da fermo raggiunge la velocità limite di -5 m/s e $\tau = 1$ s. Notiamo che la velocità limite si raggiunge tipicamente in un tempo pari a circa 5τ .

III.9 LE FORZE REALI E APPARENTI NEI SRNI

In questo paragrafo analizziamo il moto di una massa visto da un osservatore che si trova in un sistema di riferimento O' non inerziale, in moto rettilineo accelerato oppure in rotazione.

III.9.1 Sistemi in moto traslatorio accelerato

Abbiamo già visto nel paragrafo II.7.1 che un osservatore in un sistema di riferimento con accelerazione \vec{a}_t oltre alle forze naturali può descrivere il moto con utilizzare le forze apparenti di trascinamento:

$$\vec{f}(t) + \vec{f}_t(t) = m\vec{a}'(t) \quad (\text{III.133})$$

dove

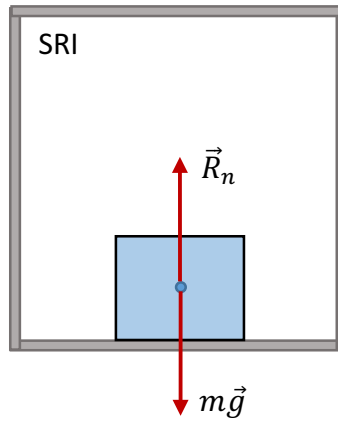
$$\vec{f}_t(t) = -m\vec{a}_t \quad (\text{III.134})$$

Analizziamo ora alcuni esempi.

III.9.1.1 Peso apparente

Consideriamo un SRI costituito da un ambiente chiuso (si pensi a un ascensore) fermo o in moto uniforme. Una massa m appoggiata sul pavimento è ferma sotto l'azione della forza peso $m\vec{g}$ e della reazione normale \vec{R}_n . Quando effettuiamo una misura di peso su una bilancia, di fatto misuriamo la forza con cui la massa spinge il piatto della bilancia. L'osservatore inerziale O) applica il II Principio e scrive:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n = 0$$



Equilibrio delle forze su una massa in un sistema inerziale

Essendo le due forze verticali proiettiamo su tale asse, ricaviamo per la reazione normale:

$$R_n = mg$$

La reazione normale è pari alla forza peso.

Ora assumiamo che in un dato istante l'ascensore si metta in moto con un'accelerazione \vec{a}_t verticale (con accelerazione positiva se è accelerato verso l'alto). Nel SRNI scriviamo:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t = 0$$

dove

$$\vec{f}_t(t) = -m\vec{a}_t$$

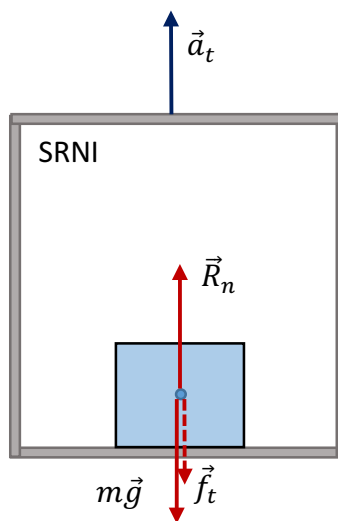


Fig.36, Equilibrio delle forze su una massa in un ascensore accelerato

Tutte le forze sono verticali per cui, proiettando sull'asse y , possiamo scrivere la seguente equazione scalare:

$$R_n - mg - ma_t = 0$$

Da cui ricaviamo:

$$R_n = m(g + a_t)$$

La reazione normale misura la spinta complessiva sul pavimento e quindi il peso apparente. Se $a_t > 0$ il peso apparente aumenta (ascensore che parte in salita o si arresta in discesa), se $a_t <$

0 il peso apparente diminuisce (ascensore che si arresta in salita o parte in discesa). Vediamo che se $a_t = -g$ (moto in caduta libera) la reazione normale è nulla e nel SRNI si percepisce l'assenza di peso.

In conclusione nel SRNI con accelerazione verticale i corpi sono soggetti a un'accelerazione di gravità "apparente" pari a:

$$g' = g + a_t$$

III.9.1.2 Statica di un corpo appoggiato sul ripiano di un mezzo accelerato

Un altro caso interessante riguarda la statica di corpi su mezzi in moto accelerato orizzontale, ad esempio un oggetto appoggiato sul ripiano di un autocarro. Anche in questo caso per descrivere il moto dell'oggetto nel SRNI faremo uso della forza apparente di trascinamento. Vogliamo analizzare innanzitutto quali sono le condizioni affinché l'oggetto rimanga fermo sul piano scabro con coefficiente di attrito statico α_s noto.

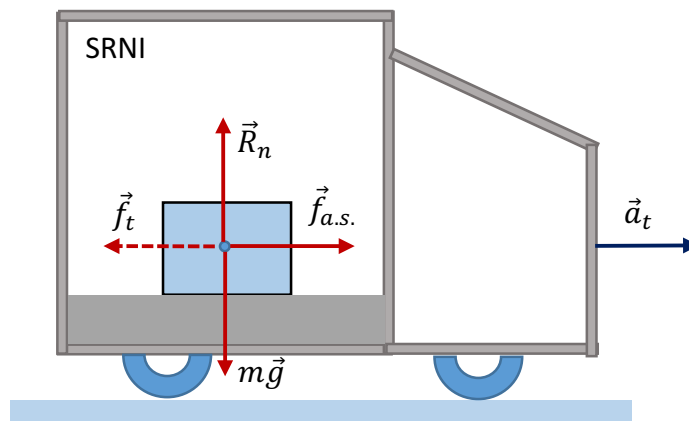


Fig.37, Massa su un piano scabro di un autocarro accelerato

Nel SRNI l'oggetto rimane fermo se la somma delle forze è pari a zero:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t + \vec{f}_{a.s.} = 0$$

dove

$$\vec{f}_t(t) = -m\vec{a}_t$$

Proiettiamo l'equazione vettoriale sugli assi x, y :

$$\begin{cases} -ma_t + f_{a.s.} = 0 \\ R_n - mg = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che affinché il corpo resti in quiete, la forza di attrito si deve opporre alla forza di trascinamento. Ricaviamo le forze incognite:

$$\begin{cases} f_{a.s.} = ma_t \\ R_n = mg \end{cases}$$

Ora ci chiediamo qual è la massima accelerazione dell'automezzo affinché il corpo rimanga fermo. Sappiamo che questa condizione si ottiene quando l'attrito statico raggiunge il suo massimo valore:

$$|\vec{f}_{a.s.}| \leq \mu_s |\vec{R}_n|$$

sostituendo

$$ma_t \leq \mu_s mg$$

l'oggetto rimane fermo se

$$a_t \leq \mu_s g$$

III.9.1.3 Statica di un corpo appoggiato sulla parete verticale di un mezzo accelerato

Consideriamo ora il caso di un corpo appoggiato sulla parete verticale con attrito μ_s mentre l'automezzo accelera. Nel SRNI, oltre alla forza peso, la reazione normale e la forza di attrito, agisce la forza di trascinamento che spinge l'oggetto verso la parete.

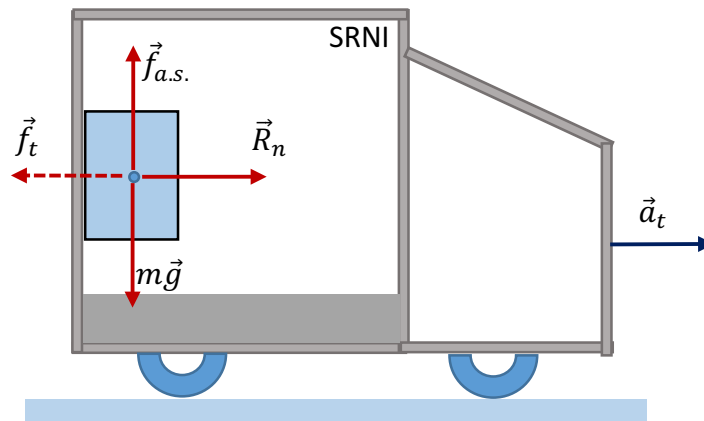


Fig.38, Massa su una parete verticale scabra di un autocarro accelerato

Il corpo rimane fermo se la somma delle forze è pari a zero:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t + \vec{f}_{a.s.} = 0$$

Proiettiamo come nel caso precedente l'equazione sugli assi x, y :

$$\begin{cases} f_{a.s.} - mg = 0 \\ R_n - ma_t = 0 \end{cases}$$

Il corpo non scivola in basso se la forza di attrito è maggiore della forza peso. Sappiamo che per la forza di attrito vale:

$$f_{a.s.} \leq \mu_s R_n$$

sostituendo:

$$mg \leq \mu_s ma_t$$

da cui ricaviamo:

$$a_t \geq \frac{g}{\mu_s}$$

III.9.1.4 Dinamica di un pendolo su un ascensore accelerato con a_t costante

Abbiamo visto che in un ascensore accelerato si sperimenta un peso apparente pari a

$$g' = g + a_t$$

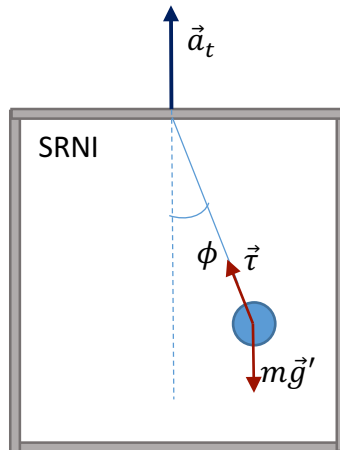


Fig.39, Pendolo semplice in un ascensore accelerato

Tutto lo studio già sviluppato per il pendolo in un SRI si può ripetere in questo caso sostituendo g' a g , la legge oraria per piccole oscillazioni diventa:

$$\phi(t) = \phi_M \sin(\Omega' t + \vartheta)$$

con

$$\Omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}}$$

Notiamo che se $g' = 0$, cioè in assenza di peso, il periodo $T \rightarrow \infty$, il pendolo non oscilla, e se la massa è inizialmente in quiete rimane ferma.

III.9.1.5 Caduta di un oggetto in quiete in un sistema accelerato con a_t costante.

Consideriamo una massa m che cade da fermo in un vano di un mezzo in moto con accelerazione costante \vec{a}_t . Quale moto vede un osservatore all'interno dell'automezzo?

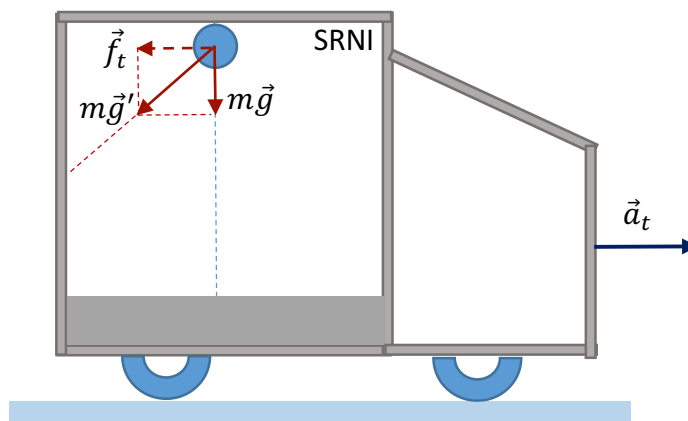


Fig.40, Caduta di un grave in un sistema accelerato

Applichiamo la relazione tra forze e accelerazione nel SRNI:

$$m\vec{g} - m\vec{a}_t = m\vec{a}'$$

da cui

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_t$$

proiettando

$$\begin{cases} a'_x = -a_t \\ a'_y = -g \end{cases}$$

ricaviamo:

$$a' = \sqrt{a_t^2 + g^2}$$

Che è pari all'accelerazione di gravità apparente

$$g' = \sqrt{a_t^2 + g^2}$$

Nel SRNI i corpi avvertono un'accelerazione di gravità apparente di intensità maggiore e inclinata rispetto alla verticale. Calcoliamo la traiettoria, dalla velocità

$$\begin{cases} v'_x = -a_t t \\ v'_y = -gt \end{cases}$$

ricaviamo la legge oraria

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2} a_t t^2 \\ y' = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

e l'equazione della traiettoria:

$$y' = \left(\frac{g}{a_t}\right) x'$$

la massa si muove lungo una linea retta inclinata con coefficiente angolare (g/a_t) .

III.9.1.6 Moto di una massa su un piano inclinato scabro accelerato con a_t costante.

Consideriamo di nuovo il caso di un piano scabro inclinato con una massa inizialmente ferma, abbiamo visto in un SRI che se l'angolo di inclinazione supera l'angolo limite, il corpo scivola con un moto dettato dalla forza peso e dalla forza di attrito cinematico. Se il piano è accelerato verso destra con accelerazione a_t la spinta sul piano aumenta in virtù dell'azione della forza di trascinamento, con un corrispondente aumento della reazione normale e della forza di attrito. Calcoliamo per quale valore minimo dell'accelerazione è verificata la condizione di equilibrio.

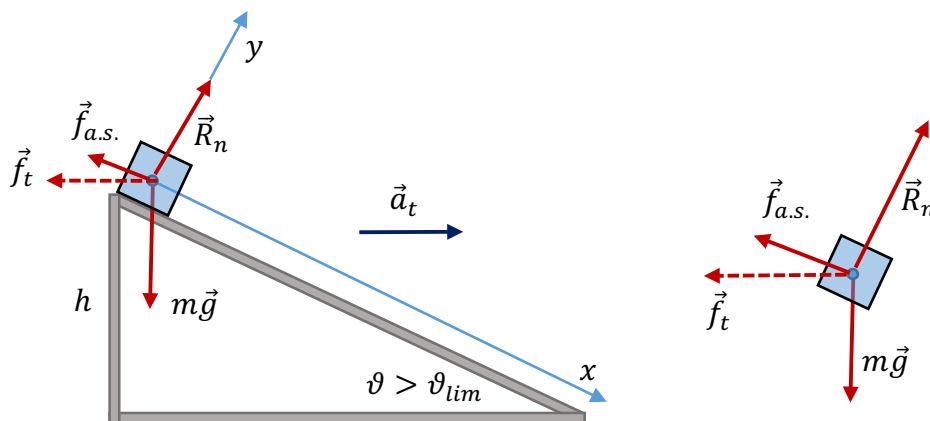


Fig.41, Equilibrio di una massa su un piano scabro inclinato accelerato

Studiamo l'equilibrio della massa sul piano inclinato. Applichiamo il II Principio:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_{a.s.} + \vec{f}_t = m\vec{a}' = 0$$

Proiettiamo sugli assi cartesiani:

$$\begin{cases} mg \sin\vartheta + f_{a.s.} + f_t \cos\vartheta = 0 \\ -mg \cos\vartheta + R_n + f_t \sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{a.s.} = -mg \sin\vartheta - f_t \cos\vartheta \\ R_n = mg \cos\vartheta - f_t \sin\vartheta \end{cases}$$

Il valore minimo dell'accelerazione di avrà quando la forza di attrito raggiunge il valore massimo.

$$\begin{cases} -\mu_s R_n = -mg \sin\vartheta + ma_t \cos\vartheta \\ R_n = mg \cos\vartheta + ma_t \sin\vartheta \end{cases}$$

$$-\mu_s mg \cos\vartheta - \mu_s ma_t \sin\vartheta = -mg \sin\vartheta + ma_t \cos\vartheta$$

$$-\mu_s g \cos\vartheta - \mu_s a_t \sin\vartheta = -g \sin\vartheta + a_t \cos\vartheta$$

$$a_t (\cos\vartheta + \mu_s \sin\vartheta) = g (\sin\vartheta + \mu_s \cos\vartheta)$$

$$a_t = g \frac{(\sin\vartheta + \mu_s \cos\vartheta)}{(\cos\vartheta + \mu_s \sin\vartheta)}$$

III.9.2 Sistemi di riferimento non inerziali in moto rotatorio

Consideriamo ora sistemi di riferimento non inerziali in rotazione. Consideriamo in particolare le condizioni di statica in cui la forza di Coriolis è nulla.

III.9.2.1 Statica di un corpo appoggiato una piattaforma ruotante con ω_t costante

Consideriamo una piattaforma circolare in rotazione con velocità angolare ω_t costante, su di essa è appoggiato un oggetto di massa m a una distanza r dall'asse di rotazione.

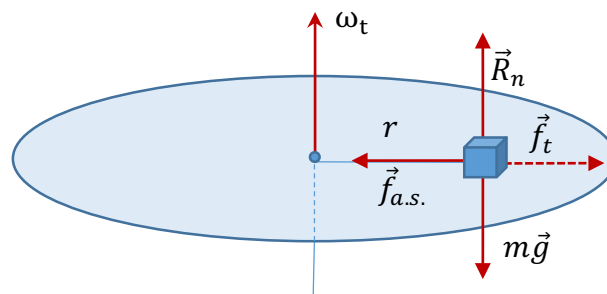


Fig.42, Equilibrio di una massa su un piano scabro in rotazione uniforme

Se l'oggetto è fermo, la somma delle forze deve essere nulla, e nel SRNI scriveremo:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t + \vec{f}_{a.s.} = 0$$

Dato che l'oggetto è fermo, non abbiamo incluso il termine della forza di Coriolis.

Come già dimostrato nel Capitolo XX, la forza di trascinamento di compone di due termini, il primo legato alla rotazione del sistema, che essendo diretta verso l'esterno prende il nome di forza centrifuga:

$$\vec{f}_{centr}(t) = mr\omega_t^2 \hat{e}$$

il secondo legato all'accelerazione angolare è in direzione opposta al verso dell'accelerazione:

$$\vec{f}_{t\phi}(t) = -mr\alpha_t \hat{\phi}$$

Nel caso considerato il p.m. è fermo su una piattaforma che ruota con velocità costante e pertanto agisce solo la forza centrifuga. Osserviamo che le forze hanno una direzione parallela l'asse \hat{k} , cioè perpendicolare al piano, e secondo il versore radiale \hat{r} . Proiettando su questi due versori abbiamo:

$$\begin{cases} f_t + f_{a.s.} = 0 \\ R_n - mg = 0 \end{cases}$$

Il massimo valore della forza di attrito è data da:

$$|f_{a.s.}| \leq \alpha_s R_n$$

sostituendo abbiamo:

$$mr\omega_t^2 \leq \alpha_s mg$$

Da cui ricaviamo che il corpo è fermo se

$$\omega_t \leq \sqrt{\frac{\alpha_s g}{r}}$$

III.9.2.2 Statica di un corpo appoggiato una piattaforma ruotante con $\alpha_t = 0$

Nel caso di una piattaforma ruotante con accelerazione angolare α_t , l'analisi è più complessa. Sull'asse verticale risulta ancora $R_n = mg$, mentre sul piano la forza di attrito deve bilanciare la forza di trascinamento che ora ha entrambi i termini \vec{f}_{centr} e $\vec{f}_{t\phi}$.

$$\begin{cases} (f_{a.s.})_r + mr\omega_t^2 \hat{r} = 0 \\ (f_{a.s.})_\phi - mr\alpha_t \hat{\phi} = 0 \end{cases}$$

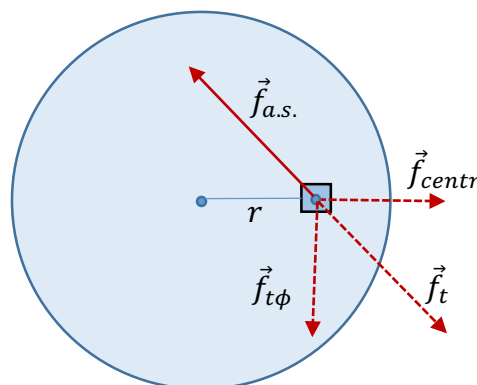


Fig.43, Equilibrio di una massa su un piano scabro in rotazione non uniforme

Il modulo della forza di attrito statico sarà pertanto pari a:

$$f_{a.s.} = \sqrt{(mr\omega_t^2)^2 + (mr\alpha_t)^2}$$

portando fuori radice:

$$f_{a.s.} = mr\sqrt{\omega_t^4 + \alpha_t^2}$$

Dalla relazione sulla forza di attrito:

$$f_{a.s.} \leq \alpha_s R_n$$

e tenuto conto che $R_n = mg$, otteniamo:

$$mr\sqrt{\omega_t^4 + \alpha_t^2} \leq \alpha_s mg$$

semplificando la massa:

$$\sqrt{\omega_t^4 + \alpha_t^2} \leq \frac{\alpha_s g}{r}$$

Notiamo che questa condizione dipende dall'accelerazione angolare $\alpha_t(t)$ e dalla velocità angolare iniziale ω_0 .

Ad esempio per una piattaforma che parte da ferma con un'accelerazione angolare costante $\alpha_t(t) = \alpha_{t0}$ abbiamo $\omega_t(t) = \alpha_{t0}t$, sostituendo:

$$\sqrt{(\alpha_{t0}t)^4 + \alpha_{t0}^2} \leq \frac{\alpha_s g}{r}$$

Che risolta con i seguenti passaggi:

$$(\alpha_{t0}t)^4 + \alpha_{t0}^2 \leq \left(\frac{\alpha_s g}{r}\right)^2$$

$$(\alpha_{t0}t)^4 \leq \left(\frac{\alpha_s g}{r}\right)^2 - \alpha_{t0}^2$$

$$t^4 \leq \frac{\left(\frac{\alpha_s g}{r}\right)^2 - \alpha_{t0}^2}{\alpha_{t0}^4}$$

ci permette di calcolare l'istante del distacco che avviene quando la forza d'attrito non è più in grado di bilanciare la spinta complessiva della forza di trascinamento.

$$t \leq \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{\alpha_s g}{r}\right)^2 - \alpha_{t0}^2}}{\alpha_{t0}}$$

Notiamo che se

$$\alpha_{t0} \geq \left(\frac{\alpha_s g}{r}\right)$$

l'oggetto viene subito messo in moto dalla forza di trascinamento.

III.9.2.3 Statica di un corpo appoggiato sulla parete di un cilindro ruotante

Consideriamo una cilindro di raggio ρ in rotazione con velocità angolare ω_t , nel sistema di riferimento non inerziale. La forza centrifuga spinge l'oggetto verso la superficie con attrito, vogliamo calcolare la velocità angolare minima per cui l'oggetto rimane fermo. Ancora una volta scriviamo ne SRNI:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t + \vec{f}_{a.s.} = 0$$

Proiettando le componenti verticali e radiali.

$$\begin{cases} -ma_t + R_n = 0 \\ f_{a.s.} - mg = 0 \end{cases}$$

sostituiamo l'espressione della forza di trascinamento:

$$\begin{cases} -m\rho\omega_t^2 + R_n = 0 \\ f_{a.s.} - mg = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo le forze incognite

$$\begin{cases} R_n = m\rho\omega_t^2 \\ f_{a.s.} = mg \end{cases}$$

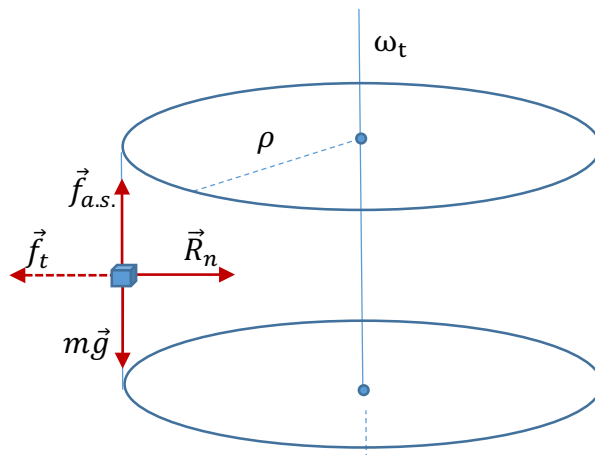


Fig.44, Equilibrio di una massa su una parete verticale di un cilindro in rotazione

che vanno sostituite nella relazione per la forza di attrito

$$f_{a.s.} \leq \alpha_s R_n$$

ottenendo

$$mg \leq m\rho\omega_t^2$$

che ci fornisce il valore minimo di velocità angolare affinché l'oggetto non scivoli:

$$\omega_t \geq \sqrt{\frac{g}{\rho}}$$

III.9.2.4 Statica di una sistema massa molla in rotazione

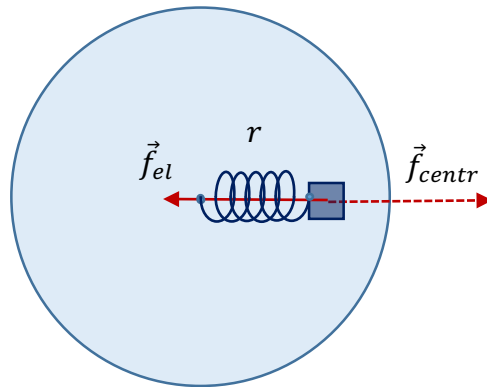


Fig.45, Equilibrio di una massa collegata a una molla su un piano liscio in rotazione

Consideriamo una massa collegata a una molla, di lunghezza l_0 e costante elastica k , fissata a un perno collocato nel centro di una piattaforma liscia circolare, e supponiamo che tutto il sistema (piattaforma con massa e molla) stia ruotando in modo solidale con velocità angolare ω_t . Ci chiediamo di quanto si allunga la molla in condizioni statiche, cioè senza oscillazioni.

Imponiamo l'equilibrio delle forze nel SRNI:

$$m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{f}_t + \vec{f}_{el} = 0$$

dove

$$\vec{f}_t = \vec{f}_{centr} = mr\omega_t^2\hat{r}$$

L'equilibrio tra le forze orizzontali:

$$-k(r - l_0) + mr\omega_t^2 = 0$$

Allungamento statico della molla:

$$(r - l_0) = \frac{mr\omega_t^2}{k}$$

Notiamo che se $\omega_t = 0$, $\rho = l_0$.

III.10 QUANTITA' DI MOTO E IMPULSO DI UNA FORZA

III.10.1 Principio di conservazione della quantità di moto

Abbiamo già definito la *quantità di moto*:

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Consideriamo ora un SRI in cui più forze $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \dots \vec{f}_n\}$ agiscono sul punto materiale e definiamo la forza risultante \vec{F} come

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \vec{f}_j$$

con cui esprimiamo il II Principio nella sua forma più generale:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Nel caso in cui la somma delle forze sia nulla, $\vec{F} = 0$, e risulta:

$$\vec{q} = \text{costante} \quad (\text{III.135})$$

Principio di Conservazione della quantità di moto, che coincide con il Principio di Inerzia.

III.10.2 Teorema dell'impulso e della quantità di moto

Quando su un p.m. agisce una forza (risultante) \vec{F} , in un intervallo di tempo infinitesimo la sua quantità di moto varia di:

$$d\vec{q} = \vec{F} dt$$

se consideriamo il moto del p.m. in un intervallo di tempo (t_0, t_1) possiamo calcolare la variazione totale della quantità di moto tra i due istanti, infatti

$$\vec{q}(t_1) - \vec{q}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{q} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt \quad (\text{III.136})$$

L'integrale della forza nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_0$, prende il nome di *Impulso* della forza, che è una grandezza vettoriale:

$$\vec{I}_{\Delta t} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt \quad (\text{III.137})$$

Enunciamo il seguente teorema detto dell'impulso e della quantità di moto: "L'impulso di una forza agente su un corpo è pari alla sua variazione della quantità di moto".

E' interessante analizzare il significato geometrico di una delle componenti dell'equazione, prendiamo ad esempio la componente x :

$$q_x(t_1) - q_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt \quad (\text{III.138})$$

osserviamo che se è nota la funzione $F_x(t)$ e ne disegniamo il grafico nel piano (F_x, t) , l'impulso della forza, e la variazione della quantità di moto, sono pari all'area sottostante la curva tra t_0 e t_1 (area tratteggiata in figura).

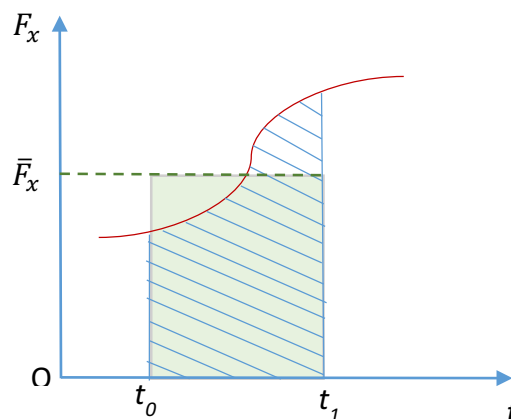


Fig.46, Area corrispondente all'impulso di una forza e forza media

III.10.3 Forza media

Dal disegno si vede che è possibile definire un valore costante della forza, detto valore medio \bar{F}_x che determina la stessa area nell'intervallo, e quindi ad essa corrisponde lo stesso impulso e la stessa variazione della quantità di moto:

$$\bar{F}_x(t_1 - t_0) = q_x(t_1) - q_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt \quad (\text{III.139})$$

da cui ricaviamo:

$$\bar{F}_x = \frac{q_x(t_1) - q_x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt \quad (\text{III.140})$$

questa relazione ha un notevole interesse. Infatti in molti casi non è possibile risalire al valore della forza in funzione del tempo, ma se nell'intervallo di tempo $\Delta t = (t_1 - t_0)$ misuriamo la variazione della quantità di moto, possiamo ricavare il valore medio della forza che ha agito sul p.m.

III.10.3 Forza impulsiva

Una forza si dice impulsiva quando agisce per un lasso di tempo Δt molto breve. Forze impulsive si hanno ad esempio negli urti tra due oggetti metallici, la durata dell'urto è molto breve e le forze interne nell'urto sono molto intense, solitamente molto maggiori delle forze esterne (peso, attrito etc..). Nella figura seguente rappresentiamo qualitativamente il caso in cui $|\vec{F}|_{\text{impulso}} \gg mg$.

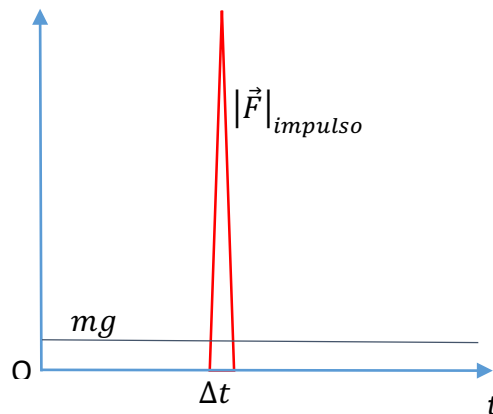


Fig.47, Forza impulsiva e forza costante

Se si applica il teorema dell'impulso e della quantità di moto all'intervallo di tempo Δt , risulta evidente che la variazione della quantità di moto è dovuta principalmente alla forza impulsiva, la cui area nell'intervallo è molto maggiore di quella della forza peso. Questo fa sì che in caso di forze impulsive possiamo trascurare gli effetti delle forze esterne sulla variazione della quantità di moto nell'intervallo Δt .

Diciamo che abbiamo un *impulso ideale* quando la forza impulsiva agisce in un tempo brevissimo (idealmente $\Delta t \rightarrow 0$). In questo caso l'intensità della forza raggiunge valori elevatissimi (idealmente $\rightarrow \infty$ affinché l'area, che corrisponde all'impulso della forza, abbia un valore finito). Quando questa approssimazione può essere applicata in situazioni reali,

trascuriamo l'effetto delle forze esterne e risulta che la forza impulsiva causa una variazione di velocità senza modificare la posizione del p.m. nell'intervallo Δt .

III.11 MOMENTO DI UNA FORZA E MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO

III.11.1 Definizione del momento di una forza

Consideriamo una forza \vec{f} e un punto Ω dello spazio che chiamiamo polo. Definiamo momento della forza rispetto al polo il prodotto vettoriale:

$$\vec{\mu}_\Omega = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} \quad (\text{III.141})$$

le cui dimensioni sono Nm.

Sappiamo che la retta su cui giace il vettore e il polo formano un piano, e scegliamo un sistema di coordinate cartesiane tale che esso corrisponda al piano $\{x, y\}$, possiamo sviluppare il prodotto vettoriale in base alle regole fornite nel paragrafo I.3.2:

$$\vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} = |\vec{r}_{\Omega P}| \cdot |\vec{f}| \sin \alpha \hat{k} \quad (\text{III.142})$$

Applicando la regola della mano destra osserviamo che quando la forza \vec{f} ruota in senso antiorario intorno al polo, il momento della forza è parallelo a \hat{k} , diretto verso l'alto (come nel caso in figura); se la forza ruota in verso orario, il momento è rivolto in basso.

Notiamo inoltre che se l'angolo $\alpha = 0$ la retta d'azione della forza passa per il polo, il momento è nullo. Se l'angolo $\alpha = \pi/2$, la forza è perpendicolare al vettore $\vec{r}_{\Omega P}$ e il momento ha il massimo valore. Ricordiamo che il valore del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma formato dai due vettori.

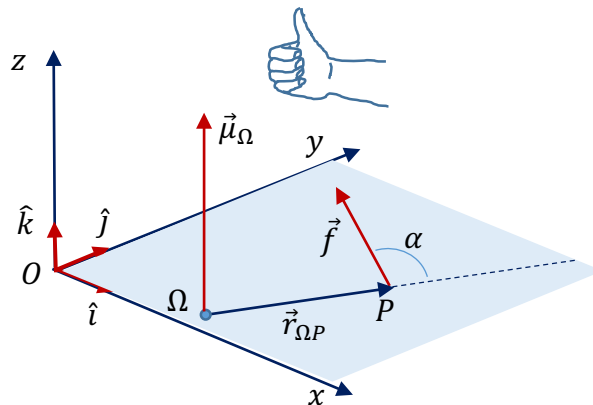


Fig.48, Momento di una forza rispetto a un polo

Se dal punto Ω tracciamo la perpendicolare alla retta d'azione della forza individuiamo il segmento b , distanza del polo dalla retta che è detto braccio della forza. Notiamo che nel triangolo rettangolo ΩPH risulta:

$$b = |\vec{r}_{\Omega P}| \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{III.143})$$

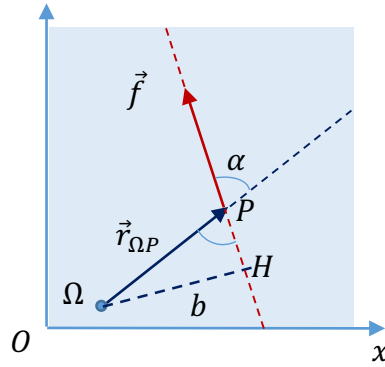


Fig.49, Braccio b di una forza, distanza del polo dalla retta di azione

Pertanto il momento della forza viene anche espresso dal prodotto della forza per il braccio:

$$\vec{\mu}_{\Omega}(t) = |\vec{f}(t)|b(t) \hat{k} \quad (\text{III.144})$$

Se il braccio è nullo (la retta d'azione della forza passa per il polo) il momento è nullo.

Se sviluppiamo il prodotto vettoriale in coordinate cartesiane abbiamo:

$$\vec{\mu}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} = (y_{\Omega P} f_z - z_{\Omega P} f_y) \hat{i} - (x_{\Omega P} f_z - z_{\Omega P} f_x) \hat{j} + (x_{\Omega P} f_y - y_{\Omega P} f_x) \hat{k} \quad (\text{III.145})$$

In forma sintetica, tale espressione si ottiene dallo sviluppo del seguente determinante:

$$\vec{\mu}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_{\Omega P} & y_{\Omega P} & z_{\Omega P} \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} \quad (\text{III.146})$$

In coordinate polari sul piano abbiamo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\Omega P} &= r_{\rho} \hat{r} + r_{\phi} \hat{\phi} \\ \vec{f} &= f_{\rho} \hat{r} + f_{\phi} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (\text{III.147})$$

Svolgiamo il prodotto vettoriale, tenendo conto della perpendicolarità tra \hat{r} , $\hat{\phi}$ e \hat{k} , otteniamo:

$$\vec{\mu}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} = (r_{\rho} f_{\phi} - r_{\phi} f_{\rho}) \hat{k} \quad (\text{III.148})$$

La stessa espressione si ricava dal calcolo del determinante della matrice:

$$\vec{\mu}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ r_{\rho} & r_{\phi} & 0 \\ f_{\rho} & f_{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.149})$$

III.11.1.1 Momento di una coppia di forze

Definiamo *coppia di forze* due forze uguali e contrarie $\pm f_0$ che agiscono su due rette parallele a distanza b detto *braccio*.

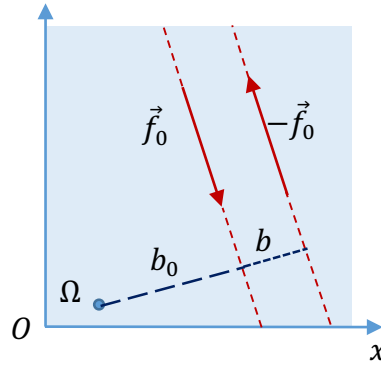


Fig.50, Momento di una coppia di forze

Il momento totale della coppia di forze è dato da:

$$\vec{\mu}_\Omega = \vec{\mu}_\Omega^+ + \vec{\mu}_\Omega^- \quad (\text{III.150})$$

Dall'espressione del momento espresso come forza per braccio:

$$\vec{\mu}_\Omega = |\vec{f}| b \hat{k} \quad (\text{III.151})$$

abbiamo:

$$\vec{\mu}_\Omega = -|\vec{f}_0| b_0 \hat{k} + |\vec{f}_0| (b_0 + b) \hat{k} = |\vec{f}_0| b \hat{k} \quad (\text{III.152})$$

Il momento di una coppia di forze è pari al prodotto della forza per il braccio e non dipende dal polo Ω . Se la coppia ha il verso antiorario (come in figura) il momento è perpendicolare al piano e diretto lungo \hat{k} , se il verso è orario sarà diretto lungo $-\hat{k}$.

III.11.2 Momento della quantità di moto (momento angolare)

Analogamente, definiamo il momento della quantità di moto, detto *momento angolare*, rispetto al polo Ω il prodotto vettoriale:

$$\vec{p}_\Omega(t) = \vec{r}_{\Omega P}(t) \times \vec{q}(t) \quad (\text{III.153})$$

le cui dimensioni sono $\text{kg m}^2/\text{s}$.

Seguendo lo stesso procedimento adottato per il momento di una forza, in un dato istante abbiamo:

$$\vec{p}_\Omega(t) = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} = |\vec{r}_{\Omega P}| \cdot |\vec{q}| \sin(\alpha) \hat{k} \quad (\text{III.154})$$

Utilizzando

$$b = |\vec{r}_{\Omega P}| \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{III.155})$$

Otteniamo

$$\vec{p}_\Omega(t) = |\vec{q}(t)| b(t) \hat{k} \quad (\text{III.156})$$

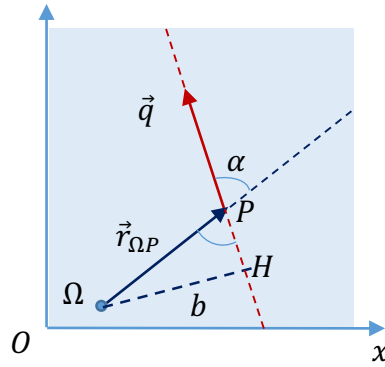


Fig.51, Momento angolare di una massa rispetto a un polo

In coordinate cartesiane abbiamo:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} = (y_{\Omega P} q_z - z_{\Omega P} q_y) \hat{i} - (x_{\Omega P} q_z - z_{\Omega P} q_x) \hat{j} + (x_{\Omega P} q_y - y_{\Omega P} q_x) \hat{k} \quad (\text{III.157})$$

In forma sintetica, tale espressione si ottiene dallo sviluppo del seguente determinante:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_{\Omega P} & y_{\Omega P} & z_{\Omega P} \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} \quad (\text{III.158})$$

In coordinate polari sul piano abbiamo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\Omega P} &= r_{\rho} \hat{r} + r_{\phi} \hat{\phi} \\ \vec{q} &= q_{\rho} \hat{r} + q_{\phi} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (\text{III.159})$$

otteniamo:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} = (r_{\rho} q_{\phi} - r_{\phi} q_{\rho}) \hat{k} \quad (\text{III.160})$$

che si ottiene anche dal calcolo del seguente determinante:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ r_{\rho} & r_{\phi} & 0 \\ q_{\rho} & q_{\phi} & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{III.161})$$

III.11.2.1 Momento angolare per un moto rettilineo

Consideriamo un punto materiale in moto su una traiettoria rettilinea, e sia Ω un polo esterno alla retta:

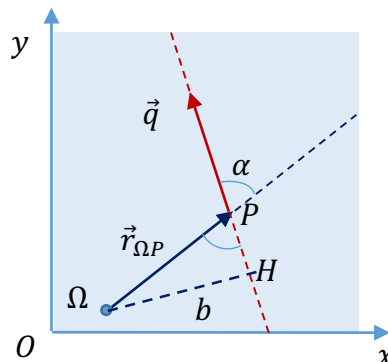


Fig.52, Momento angolare di una massa in moto rettilineo

Se il moto è rettilineo, la distanza b del polo dalla retta è costante durante il moto del p.m., avremo:

$$\vec{p}_\Omega(t) = |\vec{q}(t)|b \hat{k} = m|\vec{v}(t)|b \hat{k} \quad (\text{III.162})$$

Nel caso di moto rettilineo uniforme con velocità \vec{v} costante abbiamo:

$$\vec{p}_\Omega(t) = m|\vec{v}|b \hat{k} \quad (\text{III.163})$$

III.11.2.3 Moto circolare, momento angolare rispetto al centro della circonferenza

Consideriamo un p.m. in moto su una traiettoria circolare di raggio ρ , si ha:

$$|\vec{r}_{\Omega P}| = \rho \quad (\text{III.164})$$

calcoliamo il momento angolare rispetto al centro della circonferenza. Tenendo presente che in un moto circolare $|\vec{v}| = |\omega|\rho$, otteniamo:

$$\vec{p}_\Omega(t) = m|\omega(t)|\rho^2 \hat{k} \quad (\text{III.165})$$

che riscriviamo nella seguente forma:

$$\vec{p}_\Omega(t) = m\rho^2 \vec{\omega}(t) \quad (\text{III.166})$$

La grandezza $m\rho^2$ prende il nome di *momento d'inerzia* della massa m rispetto all'asse passante per Ω e perpendicolare al piano:

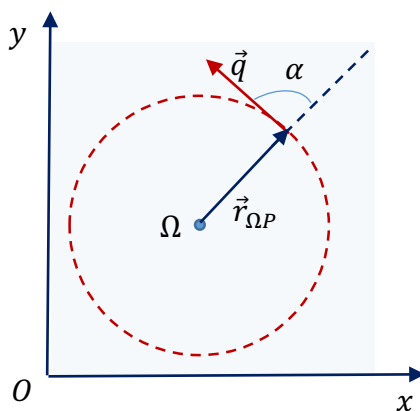


Fig.53, Momento angolare di una massa in moto circolare

$$I_\Omega = m\rho^2 \quad (\text{III.167})$$

le cui dimensioni sono kg m^2 . In tal modo il momento angolare per questo caso particolare diventa:

$$\vec{p}_\Omega(t) = I_\Omega \vec{\omega}(t) \quad (\text{III.168})$$

Occorre precisare che questa espressione può essere utilizzata solo se il polo coincide con il centro della circonferenza. In questo caso \vec{p}_Ω e $\vec{\omega}$ sono due vettori paralleli perpendicolari al piano del moto. Infatti, se scegliamo un polo Ω sull'asse perpendicolare passante per il centro della circonferenza a una distanza h , il momento angolare è definito da:

$$\vec{p}_\Omega = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{q} \quad (\text{III.169})$$

dove

$$\vec{r}_{\Omega P} = \vec{h} + \vec{\rho} \quad (\text{III.170})$$

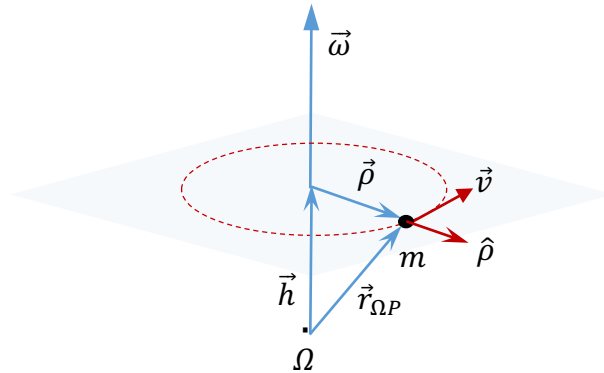


Fig.54, Momento angolare di una massa in moto circolare, rispetto a un polo sull'asse

otteniamo:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{h} \times \vec{q} + \vec{\rho} \times \vec{q} \quad (\text{III.171})$$

Essendo in entrambi i termini i vettori ortogonali tra loro, abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{h} \times \vec{q} = -h q \hat{\rho} \\ \vec{\rho} \times \vec{q} = \rho q \hat{k} \end{cases} \quad (\text{III.172})$$

Esplicitando $q = mv = m\omega\rho$, abbiamo:

$$\vec{p}_{\Omega} = -hm\omega\rho\hat{\rho} + m\omega\rho^2\hat{k} \quad (\text{III.173})$$

che riscriviamo come:

$$\vec{p}_{\Omega} = -hm\omega\vec{\rho} + m\rho^2\vec{\omega} \quad (\text{III.174})$$

dove riconosciamo nel secondo termine il momento d'inerzia della massa rispetto all'asse verticale, otteniamo pertanto:

$$\vec{p}_{\Omega} = -hm\omega\vec{\rho} + I_{\Omega}\vec{\omega} \quad (\text{III.175})$$

Troviamo quindi che in generale il momento angolare ha due componenti:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{p}_{\Omega\parallel} + \vec{p}_{\Omega\perp} \quad (\text{III.176})$$

una parallela all'asse di rotazione e l'altra perpendicolare a tale asse:

$$\begin{cases} \vec{p}_{\Omega\parallel} = I_{\Omega}\vec{\omega} \\ \vec{p}_{\Omega\perp} = -hm\omega\vec{\rho} \end{cases} \quad (\text{III.177})$$

la componente parallela è ancora espressa dal prodotto del momento d'inerzia per il vettore velocità angolare.

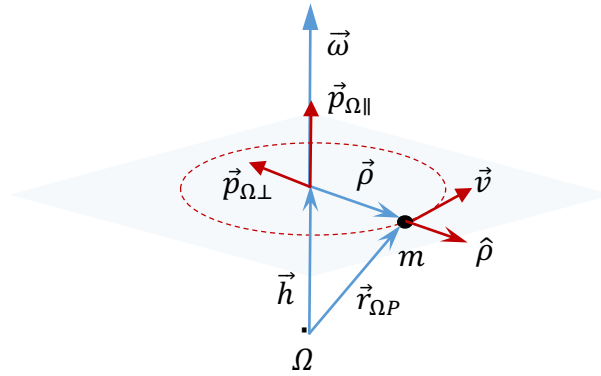


Fig.55, Componente parallela e perpendicolare del momento angolare

Notiamo che $\vec{p}_{\Omega\perp}$ dipende dalla quota h che va considerata positiva se il polo è al di sotto del piano di rotazione, e negativa se è al di sopra. Nel caso in cui $h = 0$, abbiamo $\vec{p}_{\Omega\perp} = 0$.

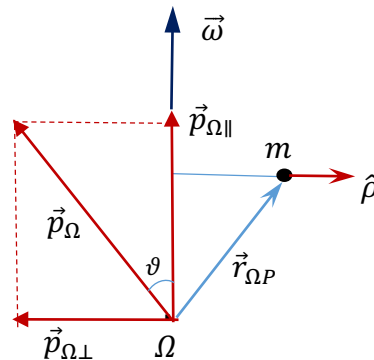


Fig.56, Inclinazione del momento angolare rispetto all'asse di rotazione

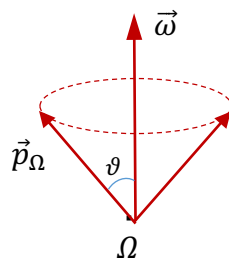
Il vettore \vec{p}_{Ω} è inclinato di un angolo ϑ rispetto all'asse di rotazione, dato da:

$$\tan\vartheta = \frac{|\vec{p}_{\Omega\perp}|}{|\vec{p}_{\Omega\parallel}|} \quad (\text{III.178})$$

sostituendo abbiamo:

$$\tan\vartheta = \frac{hm\omega\rho}{m\rho^2\omega} = \frac{h}{\rho} \quad (\text{III.179})$$

Durante il moto il momento angolare ruota intorno all'asse descrivendo un cono di apertura pari a ϑ .



III.11.3

Relazione tra momento della forza e momento angolare

Consideriamo un punto materiale in moto con velocità $\vec{v}(t)$ su una traiettoria e sia $\vec{r}(t)$ la sua posizione, nel sistema di coordinate cartesiane. Assumiamo che esso si muova sotto l'azione di una forza $\vec{f}(t)$.

Sappiamo dal II Principio della dinamica che la forza agisce sul punto materiale determinando la variazione della sua quantità di moto:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Consideriamo ora un polo Ω nello spazio, calcoliamo il momento della forza \vec{m}_Ω e il momento angolare \vec{p}_Ω e ci chiediamo se esiste tra i vettori \vec{m}_Ω e \vec{p}_Ω una relazione differenziale simile alla relazione tra forza e quantità di moto espressa dal II Principio. A tale scopo deriviamo rispetto al tempo l'espressione che definisce il momento angolare:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\Omega P}}{dt} \times \vec{q} + \vec{r}_{\Omega P} \times \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (\text{III.180})$$

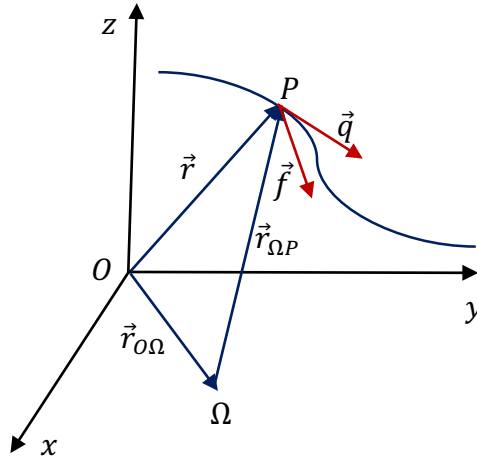


Fig.57, Momento di una forza e momento angolare rispetto al polo Ω

Osserviamo dalla figura che:

$$\vec{r} = \vec{r}_{O\Omega} + \vec{r}_{\Omega P} \quad (\text{III.181})$$

e utilizzando il II principio otteniamo:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}_\Omega) \times \vec{q} + \vec{\mu}_\Omega \quad (\text{III.182})$$

Che possiamo esprimere come segue:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_{O\Omega})}{dt} \times \vec{q} + \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} \quad (\text{III.183})$$

notiamo che il termine $\vec{v} \times \vec{q} = 0$, essendo i vettori paralleli, quindi l'equazione diventa:

$$\vec{\mu}_\Omega = \frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} + \vec{v}_\Omega \times \vec{q} \quad (\text{III.184})$$

Nel caso in cui il polo Ω sia fisso ($\vec{v}_\Omega = 0$) oppure si muova in ogni istante con velocità parallela a quella del p.m. ($\vec{v}_\Omega \parallel \vec{q}$) la relazione di semplifica diventando simile al II Principio:

$$\vec{\mu}_\Omega = \frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} \quad (\text{III.185})$$

Questa relazione estesa a sistemi di punti materiali ci fornirà la II Equazione Cardinale.

III.11.4 Studio della dinamica utilizzando il momento angolare

In generale nello studio della dinamica di un p.m. l'equazione dei momenti non fornisce strumenti di calcolo diversi o migliori del II principio. A titolo di esempio applichiamo la relazione nello studio del pendolo semplice.

III.11.4.1 Moto del pendolo semplice

Rispetto al polo fisso Ω , tenuto conto che si trova sulla retta d'azione della tensione del filo $\vec{\tau}$ possiamo scrivere:

$$\vec{\mu}_\Omega = -mgb\hat{k} = -mgl \sin\phi\hat{k} \quad (\text{III.186})$$

dove \hat{k} è il versore perpendicolare al piano del moto, e $b = l \sin\phi$. (il segno meno deriva dal fatto che la forza peso ruota in verso orario rispetto al polo).

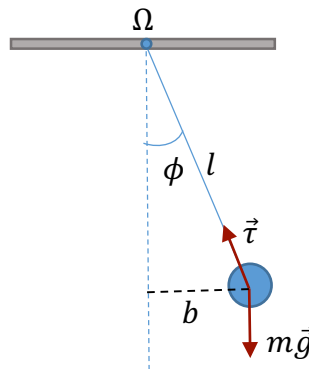


Fig.58, Momento delle forze rispetto al polo Ω in un pendolo semplice

Inoltre, trattandosi di un moto circolare, sappiamo che:

$$\vec{p}_\Omega = ml^2\omega\hat{k} \quad (\text{III.187})$$

Da cui ricaviamo:

$$\frac{d\vec{p}_\Omega}{dt} = ml^2\frac{d\omega}{dt}\hat{k} = ml^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\hat{k} \quad (\text{III.188})$$

Applicando la relazione tra i momenti abbiamo:

$$-mgl \sin\phi\hat{k} = ml^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\hat{k} \quad (\text{III.189})$$

eliminando i termini comuni:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\phi = 0 \quad (\text{III.190})$$

che coincide con l'equazione differenziale ricavata mediante il II Principio.

III.11.4.2 Forze centrali, conservazione del momento angolare

Anche se non abbiamo nessun beneficio nel calcolo della legge oraria del moto del p.m., la relazione tra i momenti può fornire informazioni utili sulle proprietà generali del moto che non possiamo ottenere immediatamente con il II Principio.

Questo è il caso delle cosiddette forze centrali, forze che sono dirette sempre verso un punto detto centro. Ad esempio la forza gravitazionale che agisce su un pianeta è sempre diretta verso il centro del sole, pertanto il momento della forza gravitazionale rispetto a tale punto è nullo:

$$\vec{\mu}_S = \vec{r}_{SP} \times \vec{f}_G = 0 \quad (\text{III.191})$$

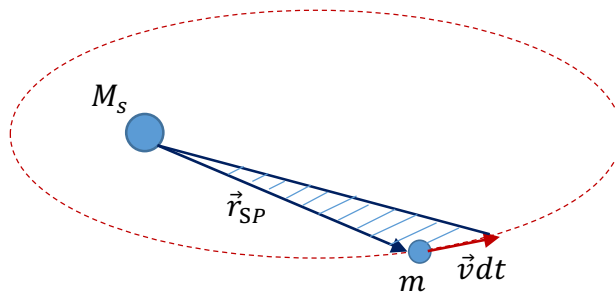


Fig.59, Momento della forza gravitazionale rispetto al centro del sole

il che comporta che

$$\frac{d\vec{p}_S}{dt} = 0 \quad (\text{III.192})$$

e il momento angolare risulta costante lungo la traiettoria:

$$\vec{p}_S(t) = \text{costante} \quad (\text{III.193})$$

Il vettore momento angolare \vec{p}_S è costante sia in direzione che in modulo. Sappiamo che esso è perpendicolare in ogni istante al piano individuato da \vec{r}_{SP} e \vec{v} (piano istantaneo del moto), pertanto se la sua direzione è costante nel tempo, anche il piano del moto sarà il medesimo, e possiamo concludere che le orbite sono piane.

Inoltre dalla definizione di velocità areolare:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r}_{SP} \times \vec{v}) \quad (\text{III.194})$$

moltiplichiamo e dividiamo per la massa:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2m} (\vec{r}_{SP} \times m\vec{v}) \quad (\text{III.195})$$

Ricaviamo

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{p}_S}{2m} \quad (\text{III.196})$$

da cui deduciamo che se $\vec{p}_S(t)$ è costante, la velocità areolare è costante (II legge di Keplero).

III.11.5 Variazione del momento angolare nel caso di forze impulsive

Non abbiamo un equivalente teorema dell'impulso e della quantità di moto che possa essere ricavato dalla relazione dei momenti. Vediamo infatti che, scelto un polo fisso, scriviamo:

$$d\vec{p}_\Omega = \vec{\mu}_\Omega dt \quad (\text{III.197})$$

Integriamo nell'intervallo di tempo t_0, t_1

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{p}_\Omega = \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mu}_\Omega dt \quad (\text{III.198})$$

da cui

$$\vec{p}_\Omega(t_1) - \vec{p}_\Omega(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{f} dt \quad (\text{III.199})$$

bisogna tener presente che nell'integrale le grandezze $\vec{r}_{\Omega P}(t)$ e $\vec{f}(t)$ dipendono entrambe dal tempo, e quindi non possiamo affermare che la variazione del momento angolare è pari al momento dell'Impulso. Se abbiamo però a che fare con forze impulsive, dove l'intervallo di tempo è molto breve, possiamo considerare costante $\vec{r}_{\Omega P}$ nell'intervallo, e quindi portarlo al di fuori dell'integrale:

$$\vec{p}_\Omega(t_1) - \vec{p}_\Omega(t_0) = \vec{r}_{\Omega P} \times \int_{t_0}^{t_1} \vec{f} dt \quad (\text{III.200})$$

e utilizzando la definizione dell'impulso della forza $\vec{I}_{\Delta t}$ otteniamo:

$$\vec{p}_\Omega(t_1) - \vec{p}_\Omega(t_0) = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{I}_{\Delta t} \quad (\text{III.201})$$

solo in questo caso particolare possiamo dire che la variazione del momento angolare è pari al momento dell'impulso $\vec{I}_{\Delta t}$.

Esempio: Forza impulsiva su una massa sospesa

Consideriamo una massa m sospesa mediante un filo inestensibile di lunghezza l e di massa trascurabile, in equilibrio sotto l'azione della forza peso e dalla tensione nel filo. Supponiamo di applicare alla massa un impulso orizzontale di intensità nota $\vec{I}_{\Delta t}$, vogliamo calcolare al termine dell'azione dell'impulso (che assumiamo ideale) la velocità con cui parte la massa e il valore della tensione del filo.

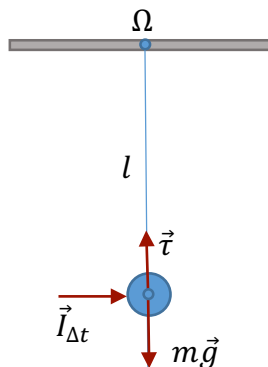


Fig.60, Momento della forza impulsiva

Applichiamo la formula

$$\vec{p}_\Omega(t_1) - \vec{p}_\Omega(t_0) = \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{I}_{\Delta t}$$

dove:

$$\begin{cases} \vec{p}_\Omega(t_0) = 0 \\ \vec{p}_\Omega(t_1) = l m v(t_1) \hat{k} \\ \vec{r}_{\Omega P} \times \vec{I}_{\Delta t} = l I_{\Delta t} \hat{k} \end{cases}$$

uguagliando otteniamo:

$$l m v(t_1) = l I_{\Delta t}$$

quindi:

$$v(t_1) = \frac{I_{\Delta t}}{m}$$

Per quanto riguarda la tensione nel filo, sappiamo che alla velocità $v(t_1)$ corrisponde un'accelerazione centripeta, dal II Principio della Dinamica:

$$\tau - mg = m \frac{[v(t_1)]^2}{l}$$

da cui ricaviamo:

$$\tau = mg + \frac{I_{\Delta t}^2}{ml}$$

CAPITOLO IV: LAVORO ED ENERGIA

Abbiamo già visto che esiste una relazione vettoriale tra l'impulso della forza e la variazione della quantità di moto nell'intervallo temporale di percorrenza di un arco della traiettoria tra un punto A a un punto B. Si tratta di una relazione vettoriale che ci permette di calcolare la variazione del vettore velocità attraverso l'integrazione della forza nell'intervallo di tempo.

Nello studio della dinamica del p.m. abbiamo, d'altra parte, visto che il modulo della velocità varia solo se agisce una forza tangente alla traiettoria che causa di un'accelerazione tangenziale, mentre una forza perpendicolare alla traiettoria determina solo la variazione della direzione del moto (rotazione del vettore velocità).

Se siamo pertanto interessati solo alla variazione del modulo della velocità nel tratto da A a B, sappiamo che è solo la componente tangente della forza la causa di tale variazione.

IV.1 LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA

Definiamo "lavoro" elementare della forza \vec{f} sul punto materiale nello spostamento elementare $d\vec{s}$ la quantità:

$$dL = \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.1})$$

le cui dimensioni sono Nm. L'unità di misura per il lavoro è il joule (J=Nm). Sviluppando il prodotto scalare abbiamo:

$$dL = f \cdot ds \cdot \cos\alpha \quad (\text{IV.2})$$

in cui notiamo che il lavoro è compiuto dalla componente della forza tangente alla traiettoria $f \cdot \cos\alpha$. Inoltre possiamo notare che:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < \pi/2 \rightarrow dL > 0 \\ \alpha = \pi/2 \rightarrow dL = 0 \\ \pi/2 < \alpha \leq \pi \rightarrow dL < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

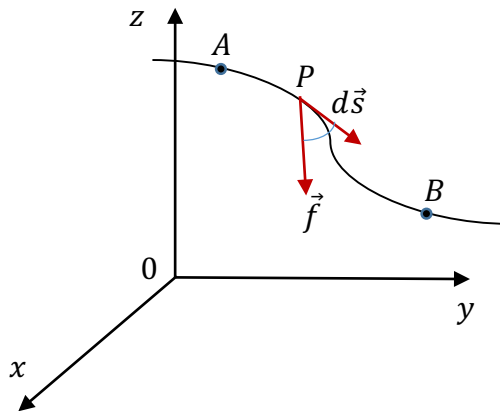


Fig.61, Forza e spostamento sulla traiettoria

quindi una forza accelerante compie un lavoro positivo, una forza decelerante compie un lavoro negativo, una forza perpendicolare allo spostamento compie un lavoro nullo.

Sviluppando il prodotto scalare in su sistema di coordinate cartesiane abbiamo:

$$dL = (f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (\text{IV.4})$$

Mentre per un moto piano in coordinate polari:

$$dL = (f_r \hat{r} + f_\phi \hat{\phi}) \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi}) = f_r dr + f_\phi r d\phi \quad (\text{IV.5})$$

Il lavoro compiuto da una forza su un punto materiale nel tratto AB:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.6})$$

è l'integrale di linea che rappresenta la somma di tutti i lavori infinitesimi compiuti lungo la traiettoria da A a B. Se sul punto materiale agiscono più forze, il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori di ciascuna forza:

$$L_{AB} = \sum_{j=1}^N \left(\int_A^B \vec{f}_j \cdot d\vec{s} \right) \quad (\text{IV.7})$$

Dato che tutti gli integrali hanno gli stessi estremi, possiamo portare la sommatoria all'interno dell'integrale di linea, abbiamo:

$$L_{AB} = \int_A^B \sum_{j=1}^N \vec{f}_j \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.8})$$

essendo la sommatoria delle forze pari al risultante \vec{F} , scriviamo:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.9})$$

Il lavoro totale di un sistema di forze \vec{f}_j è pari al lavoro della forza risultante \vec{F} .

Calcoliamo ora il lavoro compiuto da alcune forze che abbiamo già incontrato nei capitoli precedenti.

IV.1.1 Forza Peso

Consideriamo un punto materiale in moto su una traiettoria qualsiasi e ci chiediamo qual è il lavoro compiuto dalla forza peso se il punto si sposta da A a B.

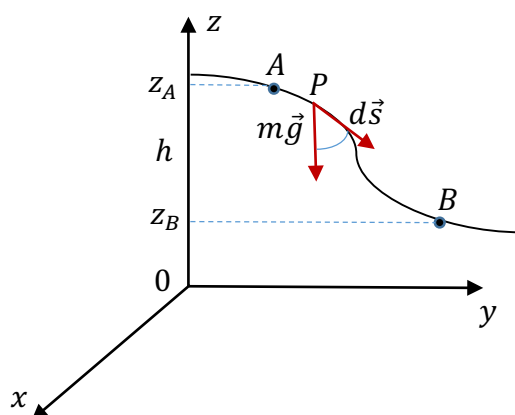


Fig.62, Forza peso e spostamento sulla traiettoria

In questo caso abbiamo solo la componente verticale della forza:

$$L_{AB} = \int_A^B f_z dz \quad (\text{IV.10})$$

Sappiamo che la forza peso vale $-mg\hat{k}$, la inseriamo nell'espressione del lavoro e abbiamo:

$$L_{AB} = \int_A^B -mg dz \quad (\text{IV.11})$$

$$L_{AB} = -mg \int_A^B dz = mg(z_A - z_B) \quad (\text{IV.12})$$

Notiamo che il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e dalla quota finale, e non dalla particolare traiettoria che porta il p.m. da A a B. Ponendo $h = (z_A - z_B)$ otteniamo:

$$L_{AB} = mgh \quad (\text{IV.13})$$

dove la differenza di quota h positiva se la quota iniziale è maggiore di quella finale, nulla se le due quote sono uguali, altrimenti è negativa. Quindi, se un corpo sale il lavoro della forza peso è negativo, se scende è positivo, se il percorso è tale che il p.m. arriva alla stessa quota iniziale, il lavoro è nullo.

IV.1.2 Forza Gravitazionale

Abbiamo già incontrato nel XX l'espressione della forza gravitazionale, che esprimiamo questa volta semplicemente con le masse M e m , che supponiamo essere assimilabili a punti materiali:

$$\vec{f}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{IV.14})$$

Supponiamo ora che la massa m si muova su una traiettoria qualsiasi dal punto A al punto B e vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale lungo questo percorso.

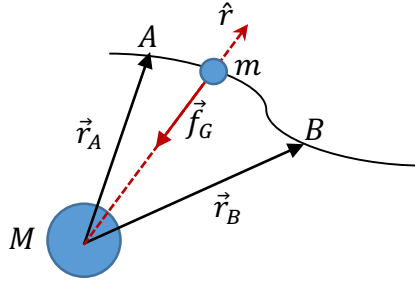


Fig.63, Lavoro della forza gravitazionale

Essendo la forza radiale, conviene utilizzare l'espressione del lavoro in coordinate polari, dove compare solo la componente f_r

$$L_{AB} = \int_A^B f_r dr \quad (IV.15)$$

Abbiamo

$$L_{AB} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} dr \quad (IV.16)$$

integrando otteniamo

$$L_{AB} = -GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (IV.17)$$

Anche in questo caso notiamo che il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale non dipende dalla particolare traiettoria, ma solo dalla distanza iniziale r_A e dalla distanza finale r_B . La forza gravitazionale compie un lavoro positivo se $r_A > r_B$, lavoro nullo se $r_A = r_B$, lavoro negativo se $r_A < r_B$.

VI.1.3 Forza elastica

Consideriamo ora una massa collegata a una molla che può oscillare soggetta a una forza elastica. In assenza di ogni forma di attrito vogliamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza elastica quando la massa si sposta in linea retta dalla posizione A alla posizione B. Sappiamo che la forza elastica agisce nella direzione dell'asse x :

$$\vec{f}_{el} = -kx\hat{i} \quad (IV.18)$$

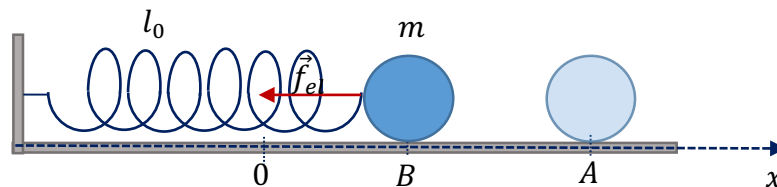


Fig.64, Lavoro della forza elastica

pertanto, utilizzando l'espressione del lavoro in coordinate cartesiane

$$L_{AB} = \int_A^B f_{el} dx \quad (IV.19)$$

sostituendo abbiamo:

$$L_{AB} = \int_A^B -kx dx \quad (\text{IV.20})$$

Integriamo:

$$L_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 \quad (\text{IV.21})$$

Troviamo che il lavoro dipende anche in questo caso solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale. Occorre tener presente che, pur essendo il moto rettilineo, il punto materiale si può spostare da A a B seguendo infiniti percorsi.

IV.1.4 Forza d'attrito cinematico

Le forze di attrito statico non compiono lavoro dato che la massa rimane ferma, mentre possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito cinematico $\vec{f}_{a.c.}$ quando la massa muovendosi su un piano scabro, con coefficienti di attrito cinematico μ_c , si sposta da A a B lungo una traiettoria di lunghezza l_{AB}

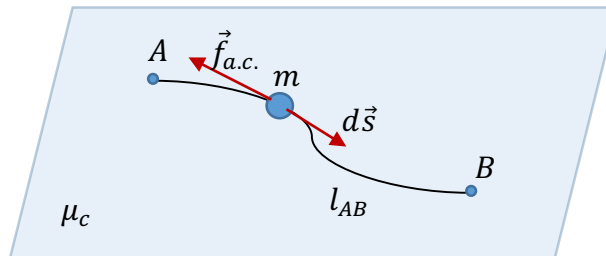


Fig.65, Lavoro della forza di attrito cinematico

Sappiamo che la forza di attrito cinematico si oppone al moto:

$$\vec{f}_{a.c.} = -\mu_c R_n \hat{v} \quad (\text{IV.22})$$

Per il calcolo del lavoro conviene sostituire la forza nella definizione generale:

$$L_{AB} = \int_A^B -\mu_c R_n \hat{v} \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.23})$$

essendo paralleli, il prodotto scalare $\hat{v} \cdot d\vec{s} = |ds|$, per cui

$$L_{AB} = -\mu_c R_n \int_A^B |ds| \quad (\text{IV.24})$$

l'integrale di $|ds|$ tra A e B è pari alla lunghezza della traiettoria l_{AB} , otteniamo quindi

$$L_{AB} = -\mu_c R_n l_{AB} \quad (\text{IV.25})$$

Il lavoro della forza di attrito cinematico è negativo (la forza si oppone al moto) e dipende dalla lunghezza della traiettoria sul piano.

IV.1.5 Forza d'attrito viscoso

Per la forza di attrito viscoso troviamo:

$$L_{AB} = \int_A^B -b\vec{v} \cdot \vec{v} dt \quad (\text{IV.26})$$

Cioè

$$L_{AB} = -b \int_A^B v^2 dt \quad (\text{IV.27})$$

Il lavoro dipende dalla velocità e dalla traiettoria. Per un corpo che cade da fermo la velocità ha l'espressione

$$v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (\text{IV.28})$$

IV.1.6 Forze motrici

Dobbiamo ricordare che esistono anche altre forze di natura elettromagnetica che chiamiamo forze motrici, sono quelle forze che applichiamo per spingere un corpo (esempio per spostare un mobile a casa) oppure per tirare su un corpo con una corda. Sono forze motrici anche quelle generate dai motori che tirano su un carico o mettono in moto un'automobile.

In tutti questi casi il lavoro espresso dalla formula:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV.29})$$

dipende dalla forza e dal percorso che va da A a B. Il calcolo diretto del lavoro può essere effettuato solo se sono noti il percorso e il valore della forza in ogni punto della traiettoria.

IV.1.6 Reazioni vincolari

Per ultimo trattiamo il caso delle reazioni vincolari quali la reazione normale al piano del moto \vec{R}_n o la tensione del filo nel pendolo $\vec{\tau}$. In entrambi i casi la forza è perpendicolare allo spostamento e quindi il lavoro è nullo.

IV.2 TEOREMA DEL LAVORO E DELL'ENERGIA CINETICA

Abbiamo imparato che quando una forza compie lavoro su una massa, cambia il modulo della sua velocità. Vogliamo ora approfondire l'argomento per ricavare la relazione esistente tra il lavoro compiuto e la variazione di velocità, attraverso un teorema fondamentale della dinamica, il teorema del lavoro e dell'energia cinetica. A tale scopo riprendiamo il lavoro espresso in coordinate cartesiane:

$$L_{AB} = \int_A^B f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (\text{IV.30})$$

sappiamo che

$$\begin{cases} f_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ f_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} \\ f_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

esprimiamo gli spostamenti elementari:

$$\begin{cases} dx = v_x dt \\ dy = v_y dt \\ dz = v_z dt \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

sostituiamo:

$$L_{AB} = \int_A^B m \frac{dv_x}{dt} v_x dt + m \frac{dv_y}{dt} v_y dt + m \frac{dv_z}{dt} v_z dt \quad (\text{IV.33})$$

mettiamo la massa a fattore e semplifichiamo:

$$L_{AB} = m \int_A^B v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \quad (\text{IV.34})$$

integrando abbiamo:

$$L_{AB} = \frac{1}{2} m |v_x^2 + v_y^2 + v_z^2|_A^B \quad (\text{IV.35})$$

Cioè

$$L_{AB} = \frac{1}{2} m |v^2|_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (\text{IV.36})$$

Osserviamo che il lavoro della forza ha effetto sul quadrato del modulo della velocità, inoltre detto K il termine

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{IV.37})$$

notiamo che esso ha le stesse dimensioni del lavoro, viene pertanto misurato in joule, e viene chiamato Energia Cinetica della massa m . In tal modo enunciamo il seguente teorema:

Il lavoro compiuto da una forza su una massa che si muove su di una traiettoria da un punto A a un punto B , è pari alla differenza tra l'energia cinetica finale e l'energia cinetica iniziale della massa:

$$L_{AB} = K_B - K_A \quad (\text{IV.38})$$

E' bene notare che nel teorema sopra citato, il lavoro riguarda tutte le forze agenti sulla massa, in quanto tutte concorrono alla variazione della velocità (tranne ovviamente quelle ortogonali alla traiettoria), pertanto se sulla massa agiscono più forze la cui risultante è pari a \vec{F} , per il lavoro totale scriveremo:

$$L_{AB}^{TOT} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = K_B - K_A \quad (\text{IV.39})$$

IV.2.1 Applicazioni del teorema del lavoro e dell'energia cinetica

IV.2.1.1 Caduta di un grave inizialmente in quiete

Consideriamo una massa m tenuta ferma ad un'altezza h dal suolo, la lasciamo cadere e ci chiediamo qual è la velocità di impatto. Questo caso è stato già analizzato con lo studio della dinamica attraverso l'accelerazione del corpo. In questo caso però non siamo interessati a ricavare la legge oraria, ma solo la velocità finale. Possiamo pertanto applicare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica:

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{AB} = mgh \\ K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ K_A = 0 \end{array} \right.$$

sostituendo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

IV.2.1.2 Forze elastiche

Consideriamo una massa m collegata a un estremo di una molla di costante elastica k in equilibrio. Allunghiamo la molla fino alla posizione x_A e lasciamo la massa da ferma. La molla tirerà la massa verso la posizione di equilibrio (forza di richiamo) e ci chiediamo con che velocità la massa transiterà per la posizione di equilibrio. Appliciamo il teorema sapendo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{AB} = \frac{1}{2}kx_A^2 \\ K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ K_A = 0 \end{array} \right.$$

sostituiamo:

$$\frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

da cui ricaviamo:

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}}x_A$$

IV.2.1.3 Forze di attrito

Supponiamo di lanciare una massa con velocità v_A su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito cinematico μ_c . Vogliamo calcolare il punto di arresto della massa. Anche questo problema può essere risolto applicando il II principio della dinamica, ma essendo

interessati solo alla condizione finale il cui la massa si ferma, possiamo applicare il teorema sapendo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{AB} = -\mu_c R_n l_{AB} \\ K_B = 0 \\ K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \end{array} \right.$$

sostituiamo

$$-\mu_c R_n l_{AB} = -\frac{1}{2} m v_A^2$$

da cui ricaviamo:

$$l_{AB} = \frac{m v_A^2}{\mu_c R_n}$$

Per un piano orizzontale $R_n = mg$, semplificando abbiamo:

$$l_{AB} = \frac{v_A^2}{\mu_c g}$$

IV.2.1.4 Moto in presenza di forze elastiche e di attrito cinematico

Prendiamo ora in esame un classico problema di un fucile a molla, un proiettile di massa m è appoggiato a un estremo della molla a riposo di lunghezza l_0 e di costante elastica k , all'interno di una canna di lunghezza d con attrito cinematico μ_c . Supponiamo di comprimere la molla di una lunghezza Δl , ci chiediamo con che velocità il proiettile esce dalla canna. Ovviamente va contemplato anche il caso che l'attrito lo fermi all'interno della canna se la spinta della molla non è sufficiente.

Questo problema è complesso se studiamo il moto con il II Principio, infatti il primo tratto della corsa del proiettile avviene con la contemporanea azione della forza elastica e della forza di attrito cinematico, moto che richiede la risoluzione dell'equazione differenziale di un moto non armonico. Ma dato che siamo interessati solo alla velocità del proiettile all'uscita della canna possiamo utilizzare il Teorema sapendo che:

La massa parte da una posizione A a distanza $l_{AB} = (d - l_0 + \Delta l)$ dall'estremo destro della canna, inoltre:

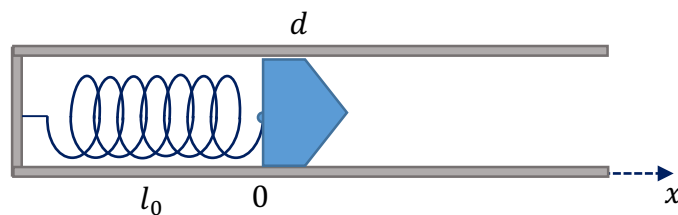


Fig.66, Proiettile lanciato da una molla in una canna con attrito

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{AB}^{attr} = -\mu_c R_n l_{AB} \\ L_{AB}^{el} = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \\ K_A = 0, \quad K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \end{array} \right.$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 - \mu_c R_n l_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

da cui, ponendo $R_n = mg$:

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\Delta l^2 - 2\mu_c g l_{AB}}$$

Osserviamo che il proiettile esce dalla canna solo se la spinta della molla è tale che

$$\Delta l^2 - \frac{2\mu_c mg}{k}(d - l_0 + \Delta l) > 0$$

$$\Delta l^2 - \frac{2\mu_c mg}{k}\Delta l - \frac{2\mu_c mg}{k}(d - l_0) > 0$$

Risolvendo l'equazione di II grado si ricava la compressione minima della molla.

IV.2.1.5 Moto in presenza di forze motrici

In tutti i casi precedenti il moto della massa avviene sotto l'azione di forze la cui espressione è nota e pertanto il lavoro compiuto è calcolabile. Ci sono casi in cui l'espressione delle forze non sono note, come nel caso delle forze motrici, in questi casi applicando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica siamo in grado di calcolare il lavoro compiuto da queste forze.

Supponiamo ad esempio di spingere una massa su un piano scabro con coefficiente d'attrito pari a μ_c , inclinato di un angolo α , per portare la massa fino a un'altezza h . Siamo interessati a calcolare il lavoro necessario per spostare la massa. In questo caso non conosciamo l'espressione della forza \vec{f}^{spinta} , che tra l'altro non è unica dato che si può portare l'oggetto in cima esercitando la spinta in tante modalità diverse.

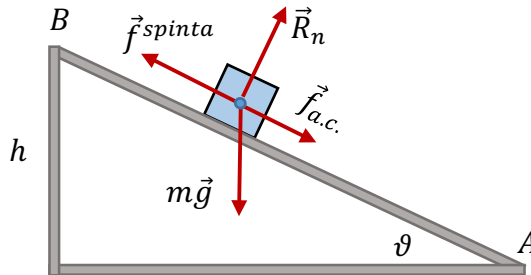


Fig.66, Forza motrice che spinge una massa su un piano inclinato con attrito

Se la massa, però, è ferma nel punto di partenza A, e arriva con velocità nulla in B, possiamo calcolare il lavoro compiuto dalla forza di spinta. Infatti, essendo la massa ferma sia alla partenza che all'arrivo, sappiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{AB}^{attr} = -\mu_c R_n l_{AB} \\ L_{AB}^{peso} = -mgh \\ K_A = 0, \quad K_B = 0 \end{array} \right.$$

applicando il teorema LEC otteniamo:

$$-mgh - \mu_c R_n l_{AB} + L_{AB}^{spinta} = 0$$

da cui

$$L_{AB}^{spinta} = mgh + \mu_c R_n l_{AB}$$

Dalla geometria del sistema ricaviamo inoltre

$$\begin{cases} l_{AB} = \frac{h}{\sin\vartheta} \\ R_n = mg \cos\vartheta \end{cases}$$

sostituendo abbiamo:

$$L_{AB}^{spinta} = mgh \left(1 + \frac{\mu_c}{\tan\vartheta} \right)$$

IV.2.1.6 Oscillazioni di un pendolo per grandi angoli

Esaminiamo ora un altro caso in cui il teorema del lavoro e dell'energia cinetica ci viene in aiuto per trattare problemi altrimenti di difficile soluzione. Abbiamo visto ad esempio che le oscillazioni di un pendolo semplice possono essere descritte da un moto armonico solo con piccole oscillazioni. Nel caso di ampie oscillazioni il moto può essere studiato con metodi matematici avanzati che non trattiamo in questo corso. Alcuni problemi possono però risolti applicando il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

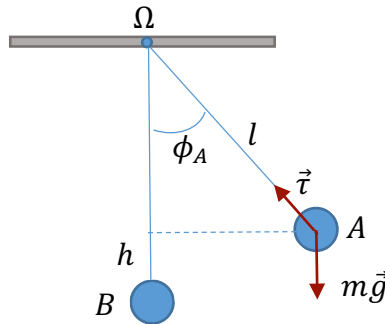


Fig.67, Conservazione dell'energia in un pendolo semplice

Consideriamo una massa m legata a un filo inestensibile di massa trascurabile, e supponiamo di tenerla ferma nel punto A ($v_A = 0$) che forma un angolo ϕ_A . Se lasciamo andare la massa, essa inizierà ad oscillare rispetto alla posizione di equilibrio in $\phi = 0$. Vogliamo calcolare la velocità con cui la massa transita per la posizione di equilibrio. Applichiamo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, scegliendo la posizione B come origine dell'asse verticale. Sappiamo che:

$$\begin{cases} L_{AB}^{peso} = mgh \\ K_A = 0 \\ K_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \end{cases}$$

dove

$$h = l(1 - \cos\phi_A)$$

abbiamo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

sostituendo

$$gl(1 - \cos\phi_A) = \frac{1}{2}v_B^2$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos\phi_A)}$$

Facciamo notare nuovamente che tale soluzione vale per qualunque angolo $0 \leq \phi_A \leq \pi/2$.

IV.3 LA POTENZA

In tutti i paragrafi precedenti ci siamo occupati del calcolo del lavoro compiuto da una forza e della variazione di energia meccanica di una massa in un campo di forze. Tutte le nostre espressioni e calcoli hanno tenuto in conto la posizione iniziale e quella finale della massa, senza considerare il tempo impiegato dalla massa per spostarsi da A a B . Se indichiamo con $\Delta t = t_B - t_A$ tale tempo, possiamo introdurre una nuova grandezza fisica di notevole importanza:

$$\bar{W} = \frac{L_{AB}}{\Delta t} \quad (\text{IV.40})$$

che viene chiamata potenza media della forza nell'intervallo Δt , ed è misurata in watt=joule/s ($W=J/s$).

Se prendiamo in esame un intervallo di tempo infinitesimo, possiamo definire la potenza istantanea:

$$W(t) = \frac{dL}{dt} \quad (\text{IV.41})$$

che ci permette di interpretare la potenza come la rapidità con cui la forza compie lavoro. Utilizzando l'espressione del lavoro elementare:

$$W(t) = \frac{\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f}(t) \cdot \vec{v}(t) \quad (\text{IV.42})$$

Per il calcolo della potenza istantanea è necessario conoscere l'andamento temporale della forza e della velocità.

IV.3.1 Esempio: Forza peso

Prendiamo in esame il semplice caso di caduta verticale da fermo, sappiamo che:

$$\begin{cases} \vec{f}(t) = -mg\hat{k} \\ \vec{v}(t) = -gt\hat{k} \end{cases}$$

da cui ricaviamo la potenza istantanea

$$W(t) = mg^2t$$

Il lavoro compiuto è pari a:

$$L_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} W(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} mg^2t dt = \frac{1}{2}mg^2(t_B^2 - t_A^2)$$

Se $t_A = 0$, e $t_B = \sqrt{2h/g}$ (tempo di impatto), otteniamo il risultato noto:

$$L_{AB} = mgh \quad (\text{IV.43})$$

IV.3.2 *Esempio: Forza elastica*

Prendiamo in esame il caso di un'oscillazione con fase iniziale nulla, $\vartheta = 0$, sappiamo che:

$$\begin{cases} \vec{f}(t) = -kx\hat{i} = -k x_M \sin\Omega t \hat{i} \\ \vec{v}(t) = k\Omega x_M \cos\Omega t \hat{i} \end{cases}$$

Calcoliamo il lavoro integrando nel tempo la potenza:

$$L_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} W(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} -k^2 x_M^2 \Omega \sin\Omega t \cos\Omega t dt$$

da cui con i seguenti passaggi ricaviamo il risultato già noto:

$$L_{AB} = -k^2 x_M^2 \int_{t_A}^{t_B} \sin\Omega t \cos\Omega t d\Omega t$$

integrando

$$L_{AB} = -k^2 x_M^2 \left| \frac{\sin^2 \Omega t}{2} \right|_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 \quad (\text{IV.44})$$

IV.3.3 *Esempio: Forza di attrito viscoso*

Prendiamo in esame il semplice caso di caduta verticale da fermo in un fluido viscoso, sappiamo che:

$$\vec{f}(t) = -b\vec{v}$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} W(t) &= -bv^2(t) \\ L_{AB} &= \int_{t_A}^{t_B} W(t) dt = -b \int_{t_A}^{t_B} v^2(t) dt \end{aligned}$$

dall'espressione della velocità ricavata nel paragrafo, ponendo $\tau = m/b$

$$L_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} W(t) dt = -bv_{lim}^2 \int_{t_A}^{t_B} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 dt$$

che, assumendo l'istante iniziale $t_A = 0$, può essere integrato:

integrando

$$L_{AB} = -bv_{lim}^2 \int_0^{t_B} \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) dt \quad (\text{IV.45})$$

IV.4 FORZE CONSERVATIVE ED ENERGIA POTENZIALE

IV.4.1 Forze Conservative

Nel capitolo del lavoro abbiamo esaminato vari esempi di forze che in natura agiscono su una massa. Abbiamo visto che per alcune forze (peso, gravitazionale, elastica) il lavoro compiuto non dipende dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e quella finale. Mentre per altre (attrito cinematico, forze motrici) il lavoro dipende dal percorso. Possiamo quindi distinguere le forze in due categorie, e chiamiamo forze conservative quelle forze il cui lavoro non dipende dal percorso, e forze non conservative quelle che, al contrario, compiono un lavoro che dipende dal percorso.

Per le forze conservative notiamo anche un'altra proprietà, se il punto inizia A coincide con il punto finale B, cioè per un percorso chiuso, il lavoro complessivo della forza è nullo. Possiamo affermare che condizione affinché una forza sia conservativa è che il lavoro su un percorso chiuso è nullo.

IV.4.2 Energia Potenziale

Abbiamo finora incontrato tre casi di forze per le quali è verificata la proprietà che il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale:

$$L_{AB}^{peso} = mgz_A - mgz_B \quad (IV.46)$$

$$L_{AB}^{grav} = \frac{-GMm}{r_A} + \frac{-GMm}{r_B} \quad (IV.47)$$

$$L_{AB}^{el} = \frac{1}{2}x_A^2 - \frac{1}{2}x_B^2 \quad (IV.48)$$

Osserviamo che in tutti e tre i casi il lavoro è espresso mediante la differenza tra i valori che una stessa funzione scalare assume nella posizione iniziale e finale. Questa funzione della posizione è indicata con $U(\vec{r})$, ha le stesse dimensioni del lavoro e quindi è misurata in joule (J), e viene chiamata Energia Potenziale della massa m . Per i tre casi di cui sopra abbiamo:

$$U^{peso}(z) = mgz + C \quad (IV.49)$$

$$U^{grav}(r) = \frac{-GMm}{r} + C \quad (IV.50)$$

$$U^{el}(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (IV.51)$$

Possiamo notare che l'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria C che si elide quando sostituiamo la funzione U nel calcolo del lavoro. La scelta della costante $C=0$ corrisponde ad aver imposto il valore nullo dell'energia potenziale in un punto dello spazio scelto arbitrariamente:

$$\begin{aligned}
 U^{peso}(z = 0) &= 0 \\
 U^{grav}(r \rightarrow \infty) &= 0 \\
 U^{el}(x = 0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.52}$$

IV.5 ENERGIA MECCANICA

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto due forme di energia che attribuiamo a una massa puntiforme: l'energia cinetica K posseduta in virtù del fatto che essa è in moto, e l'energia potenziale U posseduta in quanto essa occupa una data posizione nello spazio dove agisce una forza conservativa.

Definiamo Energia Meccanica la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = K + U \tag{IV.53}$$

Durante il moto la posizione e la velocità della massa cambiano, pertanto anche K e U variano ma, come vedremo nel prossimo paragrafo, nel caso di forze conservative la loro somma, cioè l'energia meccanica E , rimane costante durante il moto.

IV.5.1 *Conservazione dell'Energia meccanica per le forze conservative*

Consideriamo il caso in cui agiscano solo forze conservative, applichiamo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica e la relazione tra lavoro e energia potenziale:

$$\begin{cases}
 L_{AB} = K_B - K_A \\
 L_{AB} = U_A - U_B
 \end{cases}
 \tag{IV.454}$$

Uguagliando

$$K_B - K_A = U_A - U_B \tag{IV.55}$$

Separando

$$K_B + U_B = K_A + U_A \tag{IV.56}$$

Otteniamo

$$E_B = E_A \tag{IV.57}$$

Essendo i due punti A e B scelti arbitrariamente sulla traiettoria, possiamo affermare che l'Energia Meccanica è costante durante il moto

$$E = \text{costante} \tag{IV.58}$$

Esaminiamo qui di seguito alcuni casi notevoli. Facciamo notare che, come vedremo, può essere conveniente risolvere problemi mediante le proprietà dell'energia meccanica, ma gli stessi problemi sono risolti agevolmente anche mediante l'applicazione del teorema del lavoro e dell'Energia Cinetica.

IV.5.1.1 Energia meccanica nel moto armonico

Prendiamo in esame la legge oraria di una massa collegata a una molla, che oscilla di moto armonico. L'unica forza che compie lavoro è la forza elastica che è conservativa pertanto l'energia meccanica deve essere costante in ogni punto e in ogni istante del moto. Verifichiamo che l'energia meccanica non dipende dal tempo.

Per semplicità prendiamo un moto armonico con angolo di fase iniziale $\vartheta = 0$, la legge oraria diventa:

$$x(t) = x_M \sin(\Omega t) \quad (\text{IV.59})$$

derivando ricaviamo la velocità:

$$v_x(t) = \Omega x_M \cos(\Omega t) \quad (\text{IV.60})$$

Dove sappiamo

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Calcoliamo ora l'energia meccanica in funzione del tempo:

$$E(t) = K(t) + U(t) \quad (\text{IV.61})$$

Dove

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2} m v_x^2 \\ U = \frac{1}{2} k x^2 \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

Sostituiamo

$$E(t) = \frac{1}{2} m \Omega^2 x_M^2 \cos^2(\Omega t) + \frac{1}{2} k x_M^2 \sin^2(\Omega t) \quad (\text{IV.63})$$

utilizzando l'espressione della pulsazione Ω :

$$E(t) = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_M^2 \cos^2(\Omega t) + \frac{1}{2} k x_M^2 \sin^2(\Omega t) \quad (\text{IV.64})$$

semplificando e mettendo a fattore comune abbiamo:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_M^2 [\cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)] \quad (\text{IV.65})$$

da cui ricaviamo:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_M^2 \quad (\text{IV.66})$$

L'energia meccanica è costante ed è pari alla massima energia potenziale. Inoltre, utilizzando la relazione

$$v_M = \Omega x_M \quad (\text{IV.67})$$

otteniamo anche

$$E(t) = \frac{1}{2} m v_M^2 \quad (\text{IV.68})$$

L'energia meccanica è costante ed è pari alla massima energia cinetica della massa. Se tracciamo il grafico dell'energia potenziale e cinetica in un periodo, osserviamo che esse sono sfasate di $\pi/2$; durante l'oscillazione si ha un continuo scambio tra l'energia cinetica e quella potenziale mentre la somma delle due energie rimane costante in ogni istante.

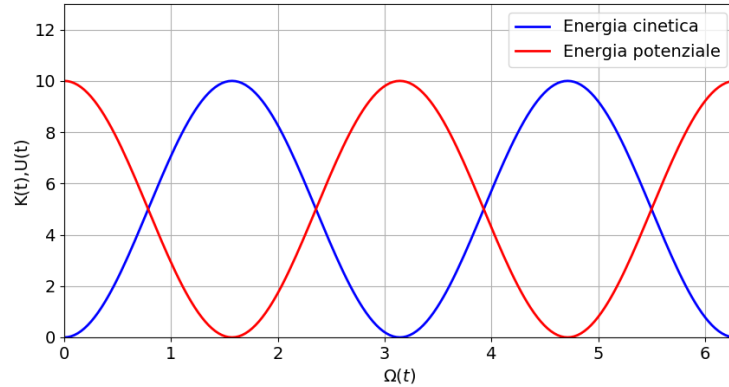


Fig.68, Scambio tra energia potenziale ed energia cinetica in un oscillatore armonico

IV.5.1.2 Esempio: Piano liscio inclinato con molla

Consideriamo una massa m che si trova su un piano liscio inclinato di un angolo ϑ . La massa inizialmente ferma viene lasciata scivolare da un'altezza h , al termine dello scivolo comprime una molla di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k . Vogliamo calcolare la massima compressione della molla.

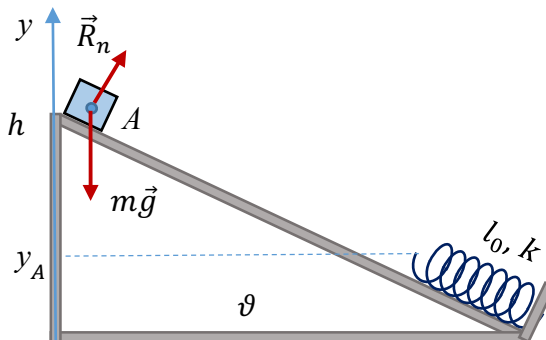


Fig.69a, Conservazione energia meccanica

Chiamiamo Δl la compressione massima della molla, calcoliamo la quota dell'estremo libero della molla prima e dopo la compressione:

$$\begin{cases} y_A = l_0 \sin\vartheta \\ y_B = (l_0 - \Delta l) \sin\vartheta \end{cases}$$

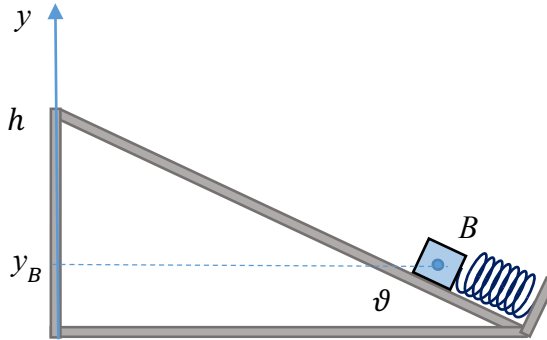


Fig. 69b, Conservazione energia meccanica

La massa è ferma sia nella posizione iniziale A sia nella posizione finale B, pertanto in A e B la sua energia cinetica sarà nulla. Applichiamo la relazione

$$E_B = E_A$$

otteniamo:

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 + mgy_B = mgh$$

sostituiamo

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(l_0 - \Delta l) \sin\vartheta = mgh$$

da cui si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$\Delta l^2 - 2\frac{mg}{k}\Delta l \sin\vartheta - 2\frac{mg}{k}(h - l_0 \sin\vartheta) = 0$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \sin\vartheta \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k} \sin\vartheta\right)^2 + 2\frac{mg}{k}(h - l_0 \sin\vartheta)}$$

IV.5.2 L'Energia meccanica in presenza di forze conservative e non conservative

Consideriamo ora il caso in cui agiscano forze conservative e non conservative, applichiamo il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, ricordando che esso riguarda il lavoro di tutte le forze agenti, L_{AB}^c (conservative) e L_{AB}^{nc} (non conservative), e la relazione tra lavoro e energia potenziale che vale solo per le forze conservative:

$$\begin{cases} L_{AB}^c + L_{AB}^{nc} = K_B - K_A \\ L_{AB}^c = U_A - U_B \end{cases} \quad (IV.69)$$

sostituendo abbiamo

$$U_A - U_B + L_{AB}^{nc} = K_B - K_A \quad (IV.70)$$

da cui otteniamo:

$$E_B = E_A + L_{AB}^{nc} \quad (IV.71)$$

In questo caso l'energia meccanica non si conserva, diminuisce se ci sono forze frenanti di attrito per cui $L_{AB}^{nc} < 0$, aumenta se agiscono forze acceleranti motrici tali che $L_{AB}^{nc} > 0$.

IV.5.2.1 Esempio: Piano scabro con molla

Consideriamo ora lo stesso problema VI.4.1.2 assumendo però il piano scabro con coefficiente di attrito cinematico μ_c e, supponiamo che la massa scivoli lungo il piano (non è bloccata dalla forza di attrito statico). Ci chiediamo qual è la massima compressione della molla. In questo caso abbiamo a che fare sia con forze conservative sia non conservative, la relazione da utilizzare è:

$$E_B = E_A + L_{AB}^{nc}$$

che diventa

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 + mgy_B = mgh - \mu_c R_n d_{AB}$$

con

$$\begin{cases} y_B = (l_0 - \Delta l) \sin\vartheta \\ d_{AB} = \frac{(h - y_B)}{\sin\vartheta} = \frac{h}{\sin\vartheta} - (l_0 - \Delta l) \end{cases}$$

IV.5.2.2 Esempio: Forze motrici

Consideriamo di nuovo il problema del paragrafo VI.2.1.5

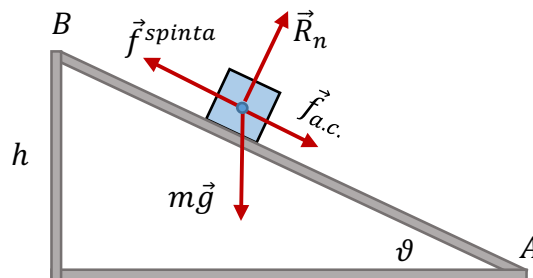


Fig.70, Energia meccanica con forze non conservative

e cerchiamo di risolverlo mediante l'energia meccanica. Siamo in presenza di una forza motrice non conservativa che spinge la massa. Supponiamo che la massa abbia velocità nulla nei punti di partenza e di arrivo, ci chiediamo quanto vale il lavoro L_{AB}^{spinta} compiuto dalla forza motrice. Ricordiamo che questa forza è incognita e che non siamo interessati a conoscere il suo valore lungo il percorso, ma soltanto il lavoro compiuto.

Utilizziamo la relazione:

$$E_B = E_A + L_{AB}^{nc}$$

con:

$$\begin{cases} E_A = 0 \\ E_B = mgh \\ L_{AB}^{nc} = -\mu_c R_n d_{AB} + L_{AB}^{spinta} \end{cases}$$

da cui ricaviamo:

$$L_{AB}^{spinta} = mgh + \mu_c R_n d_{AB}$$

sostituendo abbiamo

$$L_{AB}^{spinta} = mgh \left(1 + \frac{\mu_c}{\tan\vartheta} \right)$$

Capitolo V: LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

V.1 CENNI STORICI

L'astronomia moderna ha avuto inizio con Nicolò Copernico il quale sostenne il modello eliocentrico (1543) del sistema solare, confutando la tesi geocentrica di Tolomeo. Copernico elaborò la sua teoria basandosi principalmente sulle osservazioni degli astronomi precedenti, nel tentativo di risolvere le evidenti contraddizioni del sistema tolomaico. Nella seconda metà del '500 si ebbe un'importante rivoluzione nel campo dell'osservazione dei fenomeni celesti ad opera di Tycho Brahe. Egli, avviò una sistematica osservazione del moto dei pianeti e delle comete, realizzando un osservatorio con cui migliorò notevolmente la precisione delle misure e raccolse un'elevata mole di dati, in particolare del pianeta Marte, facilmente osservabile. Egli elaborò un complesso modello in cui manteneva ancora la terra al centro dell'universo, ma gli altri pianeti erano in rotazione intorno al sole. Fu un giovane astronomo, Keplero, collaboratore e successore di Brahe, che utilizzando i dati esistenti e studiando ancora più in dettaglio il moto di Marte, elaborò nel 1619 le tre leggi che regolano il moto dei pianeti intorno al sole.

Con le sue leggi Keplero gettò le basi della meccanica celeste, abbattendo l'ultima barriera alla radicata convinzione che i pianeti si muovessero su orbite circolari con moto uniforme.

Un forte impulso all'osservazione fu dato in quegli anni da Galileo Galilei che costruì uno telescopio che una volta puntato verso il cielo permise di osservare un universo mai visto prima: la Luna aveva una superficie scabrosa, Giove era circondato da quattro satelliti che gli ruotavano intorno, la Via Lattea era formata da milioni di stelle, Saturno mostrava uno strano aspetto, mentre Venere aveva le fasi come la Luna.

Le rivoluzionarie idee e i notevoli progressi nell'osservazione astronomica diedero impulso agli studi effettuati da Isac Newton il quale nel 1679 formulò la legge di Gravitazione Universale che è stata alla base della comprensione della della gravitazione fino all'avvento della teoria della relatività generale di Einstein.

V.2 LEGGI DI KEPLERO

Giovanni Keplero analizzando una grande quantità di dati, nel 1619 derivò alcune proprietà generali del moto dei pianeti che sintetizzò nelle sue famose tre leggi:

- 1) I pianeti compiono orbite piane ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi.
- 2) Durante il moto, il raggio che unisce il sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.
- 3) Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole

V.3 LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON

Su base puramente empirica, e basandosi sui risultati di studiosi come Hooke e Keplero, nel 1679 Newton formulò la legge di Gravitazione Universale con la quale affermò che due masse puntiformi si attirano con una forza che è proporzionale al prodotto delle masse (gravitazionali) e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$\vec{f}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{V.1})$$

Newton dimostrò anche che se le due masse sono sferiche e omogenee esse si attirano con la stessa legge, come se ci fossero due masse puntiformi collocate nei centri delle sfere. La

costante G fu misurata successivamente da Henry Cavendish nel 1798 (più di un secolo dopo) con un esperimento basato su un pendolo a torsione, essa vale:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (\text{V.2})$$

La forza gravitazionale agisce su tutti i corpi del sistema solare i quali si muovono sotto l'azione di un'attrazione reciproca. Ad esempio Terra e Luna si attraggono con una forza uguale e contraria che influenza il moto di entrambi. Il moto di ciascun pianeta è causato dalla forza gravitazionale del Sole e di tutti gli altri pianeti (e satelliti) e il moto risultante è in linea di principio complesso. Possiamo però adottare delle semplificazioni per le orbite dei pianeti:

- 1) date le piccole dimensioni dei corpi (sole e pianeti) rispetto alle distanze dei punti dell'orbita, il sistema solare può essere considerato un classico esempio di sistema di punti materiali, argomento che sarà presentato in dettaglio nel prossimo capitolo.
- 2) essendo la massa del Sole molto maggiore della massa dei pianeti, possiamo considerare il moto dei pianeti intorno al sole assumendo quest'ultimo fermo.

Sotto queste ipotesi verifichiamo le leggi di Keplero alla luce della legge della gravitazione di Newton.

V.3.1 *Orbite piane e velocità areolare*

Per la prima legge non ci occupiamo del calcolo dell'orbita che può essere ricavata mediante un elaborato calcolo analitico. Ci occupiamo invece della dimostrazione che le orbite sono piane. Abbiamo già visto nel paragrafo III.11.4.2 che questa proprietà è dovuta al fatto che la forza gravitazionale è una forza centrale e scegliendo come polo il centro del sole, il momento angolare del pianeta è costante durante il moto:

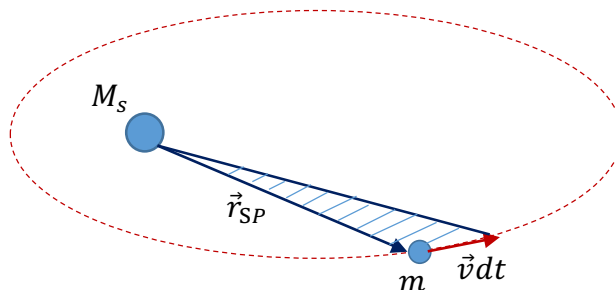


Fig.70, Momento angolare di un corpo in un campo gravitazionale centrale

$$\vec{p}_S(t) = \text{costante} \quad (\text{V.3})$$

Essendo il vettore momento angolare \vec{p}_S perpendicolare in ogni istante al piano individuato da \vec{r}_{SP} e $\vec{v}dt$ (piano istantaneo del moto), la sua direzione è costante nel tempo, e il piano del moto sarà il medesimo, cioè le orbite sono piane. Inoltre abbiamo ricavato che:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{p}_S}{2m} \quad (\text{V.4})$$

da cui deduciamo che se $\vec{p}_S(t)$ è costante, la velocità areolare $\vec{A}(t)$ è costante.

V.3.2 *Terza legge di Keplero*

La terza legge di Keplero è enunciata per una generica orbita di forma ellittica, detto T il periodo di rivoluzione e r la distanza media del pianeta dal Sole, risulta:

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{costante} \quad (\text{V.5})$$

La terza legge di Keplero può essere facilmente dimostrata per un'orbita circolare.

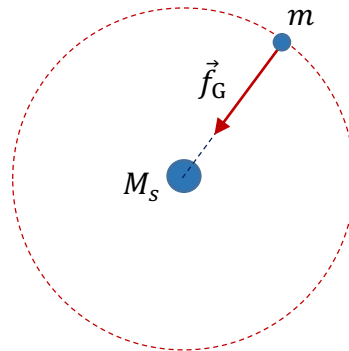


Fig.71, Terza legge di Keplero per un'orbita circolare

Applichiamo infatti il II Principio della dinamica al moto della massa m sotto l'azione della forza gravitazionale:

$$-G \frac{M_S m}{r^2} \hat{r} = m \vec{a} \quad (\text{V.6})$$

considerando che l'accelerazione in questo caso è solo centripeta:

$$\vec{a} = -\omega^2 r \hat{r} \quad (\text{V.7})$$

Otteniamo

$$-G \frac{M_S}{r^2} = -\omega^2 r \quad (\text{V.8})$$

da cui ricaviamo

$$\omega^2 r^3 = G M_S \quad (\text{V.9})$$

Inoltre, ricordando che

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{V.10})$$

Otteniamo

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S} \quad (\text{V.11})$$

In conclusione, dall'osservazione del moto dei pianeti Keplero trovò la legge di proporzionalità su base empirica, mentre Newton ne diede una dimostrazione partendo dalla legge della gravitazione universale. In tal modo essi ebbero a disposizione una relazione tra il moto dei vari pianeti che consentì di misurare le loro distanze. Infatti, noto ad esempio il periodo di rivoluzione T_T e il raggio dell'orbita terrestre r_T , misurando il periodo di rivoluzione di uno dei pianeti del sistema solare T_P è possibile ricavare la sua distanza r_P :

$$r_P = r_T \sqrt[3]{\left(\frac{T_P}{T_T}\right)^2} \quad (\text{V.12})$$

V.3.3 *La costante G e le masse gravitazionali*

E' interessante notare che né Keplero né Newton conoscevano il valore della costante G , che sarà misurata molto dopo da Cavendish. La conoscenza della costante G fu un grosso passo avanti in quanto consentì di misurare le masse gravitazionali.

V.3.3.1 La massa della Terra

Abbiamo già presentato i risultati sperimentali di Galileo Galilei con la caduta dei gravi, egli mostrò che tutti i corpi materiali cadono nel vuoto con la stessa accelerazione che in prossimità della superficie terrestre è pari a $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Dalla legge della gravitazione universale di Newton applicata sulla superficie terrestre e, considerando la Terra come una massa a simmetria sferica che agisce come se tutta la massa fosse collocata nel suo centro, abbiamo:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad (\text{V.13})$$

da cui ricaviamo

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} \quad (\text{V.14})$$

sostituendo otteniamo

$$M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

V.3.3.2 La massa del Sole

Dalla terza legge di Keplero per il Sole otteniamo:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \quad (\text{V.15})$$

Sostituendo i dati della terra, abbiamo:

$$\begin{cases} r_T = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m} \\ T_T = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \\ M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

V.3.4 *Orbite circolari e geostazionarie*

Consideriamo il caso di un'orbita circolare intorno a una massa qualsiasi M , per essa vale la seguente relazione tra la velocità, che chiamiamo v_c e il raggio dell'orbita circolare, che chiamiamo r_c :

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} \quad (\text{V.17})$$

Questo risultato ci mostra che, assegnata un'orbita circolare di raggio r_c , essa può essere percorsa da una massa solo alla velocità v_c data dalla formula.

La Terra, ad esempio, descrive un'orbita quasi circolare di raggio $r_T = 1,496 \cdot 10^{11}$ m, se nella formula si sostituisce la massa del Sole e la costante di gravitazione universale G , si ricava una velocità di rivoluzione intorno al Sole pari a circa 30 km/s (pari a 108.000 km/h).

La formula ci consente di ricavare anche a che distanza r_g possono essere collocati i satelliti geostazionari per le comunicazioni. Infatti, affinché sia geostazionario il satellite deve ruotare con la stessa velocità angolare di rotazione della terra che è pari a $\omega_T = 2\pi/T_T$, dove T_T è il periodo di rotazione della Terra intorno al proprio asse (24 h). Se riscriviamo la formula in termini di velocità angolare, sapendo che in questo caso risulta $v_g = \omega_T r_g$, otteniamo il raggio dell'orbita geostazionaria r_g pari a

$$r_g = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega_T^2}} = 42.168 \text{ km} \quad (\text{V.18})$$

V.4 ENERGIA MECCANICA GRAVITAZIONALE

V.4.1 *Energia meccanica su un'orbita circolare*

In questo paragrafo vogliamo discutere le proprietà delle traiettorie delle masse attratte dal campo gravitazionale in relazione alla loro energia meccanica. A tale scopo consideriamo innanzitutto una massa m in orbita circolare intorno a una massa M , abbiamo visto che vale la seguente relazione tra la velocità v_c e il raggio dell'orbita r_c :

$$v_c^2 = \frac{GM}{r_c} \quad (\text{V.19})$$

che sostituiamo nell'espressione dell'energia meccanica E_c per l'orbita circolare:

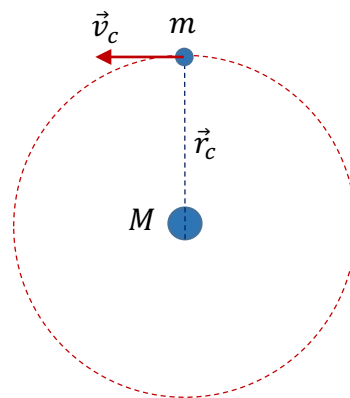


Fig.72, *Energia meccanica per un'orbita circolare*

otteniamo

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_c} - \frac{GMm}{r_c} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r_c} \quad (\text{V.20})$$

Nel caso di un'orbita circolare, l'energia meccanica è pari alla metà dell'energia potenziale, ed è negativa:

$$E_c = \frac{U_c}{2} < 0 \quad (\text{V.21})$$

V.4.2 *Energia meccanica su un'orbita ellittica*

Esaminiamo ora i casi in cui nella posizione \vec{r}_c la massa m ha una velocità diversa dalla velocità v_c necessaria a tenerla su un'orbita circolare:

- 1) $0 < v < v_c$, la traiettoria si deforma e diventa ellittica, con il Sole nel secondo fuoco. L'energia meccanica per questa orbita è sempre negativa, con $|E_e| > |E_c|$. Nel caso limite in cui la massa m ha velocità nulla, l'energia meccanica diventa pari alla sola energia potenziale e la traiettoria sarà la linea retta verticale di caduta verso la massa M .

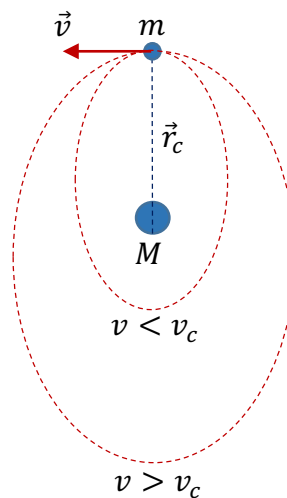
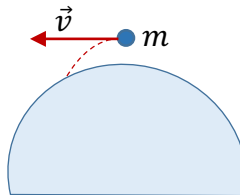


Fig.73, *Energia meccanica e traiettorie dei corpi*

Quando un oggetto viene lanciato in prossimità della superficie terrestre, esso tende a compiere una traiettoria ellittica in cui il centro della Terra si trova nel secondo fuoco, ovviamente questa traiettoria impatta sulla superficie della Terra. Il tratto di traiettoria ellittica è ben approssimato dal moto parabolico che abbiamo trovato assumendo l'accelerazione di gravità costante.



- 2) $v_c < v < v_f$, la traiettoria diventa un'ellisse in cui la massa M occupa il primo fuoco. In questo caso l'energia meccanica è sempre negativa ma, in valore assoluto $|E_e| < |E_c|$. Maggiore è la velocità, maggiore sarà la distanza massima raggiunta dalla massa nel suo moto ellittico. Anche in questo caso abbiamo una condizione limite, quando la massa ha una velocità, della *velocità di fuga* v_f , tale che essa si sposta fino all'infinito senza fare ritorno. Non abbiamo più un'orbita, ma una traiettoria aperta parabolica. Per

il calcolo della velocità di fuga è sufficiente imporre che la massa raggiunga l'infinito con velocità nulla, da cui ricaviamo che:

$$E_{\infty} = U_{\infty} + K_{\infty} = 0 \quad (\text{V.22})$$

Abbiamo quindi che la traiettoria si apre e diventa parabolica se l'energia meccanica è nulla. Essendo l'energia meccanica costante, dovrà essere nulla anche nella posizione \vec{r}_c , cioè:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_c} = 0 \quad (\text{V.23})$$

da cui ricaviamo:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r_c}} \quad (\text{V.24})$$

Notiamo che $v_f = \sqrt{2} v_c$. Se lanciamo un oggetto con la velocità di fuga, esso sfugge al campo gravitazionale e non fa più ritorno. Sulla superficie terrestre la velocità di fuga è pari a $v_f = 11,2 \text{ km/s}$ (40.320 km/h).

3) $v > v_f$. La traiettoria diventa un'iperbole, l'energia meccanica $E > 0$.

Affinché una massa descriva un'orbita chiusa, la sua energia meccanica deve essere negativa. In tal caso parliamo anche di sistemi legati.

Capitolo VI: OSCILLATORI MECCANICI

I fenomeni oscillatori hanno un ruolo rilevante nel campo dell'ingegneria civile e industriale. Sappiamo che le strutture civili sono soggette ad oscillazioni e vibrazioni di varia natura, e per smorzare le oscillazioni si usano gli ammortizzatori e isolatori.

Gli smorzatori hanno la funzione di far dissipare in modo controllato l'energia accumulata dalla struttura a causa della sua elasticità. Ad esempio un forte vento che spinge un ponte lo deforma elasticamente causandone l'oscillazione. Gli isolatori, invece, hanno la funzione di disaccoppiare il moto del terreno dagli edifici nel caso di terremoti, per ridurre la quantità di energia trasferita alla struttura.

Nei prossimi paragrafi studieremo gli oscillatori smorzati, che sono alla base degli attenuatori, e successivamente gli oscillatori forzati che ci permetteranno di capire il funzionamento degli isolatori.

VI.1 OSCILLATORE SMORZATO

Nei capitoli precedenti abbiamo incontrato due casi di oscillatori meccanici ideali: il sistema massa molla e il pendolo semplice, nell'ipotesi di assenza di attriti. Per questi sistemi abbiamo ricavato la legge oraria descritta dal moto armonico che è un'oscillazione persistente nel tempo. Sappiamo che nella realtà le forze di attrito rallentano il moto, le oscillazioni reali non sono persistenti, l'ampiezza dell'oscillazione è smorzata fino a sparire.

Ci proponiamo, in questo paragrafo, di studiare il caso di un oscillatore smorzato da un attrito di tipo viscoso $\vec{f}_{a.v.} = -b\vec{v}$.

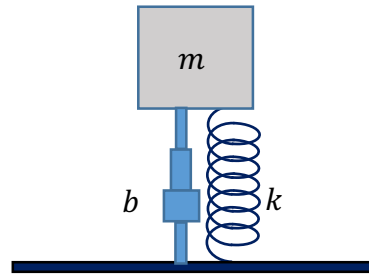


Fig.74, Oscillatore massa molla con attrito viscoso

Applichiamo il II Principio:

$$\vec{f}_{el} + \vec{f}_{a.v.} = m\vec{a} \quad (VI.1)$$

proiettiamo sull'asse x :

$$-kx - bv_x = ma_x \quad (VI.2)$$

da cui:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (VI.3)$$

dove \ddot{x} e \dot{x} sono rispettivamente la derivata seconda e la derivata prima della funzione incognita $x(t)$.

Abbiamo a che fare con una equazione differenziale lineare del II ordine a coefficienti costanti, omogenea (perché =0). Si assume per questo tipo di equazione differenziale una soluzione del tipo:

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \quad (VI.4)$$

Verifichiamo: deriviamo tale espressione e sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$\dot{x}(t) = \alpha Ae^{\alpha t}$$

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 Ae^{\alpha t} \quad (VI.5)$$

$$m\alpha^2 Ae^{\alpha t} + b\alpha Ae^{\alpha t} + kAe^{\alpha t} = 0$$

semplificando abbiamo

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0 \quad (VI.6)$$

che, ponendo per comodità,

$$\begin{cases} \frac{b}{m} = 2\gamma \\ \frac{k}{m} = \Omega_0^2 \end{cases} \quad (VI.7)$$

diventa:

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \Omega_0^2 = 0 \quad (\text{VI.8})$$

che rappresenta l'equazione caratteristica (di secondo grado) dell'equazione differenziale. Essa avrà in generale due soluzioni:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2} \quad (\text{VI.9})$$

La funzione $x(t) = Ae^{\alpha t}$ è quindi una soluzione dell'equazione differenziale purché la costante α assuma uno dei due valori $\alpha_{1,2}$. La soluzione generale è data dalla combinazione lineare delle due soluzioni relative ai due possibili valori $\alpha_{1,2}$:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (\text{VI.10})$$

Sappiamo che a seconda del segno del discriminante $\Delta = \gamma^2 - \Omega_0^2$, le soluzioni sono reali o complesse. Riscriviamo la soluzione generale come segue:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\Delta}t} + Be^{-\sqrt{\Delta}t}) \quad (\text{VI.11})$$

Ricaviamo ora le costanti A e B che dipendono dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases} \quad (\text{VI.12})$$

ricaviamo l'espressione della velocità:

$$v_x(t) = -\gamma e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\Delta}t} + Be^{-\sqrt{\Delta}t}) + e^{-\gamma t} \sqrt{\Delta} (Ae^{\sqrt{\Delta}t} - Be^{-\sqrt{\Delta}t}) \quad (\text{VI.13})$$

E' conveniente scrivere tale espressione come:

$$v_x(t) = -\gamma x(t) + e^{-\gamma t} \sqrt{\Delta} (Ae^{\sqrt{\Delta}t} - Be^{-\sqrt{\Delta}t}) \quad (\text{VI.14})$$

Sostituendo le condizioni iniziali troviamo:

$$\begin{cases} x_0 = (A + B) \\ v_{x0} = -\gamma x_0 + \sqrt{\Delta}(A - B) \end{cases} \quad (\text{VI.15})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} (A + B) = x_0 \\ (A - B) = \frac{v_{x0} + \gamma x_0}{\sqrt{\Delta}} \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

Risolvendo abbiamo:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_{x0} + \gamma x_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \\ B = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_{x0} + \gamma x_0}{\sqrt{\Delta}} \right) \end{cases} \quad (\text{VI.17})$$

Pertanto, date le condizioni iniziali e i parametri fisici, la legge oraria è determinata:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \left(\frac{e^{\sqrt{\Delta}t} + e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2} \right) + \frac{v_{x0} + \gamma x_0}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}}{2} \right) \right] \quad (\text{VI.18})$$

Analizziamo ora i casi più rilevanti:

VI.1.1 Moto smorzato senza oscillazioni

Se l'effetto dell'attrito domina su quello della forza elastica di richiamo, $\gamma^2 > \Omega_0^2$, risulta

$$\Delta > 0 \quad (\text{VI.19})$$

Nella soluzione generale del moto abbiamo solo termini esponenziali dove però, essendo $\gamma^2 > \Omega_0^2$, domina il termine decrescente. In questo caso il moto della massa è caratterizzato da un avvicinamento alla posizione di equilibrio, senza innescare oscillazioni.

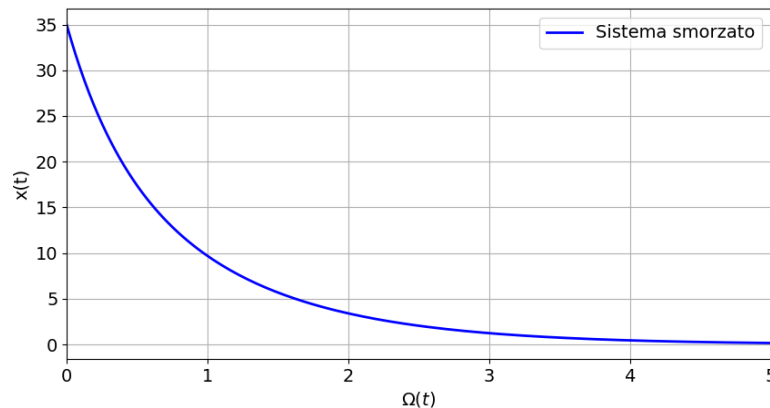


Fig. 75, Legge oraria di un oscillatore smorzato con attrito viscoso dominante

VI.1.2 Smorzamento critico

Se l'effetto dell'attrito equipara quello della forza elastica di richiamo, $\gamma^2 = \Omega_0^2$, risulta

$$\Delta = 0 \quad (\text{VI.20})$$

Troviamo due soluzioni $\alpha_{1,2}$ uguali e coincidenti e pari a $-\gamma$. La soluzione generale del moto in questo caso assume la forma:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \quad (\text{VI.21})$$

Anche il questo caso è dominante il termine esponenziale decrescente, il moto sarà smorzato (privo di oscillazioni) ed è detto moto con *smorzamento critico*. Notiamo che rispetto al caso precedente l'ampiezza del moto decresce e la massa tende alla posizione di equilibrio con la massima rapidità.

VI.1.3 Oscillazioni smorzate

Se è l'effetto della forza elastica di richiamo a dominare sull'attrito, $\gamma^2 < \Omega_0^2$, risulta

$$\Delta < 0 \quad (VI.22)$$

Se poniamo

$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} = i\Omega \quad (VI.23)$$

Le radici dell'equazione sono complesse e coniugate (Cap.I.7), e possiamo scriverle come:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\Omega \quad (VI.24)$$

da cui:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \left(\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right) + \frac{v_{x0} + \gamma x_0}{i\Omega} \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2} \right) \right] \quad (VI.25)$$

e sapendo dalle formule di Eulero (I,7) che:

$$\begin{cases} \left(\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \right) = \cos \Omega t \\ \left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} \right) = \sin \Omega t \end{cases} \quad (VI.26)$$

otteniamo:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \Omega t + \left(\frac{v_{x0} + \gamma x_0}{\Omega} \right) \sin \Omega t \right] \quad (VI.27)$$

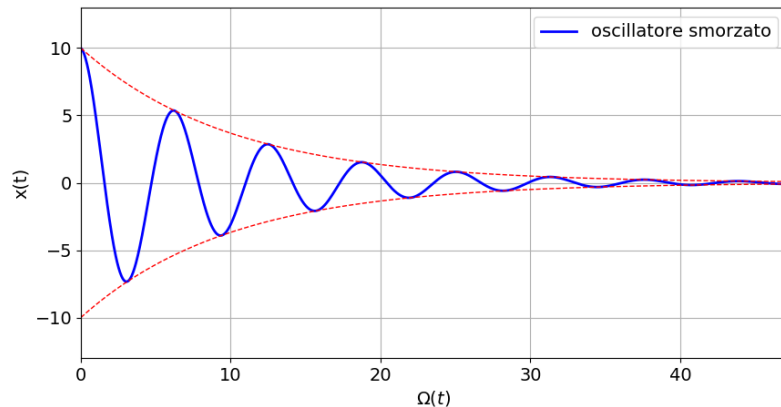


Fig.76, Oscillatore smorzato, isocronismo

La massa esegue delle oscillazioni di ampiezza esponenziale decrescente intorno alla posizione di equilibrio. Le oscillazioni non sono periodiche ma sono *isocrone*, cioè il periodo di tempo necessario per un'oscillazione completa è costante, al punto che possiamo definire il periodo di isocronismo:

$$T_{is} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (VI.28)$$

Ricordando che il periodo dell'oscillatore armonico senza attrito vale

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

Ricaviamo

$$T_{is} = \frac{2\pi}{\Omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega_0}\right)^2}} \quad (\text{VI.29})$$

Notiamo che con l'aumentare dell'attrito le oscillazioni smorzate sono isocrone ma più lente.

VI.1.2.1 Energia negli oscillatori smorzati

A causa della presenza dell'attrito viscoso l'energia meccanica diminuirà nel tempo. Qual è il suo andamento temporale? Quanta energia meccanica viene persa dall'oscillatore scontato in un periodo T_{is} ?

Consideriamo il caso di un oscillatore smorzato di cui sono noti i parametri fisici m , k , b , con le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.30})$$

La massa parte da ferma da una posizione x_0 e inizia a oscillare intono alla posizione di equilibrio. In questo caso la legge oraria diventa:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \Omega t \\ v(t) = -\gamma x_0 e^{-\gamma t} \cos \Omega t - \Omega x_0 e^{-\gamma t} \sin \Omega t \end{cases} \quad (\text{VI.31})$$

da cui ricaviamo l'andamento temporale dell'energia potenziale e cinetica:

$$\begin{cases} U(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\gamma t} \cos^2 \Omega t \\ K(t) = \frac{1}{2} m (-\gamma x_0 e^{-\gamma t} \cos \Omega t - \Omega x_0 e^{-\gamma t} \sin \Omega t)^2 \end{cases} \quad (\text{VI.32})$$

che sono riportate in figura. Osserviamo che anche in questo caso c'è uno scambio continuo tra energia potenziale e cinetica, ma l'energia meccanica totale non rimane costante a causa della dissipazione per effetto dell'attrito.

L'energia meccanica iniziale è solo potenziale e vale:

$$E_0 = \frac{1}{2} k x_0^2 \quad (\text{VI.33})$$

Dopo un periodo di sincronismo T_{is} abbiamo:

$$\begin{cases} x(T_{is}) = x_0 e^{-\gamma T_{is}} \\ v(T_{is}) = -\gamma x_0 e^{-\gamma T_{is}} \end{cases} \quad (\text{VI.34})$$

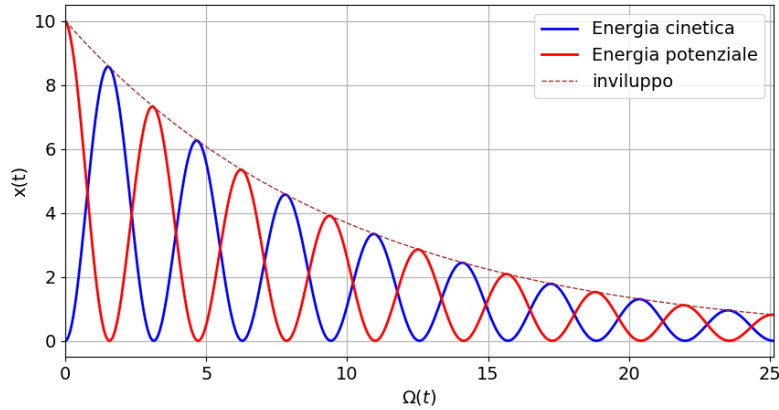


Fig.76, Energia potenziale ed elastica in un oscillatore smorzato

pertanto l'energia meccanica vale:

$$E_T = \frac{1}{2} kx_0^2 e^{-2\gamma T_{is}} + \frac{1}{2} m\gamma^2 x_0^2 e^{-2\gamma T_{is}} = \frac{1}{2} kx_0^2 e^{-2\gamma T_{is}} \left(1 - \frac{m\gamma^2}{k} \right) \quad (\text{VI.35})$$

Cioè

$$E_T = \frac{1}{2} kx_0^2 e^{-2\gamma T_{is}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega_0} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.36})$$

In cui osserviamo che l'ampiezza dell'energia decresce nel tempo esponenzialmente con una costante di tempo:

$$\tau_E = \frac{1}{2\gamma} \quad (\text{VI.37})$$

La variazione di energia meccanica relativa in un periodo di sincronismo è definita da:

$$\frac{E_0 - E_T}{E_0} = 1 - e^{-2\gamma T_{is}} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega_0} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.38})$$

Gli oscillatori meccanici soggetti a piccole forze di attrito viscoso, tali che $\gamma \ll \Omega_0$ presentano una debole diminuzione di energia durante un'oscillazione:

$$\frac{E_0 - E_T}{E_0} \cong 1 - e^{-2\gamma T_{is}} \cong 2\gamma T_{is} \quad (\text{VI.39})$$

VI.1.2.2 Fattore di merito Q

Per misurare la "bontà" di un oscillatore introduciamo il cosiddetto fattore di merito Q . Esso è definito come:

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{E_0 - E_T} \quad (\text{VI.40})$$

e dipende pertanto dal rapporto tra l'energia meccanica iniziale e l'energia dissipata in un periodo. Di fatto fornisce il numero di oscillazioni compiute in un tempo di decadimento. Utilizzando l'espressione ricavata per $\gamma \ll \Omega_0$ abbiamo:

$$Q \cong \frac{\Omega_0}{2\gamma} = \Omega_0 \tau_E \quad (\text{VI.41})$$

VI.2 OSCILLATORE FORZATO

A causa dei fenomeni di attrito, tutti gli oscillatori meccanici in moto libero eseguono oscillazioni smorzate. Le oscillazioni possono diventare persistenti solo se una forza esterna agisce sulla massa e amplifica o sostiene l'ampiezza dell'oscillazione. Tale forza applicata è una forza motrice che trasferisce energia meccanica alla massa e compensa la perdita di energia per attrito.

Consideriamo il caso di un moto forzato da una azione esterna sinusoidale, la forza applicata è data da:

$$f_f(t) = f_M \sin(\Omega_f t) \quad (\text{VI.42})$$

Applicando il II Principio abbiamo:

$$f_{el} + f_{a.v.} + f_f = ma_x \quad (\text{VI.43})$$

da cui ricaviamo la seguente equazione differenziale:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{f_M}{m} \sin(\Omega_f t) \quad (\text{VI.44})$$

Dall'esperienza di osserva che una forza applicata sinusoidale, superato un periodo di transitorio produce un'oscillazione sinusoidale forzata $x_f(t)$ avente la stessa frequenza, ma con ampiezza e fase che dipendono dai parametri fisici del sistema:

$$x_f(t) = x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) \quad (\text{VI.45})$$

Anche in questo caso per trovare le costanti x_{fM} e θ_f deriviamo e sostituiamo nell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \Omega_f x_M \cos(\Omega_f t + \theta_f) \\ \ddot{x}_f = -\Omega_f^2 x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) \end{cases} \quad (\text{VI.46})$$

Sostituendo abbiamo:

$$-\Omega_f^2 x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) + 2\gamma\Omega_f x_M \cos(\Omega_f t + \theta_f) + \Omega_0^2 x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) = \frac{f_M}{m} \sin(\Omega_f t)$$

Per risolvere questa equazione dobbiamo sviluppare i tre termini sinusoidali

$$\begin{cases} I) -\Omega_f^2 x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) = -\Omega_f^2 x_M (\sin\Omega_f t \cos\theta_f + \cos\Omega_f t \sin\theta_f) \\ II) 2\gamma\Omega_f x_M \cos(\Omega_f t + \theta_f) = 2\gamma\Omega_f x_M (\cos\Omega_f t \cos\theta_f - \sin\Omega_f t \sin\theta_f) \\ III) \Omega_0^2 x_M \sin(\Omega_f t + \theta_f) = \Omega_0^2 x_M (\sin\Omega_f t \cos\theta_f + \cos\Omega_f t \sin\theta_f) \end{cases}$$

raggruppiamo tutti i termini in $\sin(\Omega_f t)$ e $\cos(\Omega_f t)$ i quali devono soddisfare separatamente le equazioni:

$$\begin{cases} x_M \sin(\Omega_f t) [(\Omega_0^2 - \Omega_f^2) \cos\theta_f - 2\gamma\Omega_f \sin\theta_f] = \frac{f_M}{m} \sin(\Omega_f t) \\ x_M \cos(\Omega_f t) [(\Omega_0^2 - \Omega_f^2) \sin\theta_f + 2\gamma\Omega_f \cos\theta_f] = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo ampiezza e fase dell'oscillazione forzata:

$$\begin{cases} x_M = \frac{f_M}{m[(\Omega_0^2 - \Omega_f^2)\cos\theta_f - 2\gamma\Omega_f\sin\theta_f]} \\ \tan\theta_f = \frac{-2\gamma\Omega_f}{(\Omega_0^2 - \Omega_f^2)} \end{cases} \quad (\text{VI.47})$$

Possiamo sviluppare ulteriormente l'espressione dell'ampiezza dell'oscillazione ponendo:

$$\begin{cases} Z = \sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega_f^2)^2 + (2\gamma\Omega_f)^2} \\ -2\gamma\Omega_f = Z\sin\theta_f \\ (\Omega_0^2 - \Omega_f^2) = Z\cos\theta_f \end{cases} \quad (\text{VI.48})$$

Sostituiamo nell'espressione dell'ampiezza, otteniamo:

$$x_M = \frac{f_M}{m \left[(\Omega_0^2 - \Omega_f^2) \frac{(\Omega_0^2 - \Omega_f^2)}{Z} + 2\gamma\Omega_f \frac{2\gamma\Omega_f}{Z} \right]} \quad (\text{VI.49})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{f_M}{m \sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega_f^2)^2 + (2\gamma\Omega_f)^2}} \\ \tan\theta_f &= \frac{2\gamma\Omega_f}{(\Omega_f^2 - \Omega_0^2)} \end{aligned} \quad (\text{VI.50})$$

Notiamo che ampiezza e fase dell'oscillazione forzata non dipendono dalle condizioni iniziali, ma solo dai parametri fisici del sistema meccanico e dalla forza esterna applicata. Il massimo valore dell'ampiezza dell'oscillazione di ha per $\Omega_f = \Omega_0$, valore in cui la fase $\theta_f = -\pi/2$:

$$x_M = \frac{f_M}{b\Omega_f} \quad (\text{VI.51})$$

Da cui vediamo che l'ampiezza massima è inversamente proporzionale alla costante di attrito viscoso b .

VI.2.1 Risonanza

Se consideriamo variabile la frequenza Ω_f della forza esterna applicata all'oscillatore, la formula xx fornisce la risposta in frequenza dell'ampiezza dell'oscillazione. Per osservare meglio le caratteristiche della risposta in frequenza riportiamo su un grafico le funzioni $x_M(\Omega_f)$ e $\theta_f(\Omega_f)$ al variare della parametro γ , assumendo costanti gli altri parametri (f_M, Ω_0).

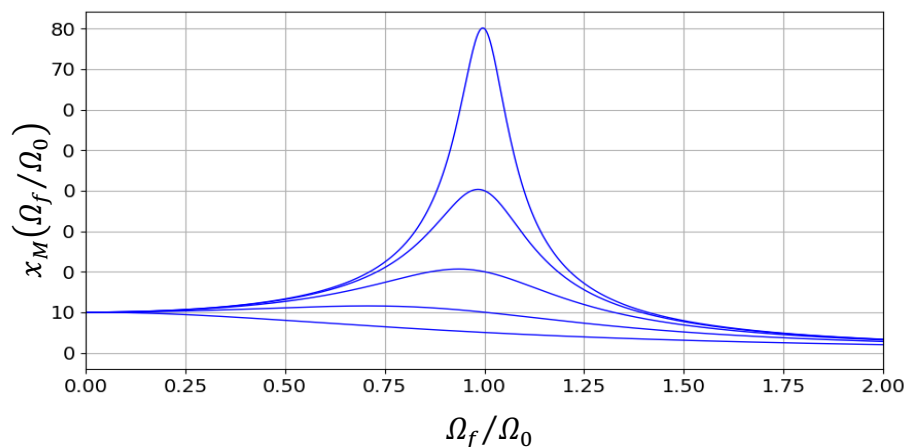


Fig.77, Curva di risonanza di un oscillatore forzato

Per valori molto piccoli del coefficiente di attrito l'ampiezza dell'oscillazione tende a valori molto elevati solo intorno a una frequenza detta di *risonanza*. Se la frequenza della forza eccitante è lontana dalla risonanza, l'oscillazione forzata ha valore basso o nullo, in tal caso diciamo che il sistema meccanico è *disaccoppiato*. Durante un terremoto, le oscillazioni del terreno di fondazione provocano nelle sovrastanti strutture delle oscillazioni forzate. Quando il terremoto si arresta, i movimenti della struttura proseguono sotto forma di oscillazioni libere con periodo proprio T, e si attenuano più o meno rapidamente per effetto dello smorzamento interno ed esterno degli elementi strutturali.

Per tale motivo si utilizzano gli *attenuatori* e gli *isolatori sismici* utilizzati in ambito civile per edilizia e trasporti. Interponendo gli isolatori tra le fondazioni e le strutture in elevazione si disaccoppiano le frequenze del sisma dalle frequenze proprie della struttura e si evita così l'insorgere di fenomeni di risonanza.

In caso di eventi tipo terremoti, gli isolatori fanno sì che l'oscillazione del terreno si trasmetta debolmente alla struttura.

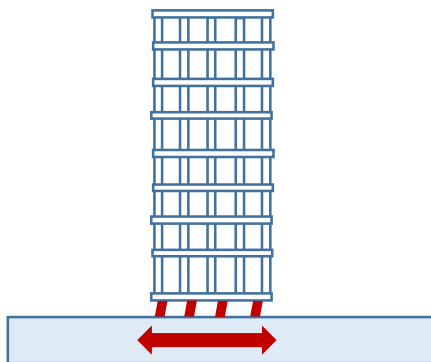


Fig.78, Schema di principio di isolatori risonanti

Capitolo VII: DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

In questo capitolo iniziamo a rimuovere una delle ipotesi semplificative che abbiamo utilizzato finora, non abbiamo una singola massa isolata che si muove in un campo di forze assegnato, ma abbiamo più masse che possono anche interagire tra di loro (e. Sistema Terra Luna sotto l'azione della forza gravitazionale del Sole). Continuiamo ad assumere però che le masse siano puntiformi.

VII.1 I PRIMA EQUAZIONE CARDINALE

Consideriamo un Sistema formato da N masse m_j , individuate dai vettori posizione \vec{r}_j , che si muovono lungo delle traiettorie nello spazio sotto l'azione di forze esterne al Sistema, e di forze di interazione tra le masse. Ad esempio il Sistema di due masse Terra Luna, si muove sotto l'azione della forza gravitazionale esterna del Sole (cui andrebbe aggiunta quella di tutti gli altri pianeti e delle altre stelle della Galassia) e sotto l'azione gravitazionale tra i due corpi. Occorre precisare che se inseriamo il Sole abbiamo un sistema a tre corpi, e così via. Chiamiamo con \vec{f}_j^e il risultante delle forze esterne sulle singole masse, e \vec{f}_{jk}^i le forze di interazione tra le masse. Nell'esempio in figura con due corpi (esempio Terra-Luna) abbiamo le forze esterne \vec{f}_1^e, \vec{f}_2^e e le forze interne $\vec{f}_{12}^i, \vec{f}_{21}^i$. Ricordiamo che in base al III Principio della dinamica risulta:

$$\vec{f}_{jk}^i = -\vec{f}_{kj}^i \quad (\text{VII.1})$$

cioè i corpi interagiscono a due a due con forze uguali e contrarie.

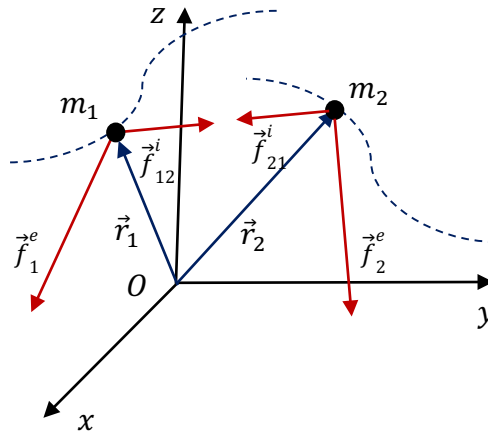


Fig.78, Sistema di masse in moto con forze interne ed esterne

Per studiare il moto dei punti materiali dobbiamo applicare il II Principio a ciascuno di essi, per 2 corpi abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{f}_1^e + \vec{f}_{12}^i = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{f}_2^e + \vec{f}_{21}^i = m_2 \vec{a}_2 \end{cases} \quad (\text{VII.2})$$

Esplicitiamo ora la dipendenza delle forze dalle posizioni (per semplicità trascuriamo le forze di attrito che dipendono dalle velocità), ed esprimendo l'accelerazione come derivata seconda della posizione abbiamo:

$$\begin{cases} \vec{f}_1^e(\vec{r}_1) + \vec{f}_{12}^i(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \\ \vec{f}_2^e(\vec{r}_2) + \vec{f}_{21}^i(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \end{cases} \quad (\text{VII.3})$$

Si vede chiaramente che abbiamo a che fare con un sistema di equazioni accoppiate, dove il moto di una massa dipende anche dalla posizione dell'altra. Il problema a due corpi già presenta notevoli difficoltà di soluzione, ma noi siamo interessati a un sistema a N corpi dove abbiamo un sistema di N equazioni in cui per la singola massa m_j vale:

$$\vec{f}_j^e(\vec{r}_j) + \sum_{k \neq j}^N \vec{f}_{jk}^i(\vec{r}_j, \vec{r}_k) = m_j \ddot{\vec{r}}_j = m_j \dot{\vec{q}}_j \quad (\text{VII.4})$$

In questa formula abbiamo assunto che $\vec{f}_j^e(\vec{r}_j)$ sia il risultante della forze esterne sulla massa m_j . Non esistono strumenti analitici adatti a risolvere il sistema di N equazioni per ricavare le traiettorie esatte delle singole masse. Il sistema può essere risolto solo numericamente con algoritmi di calcolo e l'ausilio di un computer. E' quanto si fa ad esempio per il moto dei pianeti delle comete e degli asteroidi nel sistema solare. Un calcolo approssimato può essere svolto se si tiene conto che le forze di attrazione tra i pianeti sono piccole perturbazioni rispetto all'attrazione del Sole, ma ciò non vale ad esempio per satelliti come la Luna sul moto della Terra, per gli asteroidi in prossimità della Terra che risentono anche dell'attrazione lunare e così via.

Non siamo in grado quindi di calcolare le traiettorie esatte delle singole masse, e ci chiediamo quali informazioni possiamo ricavare dal sistema di equazioni. Fu Eulero che trattò questo argomento e riuscì a dimostrare che possiamo ottenere informazioni globali sul moto di tutto il sistema attraverso le due *equazioni cardinali* della dinamica dei sistemi.

Per ricavare la prima eseguiamo la somma di tutte le equazioni sulle singole masse, otteniamo:

$$\sum_{j=1}^N \vec{f}_j^e(\vec{r}_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j}^N \vec{f}_{jk}^i(\vec{r}_j, \vec{r}_k) = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{q}}_j \quad (\text{VII.5})$$

E' facile vedere che la doppia sommatoria delle forze interne è nulla in virtù del III Principio della dinamica, pertanto l'equazione si semplifica nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^N \vec{f}_j^e(\vec{r}_j) = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{q}}_j \quad (\text{VII.6})$$

Se ora definiamo:

$$\begin{cases} \vec{F}^e = \sum_{j=1}^N \vec{f}_j^e(\vec{r}_j) \\ \vec{Q} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{q}}_j \end{cases} \quad (\text{VII.7})$$

la relazione xx può essere scritta come segue:

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad (\text{VII.8})$$

che prende il nome di I Equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi. Da questa equazione possiamo ricavare due importanti conseguenze:

- 1) Detta \vec{Q} la quantità di moto del sistema di punti materiali, la sua dipendenza temporale dipende solo dalle forze esterne. Le forze interne avranno effetto sul moto e sulla

quantità di moto delle singole masse, ma non hanno nessun effetto sulla quantità di moto totale.

- 2) In assenza di forze esterne la quantità di moto del sistema è costante, principio di conservazione della quantità di moto.

VII.1.1 Centro di Massa

Abbiamo detto che la Prima Equazione Cardinale fornisce informazioni globali sul sistema di punti materiali. Esiste però un punto geometrico dello spazio, legato alle posizioni delle masse m_j di cui possiamo ricavare la traiettoria se sono note le forze esterne.

Questo punto è chiamato Centro di Massa ed è definito come la media delle posizioni delle masse \vec{r}_j , pesate con le masse m_j :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} \quad (\text{VII.9})$$

E' un punto geometrico dello spazio, in generale è anch'esso in moto se le masse sono in moto, descrive una traiettoria e sarà caratterizzato da una velocità e un'accelerazione:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_j m_j \vec{v}_j}{\sum_j m_j} \quad (\text{VII.10})$$

Questa relazione è di notevole interesse. Infatti, introducendo la massa totale del sistema $M = \sum_j m_j$, e riconoscendo i termini $\vec{q}_j = m_j \vec{v}_j$, la riscriviamo come:

$$M \vec{v}_c = \sum_j \vec{q}_j = \vec{Q} \quad (\text{VII.11})$$

da cui ricaviamo la seguente proprietà del Centro di Massa:

Se posizioniamo la massa totale M nel centro di massa, la sua quantità di moto è pari alla quantità di moto dell'intero sistema.

Se deriviamo ulteriormente troviamo:

$$M \vec{a}_c = \sum_j m_j \vec{a}_j \quad (\text{VII.12})$$

dove, per il II principio risulta:

$$M \vec{a}_c = \sum_j \vec{f}_j \quad (\text{VII.13})$$

Ma abbiamo già visto che nella somma di tutte le forze quelle interne si elidono, quindi

$$M \vec{a}_c = \sum_j \vec{f}_j^e = \vec{F}^e \quad (\text{VII.14})$$

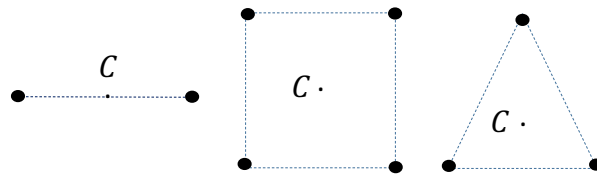
cioè:

$$M \vec{a}_c = \vec{F}^e \quad (\text{VII.15})$$

Se posizioniamo la massa totale M nel centro di massa, esso si comporta come un punto materiale il cui moto è determinato dal risultante delle forze esterne.

VII.1.2.1 Esempi di calcolo del Centro di Massa

Il centro di massa è la media pesata delle posizioni di tutte le masse. Se abbiamo a che fare con una distribuzione di masse uguali con una disposizione simmetrica, il centro di massa è al centro della distribuzione.



VII.2 SECONDA EQUAZIONE CARDINALE

Dato un polo qualsiasi nello spazio, nel paragrafo III.11.3 per una singola massa abbiamo ricavato la seguente relazione tra il momento delle forze e il momento della quantità di moto rispetto al polo:

$$\vec{\mu}_{\Omega} = \frac{d\vec{p}_{\Omega}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q} \quad (\text{VII.16})$$

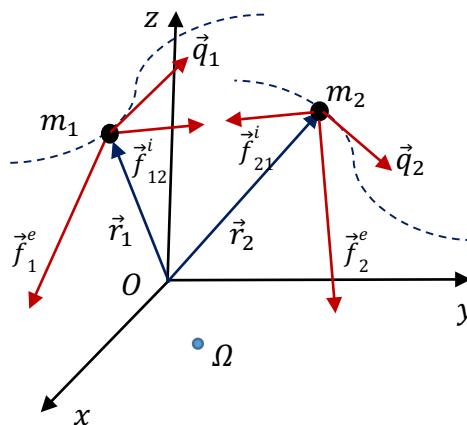


Fig.79, Momento delle forze e del momento angolare rispetto al polo Ω

Se consideriamo un sistema di due masse per ciascuna di esse, separando i momenti delle forze interne ed esterne rispetto al polo Ω , scriviamo:

$$\begin{cases} \vec{\mu}_{\Omega 1}^i + \vec{\mu}_{\Omega 1}^e = \frac{d\vec{p}_{\Omega 1}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q}_1 \\ \vec{\mu}_{\Omega 2}^i + \vec{\mu}_{\Omega 2}^e = \frac{d\vec{p}_{\Omega 2}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q}_2 \end{cases} \quad (\text{VII.17})$$

In un sistema di N masse, per la generica massa abbiamo:

$$\vec{\mu}_{\Omega j}^i + \vec{\mu}_{\Omega j}^e = \frac{d\vec{p}_{\Omega j}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q}_j \quad (\text{VII.18})$$

dove con $\vec{\mu}_{\Omega j}^i$ e $\vec{\mu}_{\Omega j}^e$ abbiamo indicato già i momenti risultanti delle forze interne e delle forze esterne sulla massa m_j . Anche in questo caso non sappiamo trattare il sistema di equazioni con

strumenti analitici al fine di studiare il moto di ciascuna massa. Possiamo però ricavare delle proprietà globali del sistema se sommiamo su tutte le masse:

$$\sum_j \vec{\mu}_{\Omega j}^i + \sum_j \vec{\mu}_{\Omega j}^e = \sum_j \frac{d\vec{p}_{\Omega j}}{dt} + \sum_j \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q}_j \quad (\text{VII.19})$$

Essendo le forze interne a due a due uguali e contrarie con la stessa retta di azione, abbiamo:

$$\sum_j \vec{\mu}_{\Omega j}^i = 0 \quad (\text{VII.20})$$

Inoltre ponendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \vec{\mu}_{\Omega j}^e = \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e \\ \sum_j \frac{d\vec{p}_{\Omega j}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \\ \sum_j \vec{v}_{\Omega} \times \vec{q}_j = \vec{v}_{\Omega} \times \vec{Q} \end{array} \right. \quad (\text{VII.21})$$

otteniamo la seguente espressione:

$$\vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{Q} \quad (\text{VII.22})$$

detta *II Equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi*.

La formula è simile a quella ricavata per il singolo punto materiale ma mette in relazione il momento totale delle forze esterne $\vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e$, il momento angolare totale \vec{P}_{Ω} e la quantità di moto totale del sistema \vec{Q} .

Possiamo anche in questo caso semplificare la formula mediante un'opportuna scelta del polo tale da annullare il termine $\vec{v}_{\Omega} \times \vec{Q}$. Ciò avviene se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\Omega} = 0 \\ \Omega \equiv C \\ \vec{v}_{\Omega} \parallel \vec{v}_C \end{array} \right. \quad (\text{VII.23})$$

cioè se il polo è fermo, se è coincidente con il centro di massa, se è in moto con velocità parallela alla velocità del centro di massa. In tal caso:

$$\vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \quad (\text{VII.24})$$

Notiamo che se il momento risultante delle forze esterne è nullo, il momento angolare totale è costante. *Principio di conservazione del momento angolare*.

VII.2.1 Momento Angolare e Momento d'inerzia

Nel Capitolo III.11 abbiamo ricavato l'espressione del Momento Angolare per una massa che si muove di moto circolare, rispetto a un polo Ω che giace sull'asse passante per il centro e perpendicolare al piano del moto. Abbiamo trovato che in generale il momento angolare ha due componenti:

$$\vec{p}_{\Omega} = \vec{p}_{\Omega \parallel} + \vec{p}_{\Omega \perp} \quad (\text{VII.25})$$

una parallela all'asse di rotazione e l'altra perpendicolare a tale asse:

$$\begin{cases} \vec{p}_{\Omega\parallel} = I_{\Omega}\vec{\omega} \\ \vec{p}_{\Omega\perp} = -hm\omega\vec{\rho} \end{cases} \quad (\text{VII.26})$$

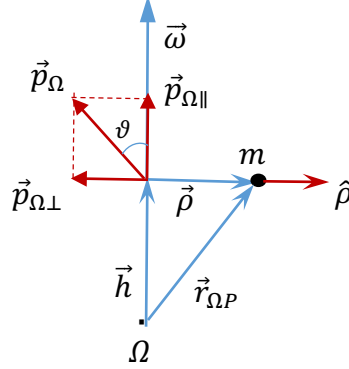


Fig.80, Componenti parallela e perpendicolare del momento angolare rispetto al polo Ω

Consideriamo ora un sistema di masse m_j tutte in rotazione rispetto allo stesso asse con la stessa velocità angolare ω , il momento angolare totale sarà dato dalla somma dei momenti di tutte le masse:

$$\sum_j \vec{p}_{\Omega j} = \sum_j \vec{p}_{\Omega j\parallel} + \sum_j \vec{p}_{\Omega j\perp} \quad (\text{VII.27})$$

Definiamo Momento Angolare del sistema di punti materiali il vettore

$$\vec{P}_{\Omega} = \sum_j \vec{p}_{\Omega j} = \vec{P}_{\Omega\parallel} + \vec{P}_{\Omega\perp} \quad (\text{VII.28})$$

Per la sua componente parallela troviamo:

$$\vec{P}_{\Omega\parallel} = \sum_j \vec{p}_{\Omega j\parallel} = \sum_j I_{\Omega j}\vec{\omega} = I_{\Omega}^{Tot}\vec{\omega} \quad (\text{VII.29})$$

Dove

$$I_{\Omega}^{Tot} = \sum_j I_{\Omega j} \quad (\text{VII.30})$$

mentre per la componente perpendicolare otteniamo

$$\vec{P}_{\Omega\perp} = \sum_j \vec{p}_{\Omega j\perp} = \sum_j -h_j m_j \omega \vec{\rho}_j = -\omega \sum_j h_j m_j \vec{\rho}_j \quad (\text{VII.31})$$

In conclusione il momento angolare totale del sistema è:

$$\vec{P}_{\Omega} = I_{\Omega}^{Tot}\vec{\omega} + -\omega \sum_j h_j m_j \vec{\rho}_j \quad (\text{VII.32})$$

Pertanto anche un sistema di punti materiali che, in un generico istante t ruotano con la stessa velocità angolare rispetto a un asse, è caratterizzato da un momento angolare con due componenti, parallela e perpendicolare all'asse di rotazione.

VII.2.1.1 Simmetria rispetto all'asse di rotazione

Esistono particolari configurazioni della distribuzione delle masse tali che $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$. Per questi sistemi il momento angolare forma un angolo $\vartheta = 0$ ed è sempre parallelo all'asse di rotazione. Un caso generale di interesse si ha quando le $h_j = 0$, le masse puntiformi sono distribuite su un piano, qualunque sia la distribuzione risulta $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$

Esaminiamo ora il momento angolare perpendicolare di due masse uguali:

$$\vec{P}_{\Omega\perp} = -\omega m(h_1\vec{\rho}_1 + h_2\vec{\rho}_2) \quad (\text{VII.33})$$

E' evidente che la somma si annulla nel caso:

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = -\vec{\rho}_2 \\ h_1 = h_2 \end{cases} \quad (\text{VII.34})$$

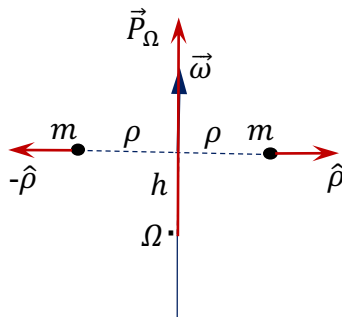


Fig.81, Simmetria assiale, componente perpendicolare del momento angolare nulla

Facciamo notare che in questo caso il centro di massa (punto medio tra le due masse) è fermo.

VII.2.1.2 Simmetria rispetto al piano passante per il polo Omega e perpendicolare all'asse di rotazione:

La componente perpendicolare si annulla che nel caso in cui:

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 \\ h_1 = -h_2 \end{cases} \quad (\text{VII.35})$$

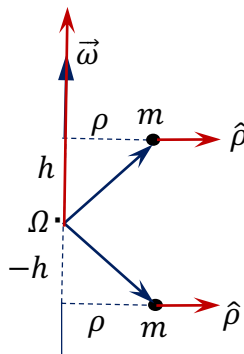


Fig.82, Simmetria speculare rispetto al piano passante per il polo Omega

Facciamo notare che in questo caso il centro di massa (punto medio tra le due masse) ruota anch'esso intorno all'asse con la stessa velocità angolare.

Per qualunque distribuzione di masse che soddisfano a due a due le proprietà di simmetria, la componente perpendicolare $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$.

Abbiamo visto che per tutti i sistemi dotati di simmetria rispetto all'asse di rotazione, oppure rispetto al piano passante per il polo e perpendicolare all'asse, il momento angolare è parallelo alla velocità angolare ed è pari a:

$$\vec{P}_{\Omega} = I_{\Omega}^{Tot} \vec{\omega} \quad (\text{VII.36})$$

Il calcolo del momento angolare si riduce pertanto al calcolo del momento d'inerzia dato da:

$$I_{\Omega}^{Tot} = \sum_j m_j \rho_j^2 \quad (\text{VII.37})$$

VII.2.1.2 Simmetria polare rispetto al polo Ω

Consideriamo ora un caso di interesse in cui non sono soddisfatte le due condizioni di simmetria precedentemente descritte. Trattiamo un sistema di due masse uguali che ruota intorno a un asse che forma un angolo ϑ rispetto all'asse mediano, la componente $\vec{P}_{\Omega\perp}$ non si annulla, infatti i contributi delle due masse sono uguali e si sommano:

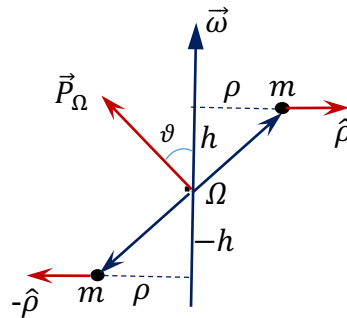


Fig.83, Simmetria rispetto al polo Ω

$$\vec{P}_{\Omega\perp} = -\omega m h \vec{\rho} - \omega m (-h)(-\vec{\rho}) \quad (\text{VII.38})$$

abbiamo:

$$\vec{P}_{\Omega\perp} = -2\omega m h \vec{\rho} \quad (\text{VII.39})$$

La componente parallela sarà:

$$\vec{P}_{\Omega\parallel} = m\rho^2 \vec{\omega} + m\rho^2 \vec{\omega} = 2m\rho^2 \vec{\omega} \quad (\text{VII.40})$$

Osserviamo che in questa simmetria i momenti angolari delle due masse si sommano, il momento totale è perpendicolare all'asse che unisce le due masse e forma un angolo con l'asse di rotazione pari a:

$$\tan\vartheta = \frac{|\vec{P}_{\Omega\perp}|}{|\vec{P}_{\Omega\parallel}|} = \frac{2\omega m h \rho}{2m\rho^2 \omega} = \frac{h}{\rho} \quad (\text{VII.41})$$

Osserviamo anche che il centro di massa è fermo, e il vettore momento angolare descrive un cono intorno all'asse di rotazione.

VII.2.1.2 Applicazioni della I e II Equazione Cardinale dei Sistemi al moto dei sistemi

Questi tre casi di sistema composto di due masse permettono di comprendere alcune proprietà generali del moto che sarà facile estendere anche ai corpi rigidi.

Per studiare il moto utilizziamo le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi:

$$\begin{cases} \vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \end{cases} \quad (\text{VII.42})$$

che possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \vec{F}^e = M\vec{a}_c \\ \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d}{dt} (I_{\Omega}^{Tot}\vec{\omega} + \vec{P}_{\Omega\perp}) \end{cases} \quad (\text{VII.43})$$

VII.2.1.3 Dinamica della rotazione di un bilanciare intorno all'asse di simmetria

Consideriamo un bilanciare è formato da due masse identiche m tenute a una distanza 2ρ da un'asta rigida di massa trascurabile, esso forma in tal modo il caso più semplice di corpo rigido. Vogliamo ora studiare la dinamica del bilanciare in rotazione intorno all'asse centrale di simmetria quando applichiamo un momento $\vec{\mathcal{M}}$ parallelo all'asse.

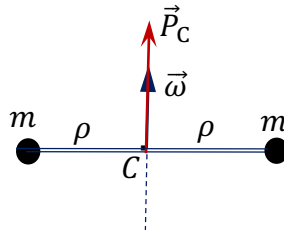


Fig.83, Simmetria rispetto al polo Ω

Osserviamo che il centro di massa è fermo, la sua accelerazione è nulla e $\vec{F}^e = 0$. Inoltre durante la rotazione il momento angolare è parallelo all'asse, $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$. La dinamica è descritta solo dalla II E.C. che si semplifica; proiettando $\vec{\omega}$ e $\vec{\mathcal{M}}$ sull'asse \hat{k} abbiamo:

$$\mathcal{M}_z = I_C \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\text{VII.44})$$

da cui ricaviamo l'accelerazione angolare α_z :

$$\alpha_z = \frac{\mathcal{M}_z}{I_C} \quad (\text{VII.45})$$

Esempio

Un bilanciare formato da due masse $m = 1\text{kg}$ a distanza $2\rho = 2\text{m}$, è inizialmente fermo. Vogliamo calcolare il momento della coppia di forze \mathcal{M} costante necessaria a fare ruotare il bilanciare con la velocità di 10 radianti al secondo, in un tempo $t^* = 2$ secondi.

Si tratta di un moto di rotazione uniformemente accelerato, abbiamo:

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{\mathcal{M}}{I_C} t \quad (\text{VII.46})$$

sostituiamo otteniamo:

$$\mathcal{M} = \frac{2m\rho^2\omega(t^*)}{t^*} = 5 \text{ Nm} \quad (\text{VII.47})$$

VII.2.1.4 Dinamica della rotazione di un bilanciere intorno a un'asse obliquo

Supponiamo ora di voler mettere in rotazione un bilanciere intorno a un asse passante per il centro di massa, ma non di simmetria (non è un asse principale di inerzia).

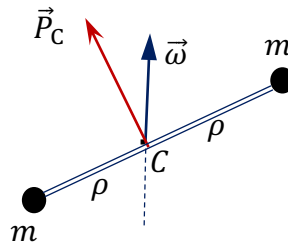


Fig.84, Simmetria rispetto al polo Ω

Una cerniera tiene fermo il centro di massa ma essendo la sua accelerazione è nulla risulta $\vec{F}^e = 0$, cioè non serve una forza esterna per tenere fermo il centro di massa.

Applichiamo invece una coppia di forze di momento \vec{M} per causare il moto. Osserviamo che quando il bilanciere si mette in rotazione, il momento angolare \vec{P}_C forma un angolo ϑ rispetto alla velocità angolare $\vec{\omega}$, e ruota insieme ad esso, descrivendo un cono nello spazio.

Proiettiamo la seconda E.C. sull'asse di rotazione e sull'asse ad esso perpendicolare, avremo:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\Omega\parallel} = I_C \frac{d\omega_{\parallel}}{dt} \\ \mathcal{M}_{\Omega\perp} = \frac{dP_{\Omega\perp}}{dt} \end{cases} \quad (\text{VII.48})$$

Distinguiamo due casi:

- Il bilanciere ruota con velocità angolare ω_{\parallel} costante. In questo caso $\mathcal{M}_{\Omega\parallel} = 0$, agisce quindi solo il momento perpendicolare all'asse di rotazione $\mathcal{M}_{\Omega\perp}$ necessario per tenere il bilanciere in posizione obliqua durante la rotazione.
- Il bilanciere è messo in rotazione con velocità angolare variabile nel tempo. In questo agiscono entrambe le componenti $\mathcal{M}_{\Omega\parallel}$ che determina l'accelerazione angolare e $\mathcal{M}_{\Omega\perp}$ che blocca il bilanciere nella posizione obliqua.

E' evidente che se il bilanciere è fermo, esso rimane in tale posizione in assenza di azioni esterne, essendo il centro di massa un punto di equilibrio indifferente.

VII.3 ENERGIA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

VII.3.1 *Energia Cinetica di un sistema di p.m., Teorema di Koenig.*

Consideriamo il sistema di punti materiali di figura xxx

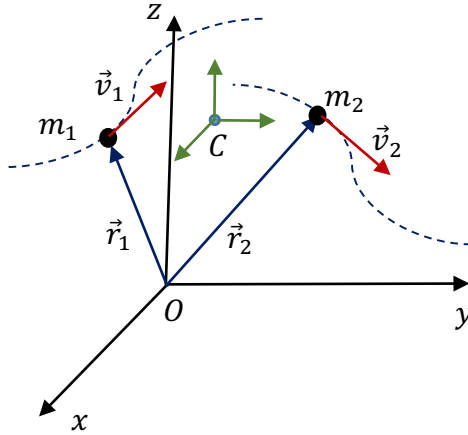


Fig.85, Energia cinetica di un sistema di punti materiali

L'energia cinetica del sistema vista da un osservatore in 0 è data dalla somma delle energie delle singole masse:

$$K = \sum_N \frac{1}{2} m_j v_j^2 \quad (\text{VII.49})$$

analogamente se osserviamo il sistema dal centro di massa, l'energia cinetica totale sarà:

$$K' = \sum_N \frac{1}{2} m_j v_j'^2 \quad (\text{VII.50})$$

dove v_j' è la velocità relativa al centro di massa.

Ci chiediamo se esiste una relazione tra K e K_C . A tale scopo esprimiamo la velocità di ciascun punto materiale come somma della velocità del centro di massa e la velocità relativa al centro di massa:

$$\vec{v}_j = \vec{v}_C + \vec{v}_j' \quad (\text{VII.51})$$

Esprimiamo il quadrato del modulo della velocità come prodotto scalare del vettore per sé stesso:

$$v_j^2 = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j \quad (\text{VII.52})$$

Sostituendo

$$v_j^2 = (\vec{v}_C + \vec{v}_j') \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}_j') = v_C^2 + v_j'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_j' \quad (\text{VII.53})$$

inserendo nell'espressione dell'energia cinetica abbiamo:

$$K = \sum_N \frac{1}{2} m_j (v_C^2 + v_j'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_j') \quad (\text{VII.54})$$

Sviluppiamo:

$$K = \sum_N \frac{1}{2} m_j v_C^2 + \sum_N \frac{1}{2} m_j v_j'^2 + \sum_N \frac{1}{2} m_j 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_j' \quad (\text{VII.55})$$

portiamo i termini costanti fuori dalla sommatoria.

$$K = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_N m_j + \sum_N \frac{1}{2} m_j v_j'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum_N m_j \vec{v}_j' \quad (\text{VII.56})$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica della massa totale M posizionata nel centro di massa:

$$K_C = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (\text{VII.57})$$

il secondo termine rappresenta l'energia cinetica rispetto al sistema di riferimento del centro di massa:

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K' + \vec{v}_c \cdot \sum_N \vec{q}_j' \quad (\text{VII.58})$$

Per quanto riguarda il terzo termine osserviamo che:

$$\sum_N \vec{q}_j' = \vec{Q}' \quad (\text{VII.59})$$

pari alla quantità di moto totale del sistema calcolata rispetto centro di massa. Ora per la proprietà della quantità di moto deve risultare:

$$\vec{Q}' = M \vec{v}_c' = 0 \quad (\text{VII.60})$$

dato che \vec{v}_c' è la velocità del centro rispetto al centro di massa e pertanto è nullo. In conclusione il Teorema di Koenig afferma che l'energia cinetica di un sistema è pari alla somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia del sistema calcolata rispetto al centro di massa.

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K' \quad (\text{VII.61})$$

Il Teorema di Koenig mette in risalto pertanto un'altra importante proprietà del centro di massa.

VII.3.2 Energia Potenziale di un sistema di p.m.

Consideriamo il sistema di punti materiali soggetti alla forza peso. L'energia potenziale totale è data dalla somma:

$$U = \sum_N m_j g z_j \quad (\text{VII.62})$$

portiamo la costante g al di fuori della sommatoria:

$$U = g \sum_N m_j z_j \quad (\text{VII.63})$$

moltiplichiamo e dividiamo per la massa totale

$$U = M g \frac{\sum_N m_j z_j}{M} \quad (\text{VII.64})$$

dove riconosciamo la quota del centro di massa z_C

$$\frac{\sum_N m_j z_j}{M} = z_C \quad (\text{VII.65})$$

otteniamo quindi

$$U = Mgz_c \quad (\text{VII.66})$$

L'energia potenziale del sistema è pari all'energia potenziale della massa totale collocata nel centro di massa.

Capitolo VIII: DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

I risultati ottenuti nello studio dei sistemi di punti materiali ci permettono di fare un altro passo avanti nello studio del moto di un solido. Assumiamo innanzitutto che il corpo possa essere descritto come un sistema continuo, tale che in ogni punto, scelto un volume infinitesimo $d\tau$ troviamo una massa infinitesima dm tale che è possibile definire una densità locale:

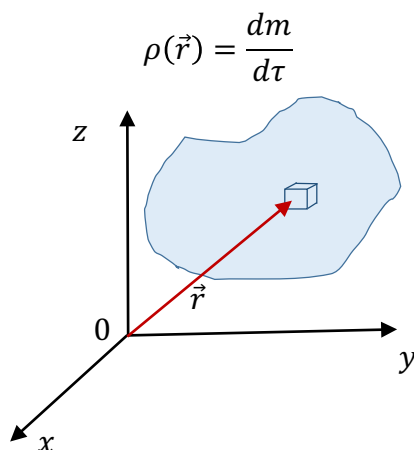


Fig.86, Moto di corpi rigidi nello spazio

E' evidente che tale modello non tiene conto della struttura atomica o molecolare del corpo, assumendo la densità di massa continua all'interno del corpo anche se calcolata su volumi infinitesimi.

Il caso particolare di corpo continuo di nostro interesse è il Corpo Rigido, definito come un corpo continuo che mantiene invariata la propria forma durante il moto (indeformabile). Una definizione rigorosa di corpo rigido stabilisce che dati due punti qualsiasi all'interno del corpo la loro distanza non varia durante il moto. In tal modo sono esclusi i corpi deformabili.

Quando il corpo si estende lungo un piano di spessore trascurabile, definiamo la densità superficiale di massa

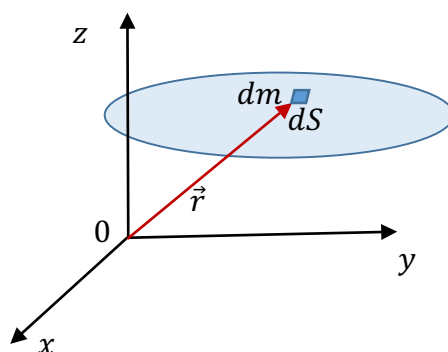


Fig.87, Corpo esteso su una superficie (di spessore trascurabile)

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dm}{dS} \quad (\text{VIII.1})$$

misurata in kg/m^2 .

Quando il corpo è filiforme con una sezione trascurabile, definiamo la densità lineare di massa:

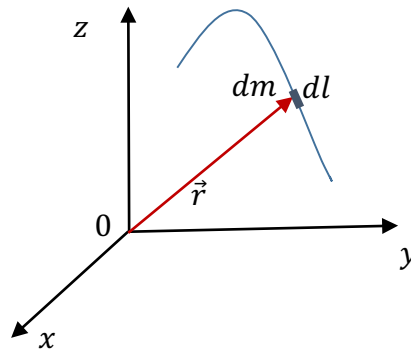


Fig.87, Corpo filiforme (dimensioni della sezione trascurabili)

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dm}{dS} \quad (\text{VIII.2})$$

misurata in kg/m .

VIII.1 PRIMA E SECONDA EQUAZIONE CARDINALE PER IL CORPO RIGIDO

Al corpo rigido si estende la validità delle due Equazioni Cardinali della dinamica dei sistemi, infatti essendo il corpo soggetto solo a forze esterne abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \times \vec{Q} \end{array} \right. \quad (\text{VIII.6})$$

che, con opportuna scelta del polo già discussa in precedenza, diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^e = M\vec{a}_c \\ \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \end{array} \right. \quad (\text{VIII.4})$$

Mentre per un sistema di punti materiale queste due equazioni forniscono informazioni “globali” sul moto del sistema, le stesse applicate al corpo rigido ci permettono di calcolare il suo moto. In particolare la I Equazione Cardinale ci permette di studiare il moto di traslazione del corpo, con la II Equazione Cardinale studiamo il moto di rotazione.

VIII.1.1 Centro di Massa

Per un corpo rigido il Centro di Massa è definito come la media delle posizioni delle masse infinitesime dm individuate dal vettore \vec{r} :

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} \quad (\text{VIII.5})$$

dove gli integrali sono estesi a tutta la massa M . Essendo il centro di massa una posizione media pesata, nel caso di corpi omogenei (densità di massa costante nel corpo) e dotati di simmetria,

il centro di massa è posizionato nel centro di simmetria. Il centro di massa si muove con una velocità pari a:

$$\vec{v}_c = \frac{\int \vec{v} dm}{\int dm} \quad (\text{VIII.6})$$

Questa relazione è di notevole interesse. Infatti, introducendo la massa totale del sistema $M = \int dm$, e riconoscendo i termini $d\vec{q} = dm\vec{v}$, la riscriviamo come:

$$M\vec{v}_c = \int d\vec{q} = \vec{Q} \quad (\text{VIII.7})$$

da cui ricaviamo la seguente proprietà del Centro di Massa per un corpo rigido:

Se posizioniamo la massa M nel centro di massa, la sua quantità di moto è pari alla quantità di moto di tutto il corpo.

Se deriviamo ulteriormente anche per il corpo rigido, utilizzando le VI.66 troviamo:

$$\vec{F}^e = M\vec{a}_c \quad (\text{VIII.8})$$

Se posizioniamo la massa M nel centro di massa, esso si comporta come un punto materiale il cui moto è determinato dal risultante delle forze esterne.

VIII.1.2.1 Centro di massa per distribuzioni di massa di volume, di superficie e filiforme.

Sostituiamo la massa infinitesima dm nella definizione di centro di massa, otteniamo per la densità di volume ρ :

$$\vec{r}_c = \frac{\iiint \vec{r} \rho d\tau}{\iiint \rho d\tau} \quad (\text{VIII.9})$$

dove gli integrali tripli sono estesi a tutto il volume del corpo.

Per la densità di superficie σ :

$$\vec{r}_c = \frac{\iint \vec{r} \sigma dS}{\iint \sigma dS} \quad (\text{VIII.10})$$

dove gli integrali doppi sono estesi a tutta la superficie del corpo.

Per la densità lineare λ :

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} \lambda dl}{\int \lambda dl} \quad (\text{VIII.11})$$

dove gli integrali curvilinei sono estesi a tutta la lunghezza del corpo.

VIII.1.2.2 Esempio di Calcolo Centro di Massa

Nel caso di corpi omogenei dotati di simmetria è immediato posizionare il centro di massa nel centro di simmetria del corpo. Per corpi asimmetrici occorre di solito un calcolo complesso con l'ausilio di metodi di calcolo numerici al computer. Quando non riscontriamo un centro di simmetria ma il corpo è simmetrico a pezzi, possiamo adottare un metodo semplice per il calcolo del centro di massa.

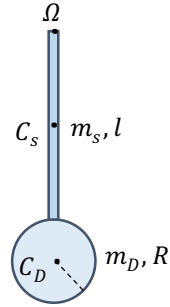


Fig.88, Centro di massa di un pendolo composto da un'asta e un disco omogenei

Consideriamo ad esempio il sistema formato da una sbarretta e un disco nella configurazione di un pendolo. Vogliamo calcolare la posizione del centro di massa che si troverà sicuramente sull'asse verticale di simmetria che passa per i punti Ω , C_s , e C_D . E' sufficiente pertanto trovare la distanza del centro di massa dal polo Ω . A tal fine posizioniamo le masse della sbarretta e del disco nei rispettivi centri di massa, ottenendo in tal modo un sistema di due masse puntiformi. Prendendo come riferimento il punto Ω , la distanza del centro di massa d_C si calcola come segue:

$$d_C = \frac{m_s \frac{l}{2} + m_D(l + R)}{m_s + m_D} \quad (\text{VIII.12})$$

VIII.1.2 Momento angolare

Consideriamo un sistema rigido in rotazione rispetto a una asse con velocità angolare ω , il momento angolare totale rispetto a un polo Ω sull'asse di rotazione è definito come integrale su tutta la massa M:

$$\vec{P}_\Omega = \int d\vec{p}_\Omega = \int \vec{r}_{\Omega P} \times dm\vec{v} \quad (\text{VIII.13})$$

Come nel caso dei sistemi di punti materiali, abbiamo:

$$d\vec{p}_\Omega = \vec{r}_{\Omega P} \times dm\vec{v} = -\omega h \vec{p} dm + dm \rho^2 \vec{\omega} \quad (\text{VIII.14})$$

sostituendo troviamo che \vec{P}_Ω ha una componente parallela e una perpendicolare all'asse di rotazione:

$$\vec{P}_\Omega = \vec{P}_{\Omega\parallel} + \vec{P}_{\Omega\perp} \quad (\text{VIII.15})$$

Per la sua componente parallela troviamo:

$$\vec{P}_{\Omega\parallel} = \int d\vec{p}_{\Omega\parallel} = \int dm \rho^2 \vec{\omega} = I_\Omega^{Tot} \vec{\omega} \quad (\text{VIII.16})$$

Dove

$$I_\Omega^{Tot} = \int dm \rho^2 \quad (\text{VIII.17})$$

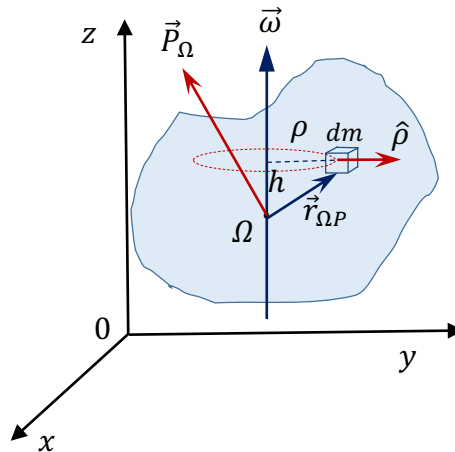


Fig.89, Momento angolare di un corpo in rotazione intorno a un asse

mentre per la componente perpendicolare otteniamo

$$\vec{P}_{\Omega\perp} = \int d\vec{p}_{\Omega\perp} = -\omega \int h\vec{\rho} dm \quad (\text{VIII.18})$$

In conclusione il momento angolare totale del sistema è:

$$\vec{P}_{\Omega} = I_{\Omega}^{Tot} \vec{\omega} - \omega \int h\vec{\rho} dm \quad (\text{VIII.19})$$

VIII.1.2.1 Sistemi dotati di simmetria

In generale, per un corpo rigido in rotazione intorno a un asse con velocità angolare $\vec{\omega}$, il momento angolare un polo Ω scelto sull'asse possiede due componenti, una parallela e l'altra perpendicolare all'asse di rotazione.

Esistono però particolari distribuzioni della massa tali che $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$. Per questi corpi il momento angolare forma un angolo $\vartheta = 0$ ed è sempre parallelo all'asse di rotazione.

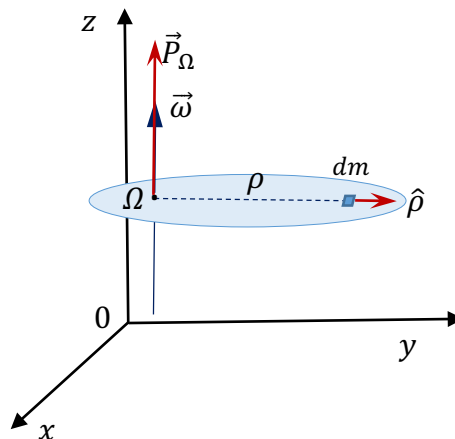


Fig.90, Momento angolare di un corpo planare di spessore trascurabile

- 1) Un caso generale di interesse si ha quando $h = 0$, cioè la massa è distribuita su un piano perpendicolare all'asse di rotazione passante per Ω . In questo caso qualunque sia la distribuzione risulta $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$.

- 2) Piano di simmetria passante per il polo Ω , prese a due a due le masse infinitesime è soddisfatta la proprietà di simmetria:

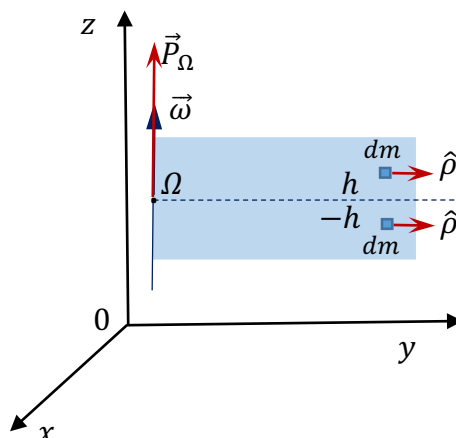


Fig.91, Momento angolare di un corpo simmetrico rispetto a un piano

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 \\ h_1 = -h_2 \end{cases} \quad (\text{VIII.20})$$

Anche in questo caso, qualunque sia la distribuzione, risulta $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$.

- 3) Simmetria rispetto all'asse di rotazione

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = -\vec{\rho}_2 \\ h_1 = h_2 \end{cases} \quad (\text{VIII.21})$$

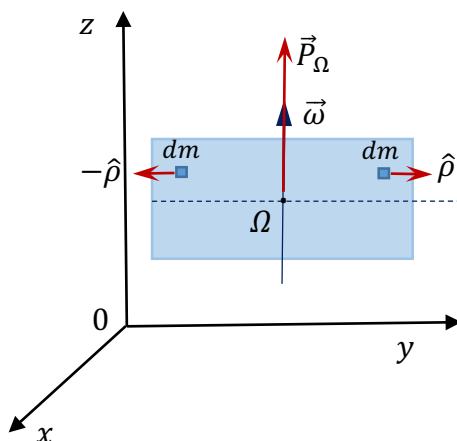


Fig.91, Momento angolare di un corpo rispetto a un asse di simmetria

Per qualunque distribuzione di massa che soddisfa le proprietà di simmetria sopra descritte, la componente perpendicolare $\vec{P}_{\Omega\perp} = 0$.

VIII.1.3 Momento d'inerzia

In questo paragrafo consideriamo vari esempi di calcolo del momento d'inerzia di corpi simmetrici ed omogenei rispetto ad assi di simmetria passanti per il centro di massa. In particolare prendiamo in esame i casi in cui l'asse è perpendicolare a una sbarretta, al piano di

anelli e dischi sottili, e alle superfici di base di un cilindro. Esistono tavole e formulari per una grande casistica di geometrie che non riporteremo nel seguente testo.

VIII.1.3.1 Sbarretta omogenea lunga e sottile

Consideriamo una sbarretta di massa M di lunghezza l , sottile e omogenea con densità lineare di massa λ , vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare alla sbarretta e passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa coincide con il centro geometrico della sbarretta.

Se considera un elemento di massa dm a distanza x dall'asse passante per il centro di massa, il suo momento d'inerzia sarà:

$$dI_c = dm \cdot x^2 \quad (\text{VIII.22})$$

L'elemento di massa dm può essere espresso mediante la densità lineare di massa λ :

$$dm = \lambda dx$$

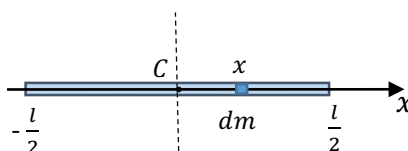


Fig.92, Momento di inerzia di una sbarretta omogenea lunga e sottile

Per calcolare il momento d'inerzia di tutta la sbarretta dobbiamo sommare i contributi di tutte le masse infinitesime da $-l/2$ a $+l/2$:

$$I_c = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda dx \cdot x^2 \quad (\text{VIII.23})$$

Integrando otteniamo:

$$I_c = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \lambda \frac{l^3}{12} \quad (\text{VIII.24})$$

Essendo la massa $M = \lambda l$, ricaviamo:

$$I_c = M \frac{l^2}{12} \quad (\text{VIII.25})$$

VIII.1.3.2 Anello omogeneo filiforme

Consideriamo un anello di massa M di raggio R , sottile e omogeneo, vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa coincide con il centro geometrico dell'anello.

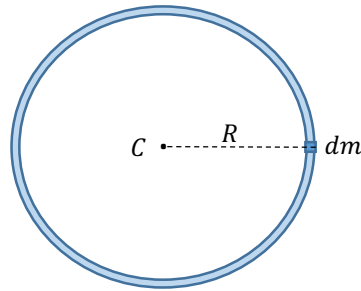


Fig.93, Momento di inerzia di un anello omogeneo sottile

Se considera un elemento di massa dm a distanza R dall'asse passante per il centro di massa, il suo momento d'inerzia sarà:

$$dI_c = dm \cdot R^2 \quad (\text{VIII.26})$$

Sommando su tutti gli elementi di massa abbiamo:

$$I_c = R^2 \int dm \quad (\text{VIII.27})$$

dove l'integrale è esteso a tutta la massa M , otteniamo:

$$I_c = MR^2 \quad (\text{VIII.28})$$

VIII.1.3.3 Disco omogeneo di spessore trascurabile

Consideriamo un disco omogeneo di massa M di raggio R e di spessore trascurabile omogeneo con densità superficiale di massa σ , vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare al piano del disco e passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa coincide con il centro geometrico del disco.

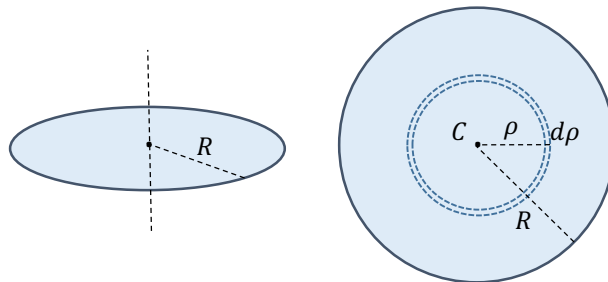


Fig.94, Momento di inerzia di un disco piano omogeneo

Per il calcolo del momento d'inerzia consideriamo il disco come somma di un numero infinito di anelli di raggio ρ , spessore infinitesimo $d\rho$, e massa dm . Ciascun anello contribuisce al momento totale con una quantità infinitesima pari a:

$$dI_c = dm\rho^2 \quad (\text{VIII.29})$$

La massa dell'anello può essere espressa mediante la densità superficiale σ :

$$dm = \sigma dS \quad (\text{VIII.30})$$

dove la superficie infinitesima dell'anello può essere calcolata come:

$$dS = 2\pi\rho d\rho \quad (\text{VIII.31})$$

che è pari all'area del rettangolo che si ottiene rettificando l'anello. Possiamo scrivere pertanto:

$$dI_c = 2\pi\sigma\rho^3 d\rho \quad (\text{VIII.32})$$

Il momento d'inerzia totale si ottiene integrando su tutto il disco:

$$I_c = 2\pi\sigma \int_0^R \rho^3 d\rho \quad (\text{VIII.33})$$

ricaviamo:

$$I_c = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} \quad (\text{VIII.34})$$

dato che il disco è omogeneo, la massa totale M è pari a densità per superficie:

$$M = \sigma\pi R^2 \quad (\text{VIII.35})$$

Otteniamo quindi:

$$I_c = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\text{VIII.36})$$

VIII.1.3.4 Cilindro omogeneo

Consideriamo un disco di massa M di raggio R , di altezza h , omogeneo con densità di volume costante, vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare alle basi del cilindro e passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa coincide con il centro geometrico del cilindro.

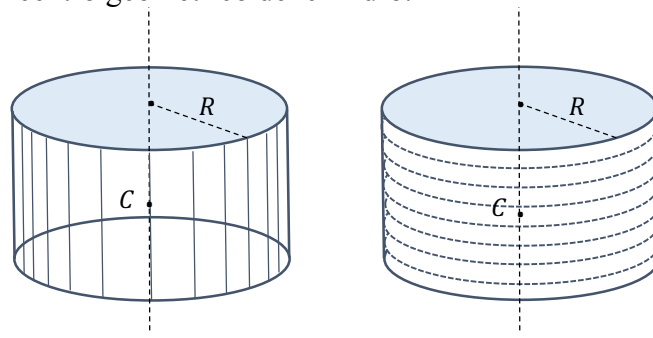


Fig.94, Momento di inerzia di un cilindro omogeneo

Per il calcolo del momento d'inerzia consideriamo il cilindro come somma di un numero infinito di dischi di raggio R , spessore infinitesimo dh , e massa dm . Per ciascun disco possiamo scrivere:

$$dI_c = \frac{1}{2}dmR^2$$

Il momento l'inerzia totale è dato dalla somma di tutti i dischi:

$$I_c = \int_0^h \frac{1}{2}dmR^2 \quad (\text{VIII.37})$$

portiamo le costanti fuori dall'integrale:

$$I_c = \frac{1}{2} R^2 \int_0^h dm \quad (\text{VIII.38})$$

dove l'integrale fornisce ovviamente la massa totale M del cilindro, otteniamo pertanto:

$$I_c = \frac{1}{2} MR^2 \quad (\text{VIII.39})$$

formula identica a quella del disco sottile.

VIII.1.3.5 Cono omogeneo

Consideriamo un cono di massa M di raggio di base R , di altezza h , omogeneo con densità di volume costante, vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse perpendicolare alla base del cilindro e passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa si trova sull'asse del cilindro.

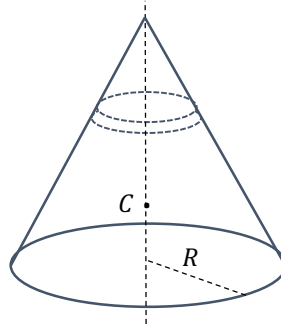


Fig.94, Momento di inerzia di un cono omogeneo

Per il calcolo del momento d'inerzia consideriamo il cono come somma di un numero infinito di dischi di raggio $0 \leq r \leq R$, spessore infinitesimo dh , e massa dm . Non sviluppiamo qui il calcolo che fornisce il seguente risultato:

$$I_c = \frac{3}{10} MR^2 \quad (\text{VIII.40})$$

VIII.1.3.6 Sfera omogenea

Consideriamo una sfera di massa M di raggio R , omogenea con densità di volume costante, vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a un qualunque asse passante per il centro di massa. Data la simmetria e l'omogeneità, il centro di massa si trova nel centro della sfera.

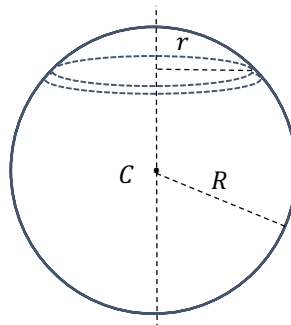


Fig.95, Momento di inerzia di una sfera omogenea

Analogamente a quanto fatto per il cilindro, per calcolare del momento d'inerzia consideriamo la sfera come somma di un numero infinito di dischi di raggio $0 \leq r \leq R$, spessore infinitesimo dh , e massa dm . Non sviluppiamo qui il calcolo che fornisce il seguente risultato:

$$I_c = \frac{2}{5} MR^2 \quad (\text{VIII.41})$$

VIII.1.4 Teorema di Huygens-Steiner

Detto anche *teorema degli assi paralleli*, è un tipico teorema di *trasporto* infatti permette di calcolare il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa.

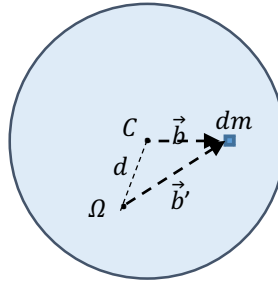


Fig.96, Trasporto del momento d'inerzia tra gli assi paralleli passanti per C e Ω

Il teorema si dimostra attraverso i seguenti passaggi:

$$I_c = \frac{2}{5} MR^2 \quad (\text{VIII.42})$$

$$I_c = \int b^2 dm \quad (\text{VIII.43})$$

$$I_\Omega = \int b'^2 dm \quad (\text{VIII.44})$$

$$\vec{b} = \vec{d} + \vec{b}'$$

$$b'^2 = \vec{b}' \cdot \vec{b}' = (\vec{b} - \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = b^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{b}$$

$$I_\Omega = \int (b^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{b}) dm$$

$$I_\Omega = I_c + \int d^2 dm + -2\vec{d} \cdot \int \vec{b} dm$$

$$I_\Omega = I_c + Md^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{b}_c$$

$$\vec{b}_c = \int \vec{b} dm = 0$$

$$I_{\Omega} = I_C + Md^2 \quad (\text{VIII.45})$$

VIII.1.4.1 Applicazioni Teorema di Huygens-Steiner

- a) Momento di inerzia di una sbarretta sottile rispetto a un asse passante per un suo estremo:

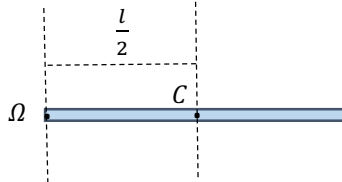


Fig.97, Trasporto del momento d'inerzia tra gli assi paralleli passanti per C e Ω

$$I_{\Omega} = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3} \quad (\text{VIII.46})$$

- b) Anello sottile rispetto a un asse passante per un suo punto:

$$I_{\Omega} = MR^2 + MR^2 = 2MR^2 \quad (\text{VIII.47})$$

- c) Disco o cilindro rispetto a un asse parallelo a distanza R

$$I_{\Omega} = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \quad (\text{VIII.48})$$

- d) Momento di inerzia di una sbarretta con disco (pendolo)

Consideriamo un sistema formato da una sbarretta omogenea sottile, di lunghezza l e di massa m_s , e da un disco omogeneo di massa m_D e raggio R nella conformazione tipica di un pendolo.

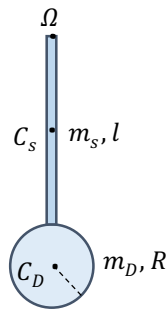


Fig.97, Momento d'inerzia di un pendolo

Vogliamo calcolare il momento d'inerzia di tutto il sistema rispetto a un asse perpendicolare al foglio, passante per il polo Ω . Calcoliamo innanzitutto il momento d'inerzia rispetto agli assi passanti per i rispettivi centri di massa:

$$\begin{cases} I_{C_S} = \frac{m_S l^2}{12} \\ I_{C_D} = \frac{m_D R^2}{2} \end{cases} \quad (\text{VIII.49})$$

poi applichiamo Huygens-Steiner per il trasporto all'asse parallelo passante per Ω , e sommiamo ottenendo:

$$I_{\Omega} = \left(\frac{m_S l^2}{12} + \frac{m_S l^2}{4} \right) + \left[\frac{m_D R^2}{2} + m_D (R + l_S)^2 \right] \quad (\text{VIII.50})$$

$$I_{\Omega} = \frac{m_S l^2}{3} + m_D \left[\frac{R^2}{2} + (R + l_S)^2 \right]$$

VIII.1.5 *Sistema di forze applicate a un corpo rigido*

Nelle due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi abbiamo visto che il moto di un corpo dipende dal risultante delle forze esterne \vec{F}^e e dal momento risultante delle forze esterne \vec{M}_{Ω}^e . Ora, in linea generale esistono più sistemi di forze esterne $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_N\}$ ad avere la stessa forza risultante e lo stesso momento risultante. Ai fini del moto del corpo rigido questi sistemi di forze sono *equivalenti* in quanto, assegnate le condizioni iniziali, causano lo stesso moto.

$$\begin{cases} \vec{F}^e = M \vec{a}_c \\ \vec{M}_{\Omega}^e = \frac{d\vec{P}_{\Omega}}{dt} \end{cases} \quad (\text{VIII.51})$$

Il sistema equivalente più semplice è formato da tre forze, una forza pari a \vec{F}^e , e una coppia di forze di momento pari a \vec{M}_{Ω}^e .

Pertanto possiamo affermare che un qualsiasi sistema di forze $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_N\}$ applicate a un corpo rigido è equivalente a una forza risultante \vec{F}^e applicata nel centro di massa e una coppia di forze di momento pari a \vec{M}_{Ω}^e .

VIII.1.6 *Statica del corpo rigido*

Quando affrontiamo la Statica di un corpo ci chiediamo quali sono le condizioni affinché un corpo fermo rimanga fermo. Ciò avviene se sul corpo non ci sono azioni esterne, oppure il sistema di forze applicate si annulla risultando

$$\begin{cases} \vec{F}^e = 0 \\ \vec{M}_{\Omega}^e = 0 \end{cases} \quad (\text{VIII.52})$$

che sono dette condizioni necessari e sufficienti affinché un corpo in quiete rimanga in quiete. Ci troviamo di fronte a una situazione simile a quella descritta dal Principio di Inerzia, il quale riguardava un punto materiale e quindi si occupava solo del moto di traslazione. Ma sappiamo

che un corpo esteso può compiere anche a un moto di rotazione, pertanto è necessario imporre anche la condizione sul momento delle forze.

VIII.1.6.1 Esempi di Statica del corpo rigido

a) Scala appoggiata

Consideriamo una scala di lunghezza l_s e di massa m_s appoggiata a un muro, inclinata di un angolo α rispetto al pavimento con coefficiente di attrito statico μ_s nel punto di contatto B . Trascuriamo invece l'attrito nel punto di contatto con la parete verticale nel punto A .

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{f}_{a.s.} + \vec{R}_{nA} + \vec{R}_{nB} = 0 \\ \vec{M}_B^e = 0 \end{cases} \quad \text{(VIII.53)}$$

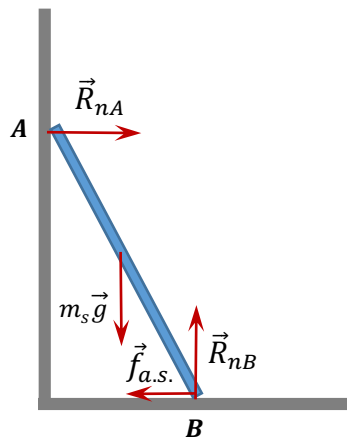


Fig.98, Statica scala appoggiata

Vogliamo verificare le condizioni di statica della scala e calcolare il massimo angolo di inclinazione che si può ottenere senza che la scala scivoli sul pavimento. Imponendo le condizioni di statica, considerando i moduli delle forze, e calcolando il momento delle forze rispetto al polo in A , abbiamo:

$$\begin{cases} R_{nA} - f_{a.s.} = 0 \\ R_{nB} - mg = 0 \\ -R_{nA}l_s \sin\alpha + mg \frac{l_s}{2} \cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{(VIII.54)}$$

da cui:

$$\begin{cases} f_{a.s.} = R_{nA} \\ R_{nB} = mg \\ R_{nA} = \frac{mg}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases} \quad \text{(VIII.55)}$$

La scala rimane in equilibrio se

$$|f_{a.s.}| \leq \mu_s R_{nB} = \mu_s mg \quad \text{(VIII.56)}$$

Sostituendo abbiamo

$$\frac{mg}{2\tan\alpha} \leq \mu_s mg \quad (\text{VIII.57})$$

da cui:

$$\tan\alpha \geq \frac{1}{2\mu_s} \quad (\text{VIII.58})$$

b) Trave omogenea su due appoggi fissi alle estremità:

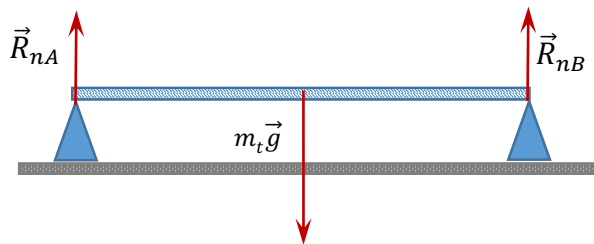


Fig.98, Statica trave orizzontale appoggiata

In questo caso la soluzione è molto semplice, infatti per simmetria le due reazioni vincolari in A e B devono essere uguali e pari alla metà della forza peso:

$$R_{nA} = R_{nB} = \frac{m_t g}{2} \quad (\text{VIII.59})$$

c) Trave omogenea su due appoggi fissi alle estremità con una massa M.

Consideriamo la stessa trave dell'esempio precedente su cui appoggiamo una massa M posta ad una distanza d dall'appoggio in A. Le condizioni di statica ci danno:

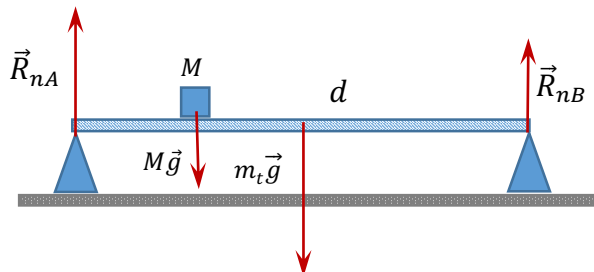


Fig.98, Statica trave orizzontale appoggiata con massa

$$\begin{cases} R_{nA} + R_{nB} - (m_s + M)g = 0 \\ -R_{nA}l_s + Mgd + m_s g \frac{l_s}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{VIII.60})$$

abbiamo due equazioni in due incognite, che risolviamo ottenendo:

$$\begin{cases} R_{nA} = g \left[\frac{1}{2} m_s + \frac{d}{l_s} M \right] \\ R_{nB} = g \left[\frac{1}{2} m_s + \left(1 - \frac{d}{l_s} \right) M \right] \end{cases} \quad (\text{VIII.61})$$

Se $d = l_s/2$ abbiamo:

$$\begin{cases} R_{nA} = g \left[\frac{1}{2} m_s + \frac{1}{2} M \right] \\ R_{nB} = g \left[\frac{1}{2} m_s + \frac{1}{2} M \right] \end{cases} \quad (\text{VIII.62})$$

VIII.1.7 Moto libero di un corpo rigido in assenza di forze

Parliamo di moto libero di un corpo rigido quando le azioni risultanti sul corpo sono nulle, come nella statica,

$$\begin{cases} \vec{F}^e = 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_{\Omega}^e = 0 \end{cases} \quad (\text{VIII.63})$$

ma il corpo inizialmente non è in quiete. Dobbiamo aspettarci che in questo caso il corpo mantenga il suo stato di moto, come prescrive il Principio di Inerzia.

Dalla prima condizione infatti dalla Prima Equazione Cardinale ricaviamo:

$$\vec{a}_c = 0 \quad (\text{VIII.64})$$

il centro di massa si muove con velocità $\vec{v}_c = \text{costante}$ (includiamo ovviamente anche il caso in cui $\vec{v}_c = 0$). Il corpo rigido è in quiete oppure *trasla* con velocità costante.

Questo risultato sul moto del centro massa pone condizioni stringenti sul moto rotatorio. Infatti, affinché il centro di massa sia fermo oppure si muova di moto rettilineo uniforme, il corpo rigido deve ruotare necessariamente intorno ad un asse che passa per il centro di massa. Se così non fosse, il centro di massa si troverebbe a ruotare intorno all'asse di rotazione con un'accelerazione centripeta.

Esaminiamo ora il moto di rotazione intorno ad un asse passante per il centro di massa. La seconda condizione di moto libero $\vec{\mathcal{M}}_C^e = 0$ comporta che il momento angolare $\vec{P}_C = \text{costante}$. Abbiamo visto che durante la rotazione il vettore $\vec{P}_C = I_C^{Tot} \vec{\omega} + \vec{P}_{C\perp}$, ha quindi due componenti una parallela all'asse di rotazione e l'altra perpendicolare all'asse di rotazione. Affinché \vec{P}_C sia costante deve verificarsi:

$$\begin{cases} I_C^{Tot} \vec{\omega} = \text{costante} \\ \vec{P}_{C\perp} = \text{costante} \end{cases} \quad (\text{VIII.65})$$

Iniziamo dalla seconda: il vettore $\vec{P}_{C\perp}$ è un vettore che ruota insieme al corpo, esso quindi varia nel tempo, unica soluzione possibile affinché sia costante è $\vec{P}_{C\perp} = 0$. Ciò vuol dire che la rotazione deve avvenire intorno a un asse di simmetria (asse principale d'inerzia) tale che $\vec{P}_{C\perp} =$

$I_C^{Tot} \vec{\omega}$, pari cioè alla componente parallela all'asse di rotazione. E' questa componente quindi che deve risultare costante durante il moto.

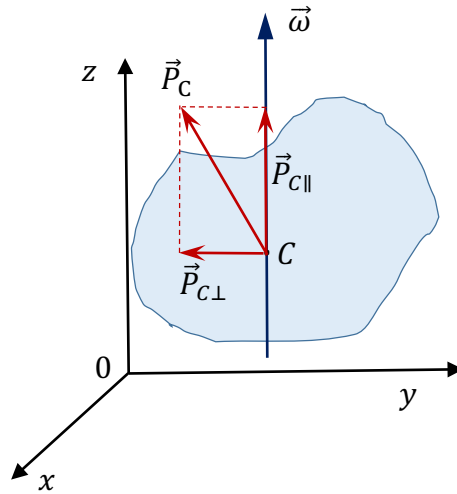


Fig.99, Moto libero di un corpo rigido

La sua direzione non varia nel tempo essendo parallela all'asse di rotazione e la sua ampiezza non varia se $\vec{\omega} = \text{costante}$.

In conclusione il moto libero di un corpo rigido, in assenza di azioni esterne, ha le seguenti proprietà:

- a) Il centro di massa si muove con velocità costante di moto rettilineo uniforme.
- b) La rotazione avviene intorno ad un asse che passa per il centro di massa.
- c) Il vettore momento angolare risulta parallelo all'asse di rotazione che è un asse di "simmetria" (la componente perpendicolare del momento angolare è nulla)
- d) Il corpo ruota con velocità angolare costante.

I corpi solidi possono quindi ruotare liberamente intorno ad assi di "simmetria" per i quali $\vec{P}_{C\perp} = 0$, detti assi centrali di inerzia. I corpi rigidi di qualunque forma hanno almeno tre assi principali di inerzia.

Abbiamo già accennato che sostanzialmente stiamo trattando un principio di inerzia più generale, *in assenza di azioni esterne un corpo rigido mantiene il suo stato di moto di traslazione e di rotazione.*

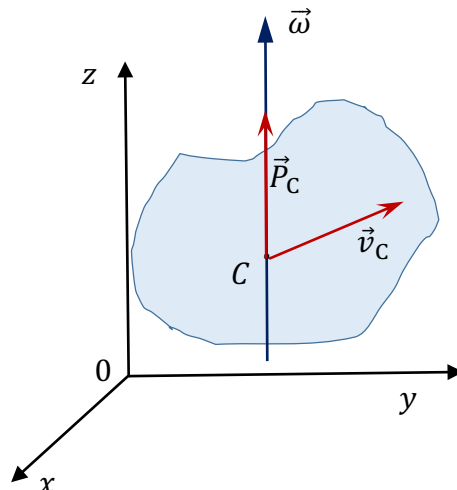


Fig.100, Traslazione e rotazione libera di un corpo rigido

VIII.1.8 Rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse Principale di Inerzia

Il moto di un corpo rigido sotto l'azione di forze esterne è in genere complesso, noi analizzeremo qui di seguito alcune categorie di problemi che riguardano soprattutto il moto di rotazione in presenza di vincoli. Per rendere più semplice la trattazione consideriamo corpi a simmetria assiale (disco, cilindro, sfera, trottola, etc..).

VIII.1.8.1 Rotazione intorno a un asse principale

Abbiamo visto che un corpo rigido può ruotare liberamente intorno a un asse principale di inerzia con velocità angolare costante. Se vogliamo metterlo in rotazione oppure variare la sua velocità angolare dobbiamo agire con una coppia di forze di momento $\vec{\mathcal{M}}^e$ parallelo all'asse. Facciamo notare che non abbiamo indicato il polo dato che il momento di una coppia non dipende dal polo.

Sia $\vec{\omega}_0$ la velocità angolare iniziale e $\vec{P}_{c0} = I_C \vec{\omega}_0$ il momento angolare iniziale, la dinamica del disco a seguito dell'applicazione del momento $\vec{\mathcal{M}}^e$ e determinata dalla II Equazione Cardinale:

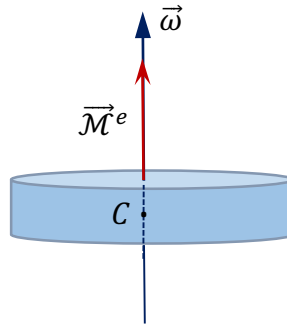


Fig.101, Rotazione intorno a un asse centrale di simmetria

$$\begin{cases} \vec{F}^e = M \vec{a}_c \\ \vec{\mathcal{M}}^e = \frac{d\vec{P}_C}{dt} \end{cases} \quad (\text{VIII.66})$$

Se il corpo sta ruotando intorno a un asse fisso, il centro di massa è fermo e la sua accelerazione è nulla, $\vec{a}_c = 0 \rightarrow \vec{F}^e = 0$. Utilizziamo ora la II E.C. notando che i vettori $\vec{\mathcal{M}}^e$ e \vec{P}_C sono allineati, pertanto possiamo trattare questa equazione come una equazione scalare proiettando entrambi i vettori sull'asse che assumiamo sia l'asse \hat{k} :

$$\mathcal{M}_z^e = \frac{dP_{Cz}}{dt} \quad (\text{VIII.67})$$

dove $dP_{Cz} = I_C \omega_z$, otteniamo:

$$\mathcal{M}_z^e = \frac{d(I_C \omega_z)}{dt} \quad (\text{VIII.68})$$

Per un corpo rigido I_C è costante, abbiamo quindi:

$$\mathcal{M}_z^e = I_C \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\text{VIII.69})$$

dove nel termine a destra riconosciamo l'accelerazione angolare α_z :

$$\mathcal{M}_z^e = I_C \alpha_z \quad (\text{VIII.70})$$

La seconda equazione cardinale ci fornisce pertanto il valore dell'accelerazione angolare

$$\alpha_z = \frac{\mathcal{M}_z^e}{I_C} \quad (\text{VIII.71})$$

Esiste una analogia tra il moto di traslazione e il moto di rotazione con una corrispondenza tra le seguenti grandezze:

$$\begin{cases} F \leftrightarrow \mathcal{M} \\ M \leftrightarrow I_C \\ a \leftrightarrow \alpha \end{cases} \quad (\text{VIII.72})$$

VIII.1.8.2 Rotazione di un disco con \mathcal{M}_z^e costante

Consideriamo un disco omogeneo, con velocità iniziale ω_{z0} (se inizialmente è fermo $\omega_{z0} = 0$), vincolato a ruotare intorno al proprio asse in assenza di attriti, e supponiamo di applicare una coppia di forze con un momento \mathcal{M}_z^e costante. Vogliamo ora ricavare la legge oraria della velocità angolare $\omega_z(t)$ e per l'angolo di rotazione $\varphi(t)$. In questo caso l'accelerazione angolare è costante per cui abbiamo un moto di rotazione uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} \omega_z(t) = \omega_{z0} + \alpha_z t \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2 \end{cases} \quad (\text{VIII.73})$$

La velocità angolare aumenta se $\mathcal{M}_z^e > 0$, il disco rallenta se $\mathcal{M}_z^e < 0$.

Esempio

Un disco omogeneo di raggio $R = 0,1\text{m}$, massa $M = 1\text{ kg}$, sta ruotando senza attriti intorno al proprio asse centrale perpendicolare con velocità angolare $\omega_0 = 100\text{ rad/s}$. Calcolare il tempo di arresto del disco se applichiamo una coppia frenante di momento $|\mathcal{M}| = 10\text{ Nm}$.

Il disco si ferma nell'istante t^* in cui $\omega(t^*) = 0$, ricordando che $\mathcal{M} < 0$, abbiamo :

$$t^* = -\frac{I_C \omega_0}{\mathcal{M}} = -\frac{MR^2 \omega_0}{2\mathcal{M}} = 5\text{s}$$

VIII.1.9 Rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso

In questo paragrafo consideriamo il caso della rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse parallelo a un asse centrale di inerzia e passante per il punto Ω . Il centro di massa in questo caso esegue un moto circolare intorno all'asse di rotazione, pertanto il corpo deve essere vincolato affinché il vincolo eserciti la necessaria forza centripeta. Se applichiamo una coppia di forze di momento dato $\vec{\mathcal{M}}^e$, la II E.C. ci permette di descrivere il moto di rotazione.

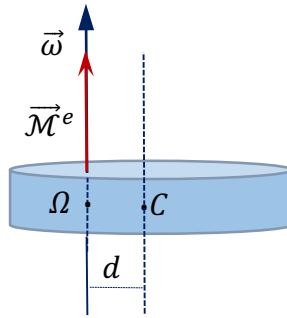


Fig.101, Rotazione intorno a un asse non centrale di simmetria

E' conveniente considerare il polo Ω che si trova sullo stesso piano di simmetria passante per il centro di massa. Infatti il momento angolare rispetto a tale polo ha solo la componente parallela all'asse di rotazione $\vec{P}_\Omega = I_C \vec{\omega}$ e quindi è parallelo al momento applicato \vec{M}^e . <ci troviamo in una situazione analoga al caso precedentemente descritto, risulta:

$$\mathcal{M}_z^e = I_\Omega \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\text{VIII.74})$$

da cui ricaviamo

$$\alpha_z = \frac{\mathcal{M}_z^e}{I_\Omega} \quad (\text{VIII.75})$$

dove $I_\Omega = I_C + Md^2$.

VIII.1.9.1 Oscillazione del pendolo fisico

Un'applicazione di questo caso è l'oscillazione di un pendolo fisico. Applicando la II Equazione cardinale ricaviamo l'accelerazione angolare:

$$\alpha_z = \frac{\mathcal{M}_z^e}{I_\Omega}$$

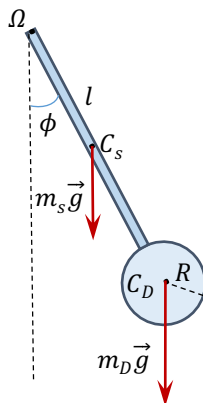


Fig.102, Oscillazioni di un pendolo fisico

Calcoliamo il momento delle forze:

$$\mathcal{M}_z^e = -m_s g \frac{l}{2} \sin\phi - m_D g (l + R) \sin\phi \quad (\text{VIII.76})$$

$$\mathcal{M}_z^e = -g \left[m_s \frac{l}{2} + m_D(l + R) \right] \sin\phi$$

moltiplicando e dividendo per la massa totale,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z^e &= -Mg \left[\frac{m_s \frac{l}{2} + m_D(l + R)}{M} \right] \sin\phi \\ d_c &= \left[\frac{m_s \frac{l}{2} + m_D(l + R)}{M} \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.77})$$

Pertanto, riconosciamo la distanza d_c del centro di massa dal polo:

$$\mathcal{M}_z^e = -Mgd_c \sin\phi \quad (\text{VIII.78})$$

Sostituendo abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{-Mgd_c}{I_\Omega} \sin\phi \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{Mgd_c}{I_\Omega} \sin\phi &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.79})$$

Per piccole oscillazioni:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{Mgd_c}{I_\Omega} \phi = 0 \quad (\text{VIII.80})$$

troviamo l'equazione differenziale del moto armonico la cui soluzione generale è:

$$\phi(t) = \phi_M \sin(\Omega t + \vartheta) \quad (\text{VIII.81})$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgd_c}{I_\Omega}} \quad (\text{VIII.82})$$

Formula che vale per un corpo di forma qualsiasi di massa M , una volta noti d_c e I_Ω .

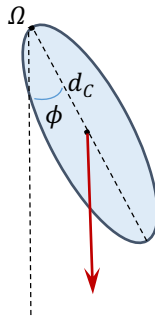


Fig.103, Oscillazioni di un pendolo fisico

VIII.1.10 Rotolamento

VIII.1.10.1 Rotolamento Cinematica

Consideriamo una ruota omogenea di massa M e raggio R appoggiata su una superficie solida che tocca nel punto A . Se la ruota rotola sul piano, il centro di massa ha una velocità \vec{v}_C parallela al piano, mentre il generico punto P della ruota si muoverà secondo una cicloide ruotando intorno al centro di massa.

Se c'è un puro moto di rotolamento il punto A di contatto della ruota non striscia sul piano, e pertanto è istantaneamente fermo rispetto al piano e rispetto all'osservatore in O .

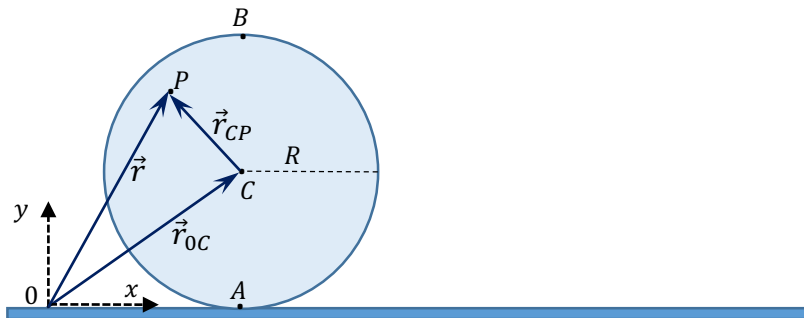


Fig.103, Cinematica del rotolamento

Per studiare la cinematica del rotolamento consideriamo un sistema di assi cartesiani x, y, z , come indicato in figura e con l'asse z perpendicolare al piano del foglio. Il rotolamento è caratterizzato da una velocità angolare $\vec{\omega}(t) = \omega_z(t)\hat{k}$, dove per $\omega_z(t) > 0$ il rotolamento avviene in verso antiorario e per $\omega_z(t) < 0$ avviene in verso orario.

La velocità del generico punto P è data da:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{VIII.83})$$

osservando che

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OC}(t) + \vec{r}_{CP} \quad (\text{VIII.84})$$

la velocità del punto può essere calcolata come

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{CP}}{dt}$$

dove il primo termine rappresenta la velocità del centro di massa \vec{v}_C (velocità di trascinamento) e il secondo termine la velocità del punto rispetto al centro di massa \vec{v}' (velocità relativa). Ricaviamo in tal modo la relazione di composizione di velocità

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}' \quad (\text{VIII.85})$$

Ora sappiamo che il punto P si trova a una distanza fissa dal centro di massa (corpo rigido), \vec{r}_{CP} è pertanto un vettore ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}(t)$, utilizzando le formule di Poisson possiamo scrivere:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP} \quad (\text{VIII.86})$$

Applichiamo questa formula al punto A che è nulla, abbiamo:

$$0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CA} \quad (\text{VIII.87})$$

Esprimiamo questa relazione in coordinate cartesiane:

$$0 = v_{Cx} + \omega_z \hat{k} \times (-R\hat{j}) \quad (\text{VIII.88})$$

otteniamo:

$$v_{Cx} = -\omega_z R \quad (\text{VIII.89})$$

Che rappresenta la condizione cinematica di puro rotolamento, che si estende all'accelerazione:

$$a_{Cx} = -\alpha_z R \quad (\text{VIII.90})$$

Notiamo che $v_{Cx} > 0$ se $\omega_z < 0$, coerentemente al sistema di assi cartesiani scelto.

Se applichiamo ora la formula al punto B sul diametro, opposto al punto A , ricaviamo:

$$v_{Bx} = v_{Cx} - \omega_z R = 2v_{Cx} \quad (\text{VIII.91})$$

Il punto estremo B possiede una velocità pari a $2v_{Cx}$.

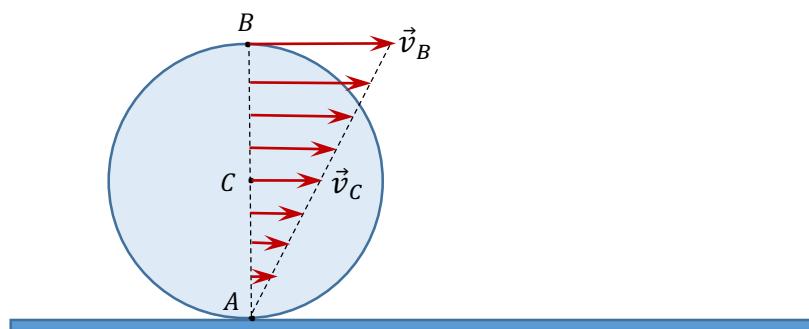


Fig.106, Vettori velocità dei punti sul diametro verticale

La ruota esegue una rotazione intorno all'asse istantaneo passante per il punto A . Il moto complessivo può essere scomposto nella somma di un moto di traslazione e di un moto di rotazione intorno al centro di massa.

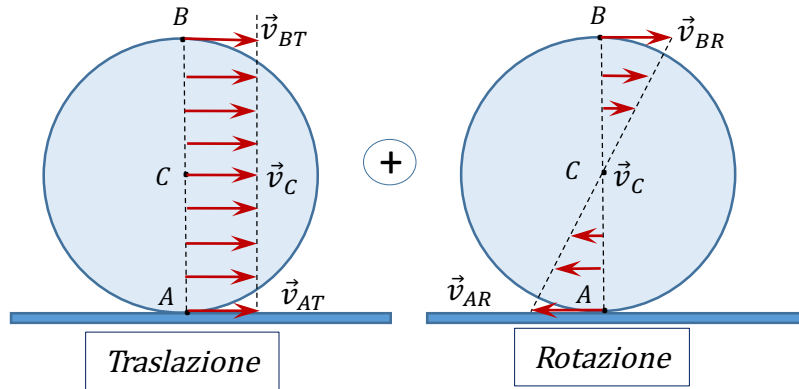


Fig.107, Scomposizione del moto della ruota in traslazione e rotazione

VIII.1.10.2 Dinamica del Rotolamento Libero

Iniziamo a studiare il caso di una ruota che sta rotolando liberamente in assenza di azioni esterne. Abbiamo visto che in questo caso il corpo mantiene il suo stato di moto con velocità del centro di massa v_{Cx} costante, e quindi ω_z costante. E' bene sottolineare che il rotolamento libero avviene in assenza di forze esterne, e quindi anche in assenza degli attriti statico e cinematico. L'attrito quindi non svolge alcun ruolo nel caso di rotolamento libero, mentre sarà rilevante nei due casi di azioni esterne trattate nei due paragrafi che seguono.

VIII.1.10.3 Dinamica del Rotolamento con una forza esterna applicata al centro di massa

Consideriamo il caso di una ruota ferma appoggiata su un piano e vogliamo farla rotolare applicando una forza nota sul centro di massa $\vec{F}^{app} = F_x^{app} \hat{i}$. Osserviamo che se il piano è liscio (privo di attrito) tale forza provoca soltanto un moto di traslazione, la ruota scivola e tutti i punti si muovono con la stessa velocità del centro di massa. Per avere il rotolamento a seguito della spinta esterna è necessario che il piano sia scabro e che la forza di attrito statico sia in grado di mantenere fermo il punto di contatto A.

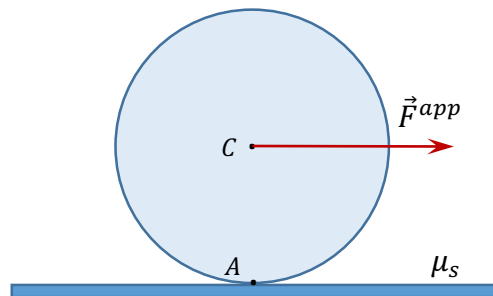


Fig.108, Moto di una ruota su piano scabro, forza orizzontale

Essendo la forza di attrito incognita la chiamiamo $\vec{F}^{a.s.} = F_x^{a.s.} \hat{i}$. Sappiamo che queste due forze generano una forza risultante applicata al centro di massa e una coppia di forze. Le equazioni che governano il moto sono:

$$\begin{cases} \vec{F}^e = M \vec{a}_c \\ \vec{M}_\Omega^e = \frac{d\vec{P}_\Omega}{dt} \end{cases} \quad (\text{VIII.92})$$

Nella prima equazione cardinale il risultante delle forze esterne è pari a:

$$\vec{F}^e = F_x^{app} \hat{i} + F_x^{a.s.} \hat{i} \quad (\text{VIII.93})$$

Per la seconda equazione occorre operare una scelta sul polo tra il centro di massa C e il punto di contatto A . Notiamo che se si sceglie il punto A si semplifica il calcolo dei momenti, dato che la forza di attrito incognita passa per tale punto e produce momento nullo. Otteniamo quindi:

$$\vec{\mathcal{M}}_A^e = -R F_x^{app} \hat{k} \quad (\text{VIII.94})$$

Tale momento agisce sulla componente assiale del momento angolare pertanto le due E.C. diventano:

$$\begin{cases} F_x^{app} + F_x^{a.s.} = M a_{cx} \\ -R F_x^{app} = I_A \alpha_z \end{cases} \quad (\text{VIII.95})$$

Abbiamo un sistema di due equazioni e tre incognite $F_x^{a.s.}$, α_z , a_{cx} , abbiamo quindi bisogno di una terza equazione fornita dalla condizione di rotolamento:

$$\begin{cases} F_x^{app} + F_x^{a.s.} = M a_{cx} \\ -R F_x^{app} = I_A \alpha_z \\ a_{cx} = -\alpha_z R \end{cases} \quad (\text{VIII.96})$$

Risolviamo, ricaviamo:

$$\begin{cases} F_x^{a.s.} = F_x^{app} \left(\frac{MR^2}{I_A} - 1 \right) \\ \alpha_z = -\frac{R F_x^{app}}{I_A} \\ a_{cx} = \frac{R^2 F_x^{app}}{I_A} \end{cases} \quad (\text{VIII.97})$$

Dove il momento di inerzia $I_A = \frac{3}{2} MR^2$, sostituendo ricaviamo:

$$\begin{cases} a_{cx} = \frac{2}{3} \frac{F_x^{app}}{M} \\ F_x^{a.s.} = -\frac{F_x^{app}}{3} \end{cases} \quad (\text{VIII.98})$$

Solo $2/3$ della forza applicata F_x^{app} determina l'accelerazione del centro di massa, in quanto nasce una forza di attrito statico che si oppone al moto.

E' interessante ricordare che l'attrito statico ha un valore massimo oltre il quale il punto di contatto non è più fermo:

$$|F_x^{a.s.}|^{max} = \mu_s R_N = \mu_s M g \quad (\text{VIII.99})$$

Pertanto avremo un puro rotolamento finché la forza applicata non supera il valore:

$$|F_x^{app}| \leq 3\mu_s Mg \quad (\text{VIII.100})$$

Oltre tale valore la ruota striscia.

VIII.1.10.4 Dinamica del Rotolamento con una coppia di forze

Consideriamo il caso di una ruota ferma appoggiata su un piano e vogliamo farla rotolare applicando una coppia di forze di momento noto $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_z \hat{k}$. Se $\mathcal{M}_z > 0$ la coppia ruota in verso antiorario, se $\mathcal{M}_z < 0$, la coppia ruota in verso orario. Osserviamo che se il piano è liscio (privo di attrito) tale coppia provoca soltanto un moto di rotazione, la ruota scivola e il centro di massa rimane fermo. Per avere il rotolamento è necessario che il piano sia scabro e che la forza di attrito statico sia in grado di mantenere fermo il punto di contatto A.

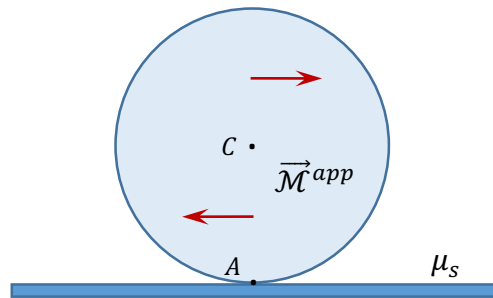


Fig.108, Moto di una ruota su piano scabro, con una coppia di forze

Le equazioni che governano il moto sono:

$$\begin{cases} \vec{F}^e = M\vec{a}_c \\ \vec{\mathcal{M}}^e = \frac{d\vec{P}_C}{dt} \end{cases} \quad (\text{VIII.101})$$

prendiamo come polo il punto A, imponendo la condizione di rotolamento abbiamo:

$$\begin{cases} F_x^{a.s.} = Ma_{cx} \\ \mathcal{M}_z^{app} = I_A \alpha_z \\ a_{cx} = -\alpha_z R \end{cases} \quad (\text{VIII.102})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} F_x^{a.s.} = -\frac{MR\mathcal{M}_z^{app}}{I_A} \\ \alpha_z = \frac{\mathcal{M}_z^{app}}{I_A} \\ a_{cx} = -\frac{R\mathcal{M}_z^{app}}{I_A} \end{cases} \quad (\text{VIII.103})$$

Sostituendo l'espressione del momento d'inerzia otteniamo:

$$\begin{cases} a_{Cx} = -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{M}_z^{app}}{RM} \\ F_x^{a.s.} = -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{M}_z^{app}}{R} \end{cases} \quad (\text{VIII.104})$$

La spinta della ruota è dovuta esclusivamente all'attrito che è l'unica forza esterna ad agire sul centro di massa. Anche in questo caso la forza d'attrito statico non può superare il valore limite, quindi abbiamo:

$$|\mathcal{M}_z^{app}| \leq \frac{3\mu_s Mg}{2R} \quad (\text{VIII.105})$$

Se il momento della coppia supera tale limite, la ruota striscia mentre si mette in moto, come avviene quando si parte dando troppo "gas" al motore.

VIII.1.11 Moto di precessione

In tutti i casi esaminati finora i vettori $\vec{\mathcal{M}}^e$, \vec{P}_Ω e $\vec{\omega}_0$ risultano paralleli, il momento delle forze agirà sul corpo facendo variare la velocità angolare ma non l'asse di rotazione. Questi casi sono analoghi alla traslazione di una massa quando \vec{F}^e , \vec{Q} e \vec{v} sono paralleli. Ma ci chiediamo che moto si genera se il momento delle forze $\vec{\mathcal{M}}^e$ risulta perpendicolare a $\vec{\omega}_0$? Prima di affrontare tale problema ricordiamo cosa accade quando una forza \vec{F}^e agisce in direzione perpendicolare alla velocità \vec{v} . Questo è il caso del moto circolare uniforme in cui la forza centripeta costante costringe il punto materiale a ruotare intorno al centro della circonferenza. Durante il moto \vec{F}^e e \vec{v} risultano costantemente perpendicolari, la forza non modifica il valore della velocità ma solo la sua direzione, infatti applicando il II Principio della dinamica troviamo:

$$d\vec{v} = \vec{F}^e dt \quad (\text{VIII.106})$$

Il vettore velocità cambia continuamente la sua direzione inseguendo la forza applicata.

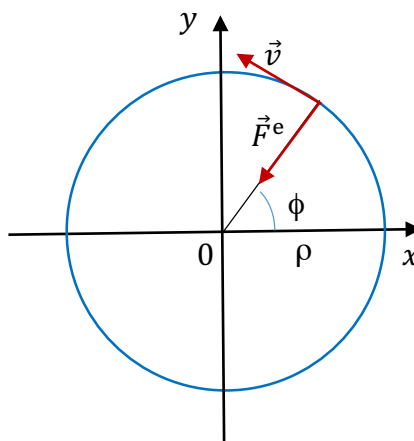


Fig.109, Forza perpendicolare alla velocità in un moto circolare uniforme

Analogamente dobbiamo attenderci che quando un momento costante $\vec{\mathcal{M}}^e$ è perpendicolare a $\vec{\omega}_0$, (e si mantiene tale durante il moto), esso non modifica il valore della velocità angolare ma solo la sua direzione, e quindi anche la direzione del momento angolare.

Prendiamo ad esempio ideale di un disco che sta ruotando intorno al suo asse centrale di simmetria (perpendicolare al disco), e che possa ruotare liberamente intorno al centro C.

Supponiamo di applicare una coppia di forze di momento $\vec{\mathcal{M}}^e$ perpendicolare all'asse di rotazione:

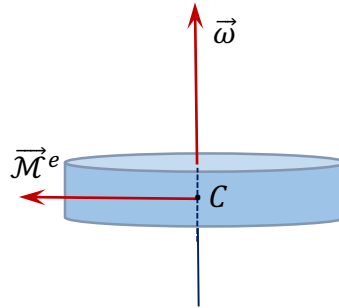


Fig.110, Momento delle forze perpendicolare alla velocità angolare, moto di precessione

Il risultante delle forze esterne applicate al disco è nullo, quindi il centro di massa rimane fermo. Il moto di rotazione è descritto dalla II E.C.

$$\vec{\mathcal{M}}_C^e = \frac{d\vec{P}_C}{dt} \quad (\text{VIII.107})$$

La prima considerazione da fare riguarda la velocità angolare $\vec{\omega}_0$, essendo il momento delle forze perpendicolare all'asse di rotazione otteniamo:

$$\frac{dP_{\Omega\parallel}}{dt} = I_C \frac{d\omega_0}{dt} = 0 \quad (\text{VIII.108})$$

da cui ricaviamo che il valore della velocità angolare ω_0 di rotazione intorno all'asse centrale è costante. Per analizzare come la velocità angolare e il momento angolare variano la direzione, applichiamo la II E.C. da cui ricaviamo:

$$d\vec{P}_C = \vec{\mathcal{M}}_C^e dt \quad (\text{VIII.109})$$

osserviamo che la variazione infinitesima del momento angolare $d\vec{P}_C$ è parallela a $\vec{\mathcal{M}}_C^e$ e quindi il vettore \vec{P}_C ruota inseguendo $\vec{\mathcal{M}}_C^e$.

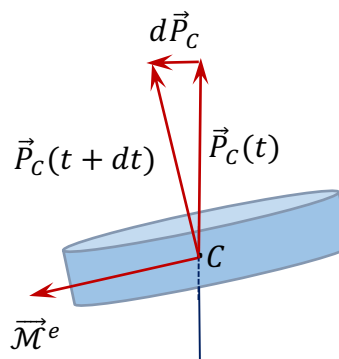


Fig.111, Rotazione del momento angolare nel moto di precessione

negli istanti di tempo successivi il disco ruoterà sempre nella stessa direzione, i vettori \vec{P}_C e $\vec{\mathcal{M}}_C^e$ rimangono costanti in modulo e perpendicolari tra loro. Questo moto di rotazione si chiama *moto di precessione* che si aggiunge al moto di rotazione del disco intorno al proprio asse.

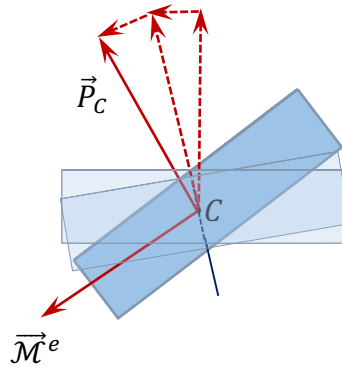


Fig.112, Nel moto di precessione \vec{P}_C insegue \vec{M}_C^e

Per calcolare la velocità angolare del moto di precessione, notiamo che il vettore momento angolare \vec{P}_C è un vettore ruotante con velocità angolare $\vec{\omega}_p$ intorno all'asse passante per C e perpendicolare al piano del foglio; usando le formule di Poisson troviamo:

$$\vec{M}_C^e = \frac{d\vec{P}_C}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{P}_C \quad (\text{VIII.110})$$

data la perpendicolarità tra $\vec{\omega}_p$ e \vec{P}_C , per i moduli troviamo la seguente relazione:

$$|\vec{M}_C^e| = |\vec{\omega}_p| \cdot |\vec{P}_C| \quad (\text{VIII.111})$$

da cui ricaviamo:

$$|\vec{\omega}_p| = \frac{|\vec{M}_C^e|}{|\vec{P}_C|} = \frac{|\vec{M}_C^e|}{I_C \omega_0} \quad (\text{VIII.112})$$

Questo fenomeno è alla base del funzionamento del *giroscopio*, della trottola, spiega la precessione degli equinozi, e l'assetto delle moto in curva.

VIII.1.11.1 Il Giroscopio

Il caso ideale che abbiamo esaminato non tiene conto del fatto che nella realtà il corpo è soggetto alla forza gravitazionale che agisce sul centro di massa. Il Giroscopio è lo strumento formato da un disco girevole intorno a un asse e collegato a un'asta rigida con un contrappeso alla sua estremità. Il sistema è appoggiato su un'asta verticale che ne sorregge il peso. Se il punto di appoggio coincide con il centro di massa, il disco ruota liberamente con velocità angolare e asse di rotazione costante. Se spostiamo il contrappeso in modo che il centro di massa si sposti, come in figura, la forza $M\vec{g}$ e la reazione normale \vec{R}_N generano una coppia di momento \vec{M}_C^e perpendicolare a \vec{P}_C , nasce il moto di precessione, l'asse di rotazione del disco, e il momento angolare \vec{P}_C , iniziano a ruotare con velocità angolare $\vec{\omega}_p$ intorno all'asse individuato dall'asta verticale passante per il punto O.

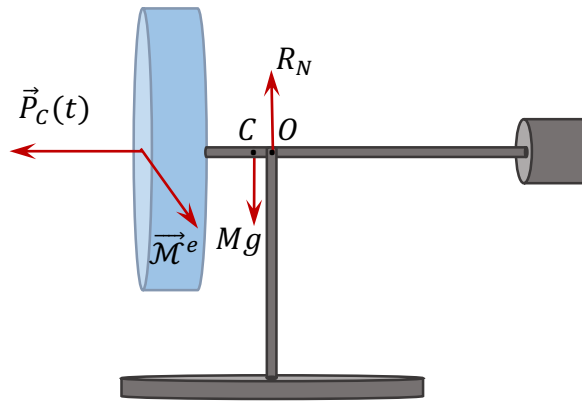


Fig.113, Nel moto di precessione in un Giroscopio $\vec{P}_C(t)$ insegue \vec{M}_C^e

Il valore della velocità di precessione è anche in questo caso dato dalla formula VIII.110

$$|\vec{\omega}_P| = \frac{|\vec{M}_C^e|}{|\vec{P}_C|} = \frac{|\vec{M}_C^e|}{I_C \omega_0}$$

dove $|\vec{M}_C^e| = Mg d_C$, dipende da d_C misura dello spostamento del centro di massa dal punto O.

VIII.1.11.2 La Trottola

Studiamo ora il moto di una trottola che, messa in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω_0 , è appoggiata su un piano privo di attrito. Per effetto dell'inclinazione essa inizia a ruotare intorno all'asse di precessione perpendicolare al piano, passante per il centro di massa. Supponiamo che nel momento del contatto con il piano l'asse di rotazione formi un angolo ϑ rispetto alla verticale passante per il centro di massa. Chiamiamo d_C la distanza del centro di massa dal punto di contatto A. A causa dell'assenza di attrito non ci sono forze orizzontali sul corpo, e assumendo per il momento che \vec{R}_N sia uguale ed opposta a $M\vec{g}$, anche la risultante delle forze verticali è nullo. Per la prima equazione cardinale il centro di massa non è accelerato, mantiene il suo stato di moto, se è fermo rimane fermo.

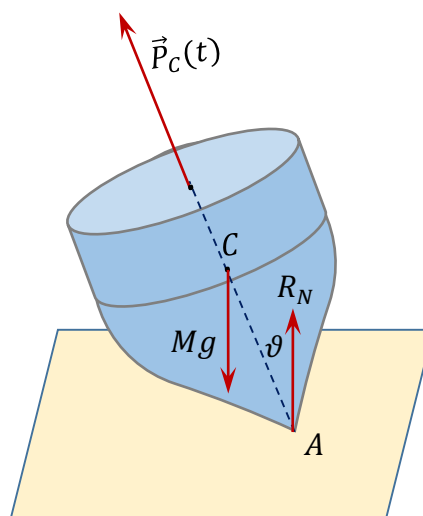


Fig.114, Moto di una trottola appoggiata su un piano privo di attrito

La forza peso e la reazione normale formano una coppia di forze di cui possiamo calcolare il momento:

$$|\vec{\mathcal{M}}_C^e| = Mgd_C \sin\vartheta$$

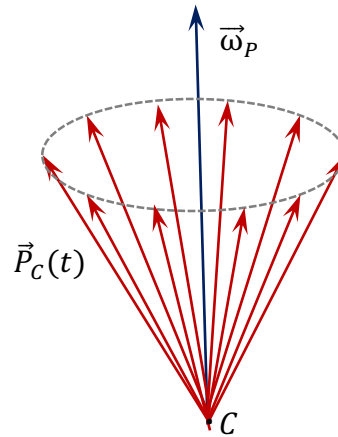


Fig.115, Il vettore \vec{P}_C ruota e descrive una superficie conica

Notiamo che ϑ è anche l'angolo tra \vec{P}_C e $\vec{\omega}_P$ pertanto dalla seconda equazione cardinale abbiamo:

$$|\vec{\mathcal{M}}_C^e| = |\vec{\omega}_P \times \vec{P}_C| = |\vec{\omega}_P| |\vec{P}_C| \sin\vartheta \quad (\text{VIII.113})$$

La trottola esegue un moto di precessione con:

$$|\vec{\omega}_P| = \frac{|\vec{\mathcal{M}}_C^e|}{|\vec{P}_C| \sin\vartheta} = \frac{Mgd_C \sin\vartheta}{I_C \omega_0 \sin\vartheta} = \frac{Mgd_C}{I_C \omega_0} \quad (\text{VIII.114})$$

L'ipotesi che la reazione normale equilibri la forza peso è applicabile solo se

$$|\vec{\omega}_P| \ll \omega_0$$

VIII.1.11.3 Moto di precessione dell'asse terrestre

La terra non è sferica ma ha uno schiacciamento all'equatore e durante il moto di rivoluzione intorno al sole si comporta come una grande trottola con l'asse di rotazione inclinato di circa $23^\circ 27'$ rispetto all'eclittica (piano orbitale). L'attrazione gravitazionale esercitata dalla Luna e dal Sole genera una coppia di forze che tende a "raddrizzare l'asse terrestre". La coppia causa un moto di precessione con una velocità angolare di $(50,26)''$ all'anno *in senso orario* (precessione degli equinozi descritta già dall'astronomo greco Ipparco di Nicea, intorno al 130 A.C.). Il moto di precessione fa sì che l'anno tropico, calcolato sul ripetersi delle stagioni, e quindi rispetto alla posizione del sole, sia di 20 minuti inferiore all'anno sidereo (durata della rivoluzione sull'orbita intera) rispetto alle stelle fisse. Si tenga presente che il calendario

utilizzato comunemente riguarda l'anno tropico e quindi non corrisponde a un giro esatto dell'orbita della terra, ma è inferiore di 20 minuti.

A causa della precessione l'asse di rotazione terrestre descrive un cono completo in circa 25.786 anni (*anno platonico*) con un angolo pari a $46^{\circ}54'$.

VIII.2 ENERGIA CINETICA E POTENZIALE DI UN CORPO RIGIDO

VIII.2.1 *Energia Cinetica, teorema di Koenig*

Consideriamo il corpo che trasla e ruota come in figura, e assumiamo il corpo continuo formato di un numero infinito di masse infinitesime dm .

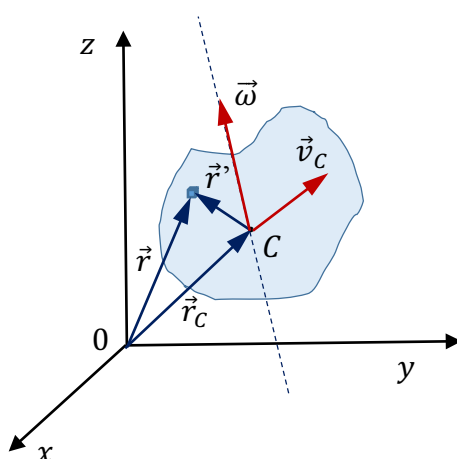


Fig.116 Energia cinetica di un solido in moto nello spazio

L'energia cinetica del sistema vista da un osservatore in O è data dalla somma delle energie di tutte le masse infinitesime che formano il corpo:

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad (\text{VIII.115})$$

Analogamente se osserviamo il sistema dal centro di massa, l'energia cinetica totale per un osservatore in O' sarà:

$$K' = \frac{1}{2} \int v'^2 dm \quad (\text{VIII.116})$$

dove \vec{v}' è la velocità relativa al centro di massa.

Ci chiediamo qual è la relazione tra K e K' . Analogamente a quanto già visto per i sistemi di punti materiali, esprimiamo la velocità di ciascuna massa dm come somma della velocità del centro di massa e la velocità relativa al centro di massa:

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}' \quad (\text{VIII.117})$$

Esprimiamo il quadrato del modulo della velocità come prodotto scalare del vettore per sé stesso:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad (\text{VIII.118})$$

Sostituendo

$$\vec{v} = (\vec{v}_C + \vec{v}') \cdot (\vec{v}_C + \vec{v}') = v_C^2 + v'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}' \quad (\text{VIII.119})$$

inserendo nell'espressione dell'energia cinetica abbiamo:

$$K = \frac{1}{2} \int (v_C^2 + v'^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}') dm \quad (\text{VIII.120})$$

Sviluppiamo:

$$K = \frac{1}{2} \int v_C^2 dm + \frac{1}{2} \int v'^2 dm + \int \vec{v}_C \cdot \vec{v}' dm \quad (\text{VIII.121})$$

portiamo i termini costanti fuori dalla sommatoria

$$K = \frac{1}{2} v_C^2 \int dm + \frac{1}{2} \int v'^2 dm + \vec{v}_C \cdot \int \vec{v}' dm \quad (\text{VIII.122})$$

e analizziamo ciascun termine.

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica della massa totale M posizionata nel centro di massa:

$$K_C = \frac{1}{2} M v_C^2 \quad (\text{VIII.123})$$

il secondo termine rappresenta l'energia cinetica rispetto al sistema di riferimento del centro di massa:

$$K' = \frac{1}{2} \int v'^2 dm \quad (\text{VIII.124})$$

Per quanto riguarda il terzo termine osserviamo che:

$$\int \vec{v}' dm = \int d\vec{q}' = \vec{Q}' \quad (\text{VIII.125})$$

è pari alla quantità di moto totale del sistema calcolata rispetto centro di massa. Ora per la proprietà della quantità di moto deve risultare:

$$\vec{Q}' = M \vec{v}'_C = 0 \quad (\text{VIII.126})$$

dato che \vec{v}'_C è la velocità del centro rispetto al centro di massa. In conclusione il Teorema di Koenig afferma che l'energia cinetica di un sistema è pari alla somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia del sistema calcolata rispetto al centro di massa:

$$K = \frac{1}{2} M v_C^2 + K' \quad (\text{VIII.127})$$

VIII.2.1.1 Energia cinetica di rotazione

Durante la rotazione intorno all'asse un punto qualsiasi del corpo rigido descrive una rotazione con una velocità:

$$v' = \rho \omega$$

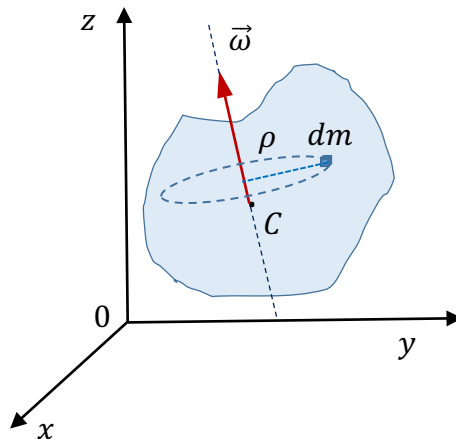


Fig.117 Energia di rotazione di un corpo intorno a un asse centrale

pertanto energia cinetica K' rispetto al centro di massa assume la seguente semplice espressione:

$$K' = \frac{1}{2} \int (\rho\omega)^2 dm = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (\text{VIII.128})$$

VIII.2.2 Energia Potenziale

Analogamente ai sistemi di punti materiali, l'energia potenziale di un corpo sottoposto all'azione della forza peso è pari a:

$$U = Mgz_C \quad (\text{VIII.129})$$

dove z_C è la quota del centro di massa rispetto al sistema di riferimento prescelto.

CAPITOLO IX: GLI URTI

Quando due masse libere si scontrano e la collisione è caratterizzata da forze interne molto intense e di breve durata, tali da poterle considerare forze impulsive, parliamo di fenomeni d'urto. Abbiamo già visto nel paragrafo III.10.3 che quando una forza impulsiva ideale agisce su una massa, si riscontra solo una variazione di velocità mentre la sua posizione, nel brevissimo periodo si durata dell'impulso, rimane invariata.

La breve durata e l'intensità delle forze interne durante la collisione fanno sì che l'impulso delle forze esterne possa essere trascurato, pertanto la variazione della quantità di moto nell'intervallo Δt della collisione è dovuta principalmente alle forze interne impulsive.

In figura rappresentiamo il caso della forza peso, ma tale proprietà vale anche per altre forze come l'attrito, forza elastica etc.

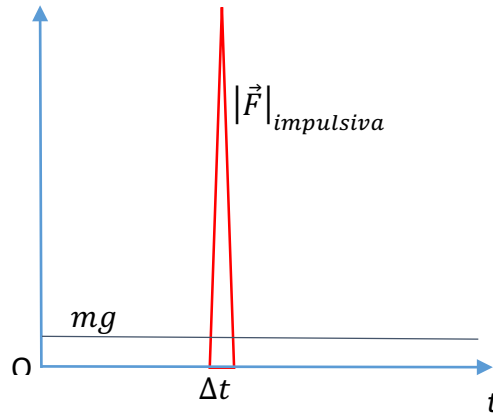


Fig.118, Forze impulsive negli urti

IX.1 URTI TRA MASSE LIBERE

IX.1.1 Conservazione della quantità di moto

Consideriamo due masse libere m_A e m_B , che si scontrano con velocità \vec{v}_A e \vec{v}_B nell'istante t_1 (prima dell'urto), vogliamo calcolare la velocità delle due masse nell'istante $t_2 = t_1 + \Delta t$ (dopo l'urto). Su ciascuna massa agiscono forze interne e forze esterne, la variazione della quantità di moto per ciascuna massa, applicando il teorema dell'impulso e della quantità di moto è pari a:

$$\begin{cases} \vec{q}_A(t_2) - \vec{q}_A(t_1) = \vec{I}_A^{ext} + \vec{I}_A^{int} \\ \vec{q}_B(t_2) - \vec{q}_B(t_1) = \vec{I}_B^{ext} + \vec{I}_B^{int} \end{cases} \quad (\text{IX.1})$$

Sappiamo inoltre che:

$$\vec{I}_A^{int} = -\vec{I}_B^{int} \quad (\text{IX.2})$$

e nell'ipotesi di forze impulsive inoltre:

$$\begin{cases} |\vec{I}_A^{ext}| \ll |\vec{I}_A^{int}| \\ |\vec{I}_B^{ext}| \ll |\vec{I}_B^{int}| \end{cases} \quad (\text{IX.3})$$

sotto tali ipotesi, sommando le due equazioni otteniamo:

$$\vec{q}_A(t_1) + \vec{q}_B(t_1) = \vec{q}_A(t_2) + \vec{q}_B(t_2) \quad (\text{IX.4})$$

Possiamo affermare che in un processo d'urto tra due masse libere, caratterizzato da forze interne impulsive, la quantità di moto totale $\vec{Q} = \vec{q}_A + \vec{q}_B$ non varia.

$$\vec{Q}(t_1) = \vec{Q}(t_2) \quad (\text{IX.5})$$

Inoltre, potendo trascurare le forze esterne risulta anche $\vec{\mathcal{M}}^e = 0$, si conserva anche il momento angolare

$$\vec{P}_\Omega(t_1) = \vec{P}_\Omega(t_2) \quad (\text{IX.6})$$

La conservazione della quantità di moto comporta che la velocità del centro di massa dei due corpi non varia durante l'urto:

$$\vec{v}_C(t_2) = \vec{v}_C(t_1) \quad (\text{IX.7})$$

IX.1.2 Effetti sull'energia cinetica

Consideriamo ora la variazione di energia del sistema a seguito dell'urto. Dato che la posizione delle masse non varia nell'urto, l'energia potenziale non varia, mentre l'effetto dell'urto sulle velocità farà variare l'energia cinetica.

Per analizzare tali effetti esprimiamo l'energia cinetica mediante il teorema di Koenig:

$$K = K_C + K' \quad (\text{IX.8})$$

quindi avremo

$$\begin{cases} K(t_2) = K_C(t_2) + K'(t_2) \\ K(t_1) = K_C(t_1) + K'(t_1) \end{cases} \quad (\text{IX.9})$$

Ora sappiamo che l'energia cinetica associata al centro di massa è costante nell'urto

$$K_C(t_2) = K_C(t_1) \quad (\text{IX.10})$$

La variazione di energia cinetica sarà:

$$K(t_2) - K(t_1) = K'(t_2) - K'(t_1) \quad (\text{IX.11})$$

Osserviamo pertanto che nell'urto l'energia cinetica del centro di massa si conserva, la collisione può modificare solo l'energia K' . Possiamo individuare tre casi:

$$K'(t_2) = K'(t_1) \quad (\text{IX.12})$$

L'energia cinetica totale si conserva

$$K(t_2) = K(t_1) \quad (\text{IX.13})$$

in tal caso l'urto si dice *elastico*, e la conservazione dell'energia fornisce una quarta equazione disponibile.

Quando si verifica

$$K'(t_2) < K'(t_1) \quad (\text{IX.14})$$

l'urto si dice *anelastico*, l'energia cinetica non si conserva.

Infine, quando

$$K'(t_2) = 0 \quad (\text{IX.15})$$

l'urto si dice *totalmente anelastico*, l'energia cinetica dopo l'urto è pari a quella del centro di massa che, come abbiamo visto, non viene alterata dalla collisione.

$$K(t_2) = K_C \quad (\text{IX.16})$$

IX.1.3 *Urto totalmente anelastico*

Questo è il caso più semplice da trattare, due masse puntiformi in moto si urtano e si fondono proseguendo il moto come una massa unica. Consideriamo due masse m_A e m_B che nell'istante t_1 si urtano con velocità v_A e v_B muovendosi sulla stessa retta, e supponiamo che dopo la collisione, nell'istante t_2 , le due masse proseguano insieme con una velocità V .

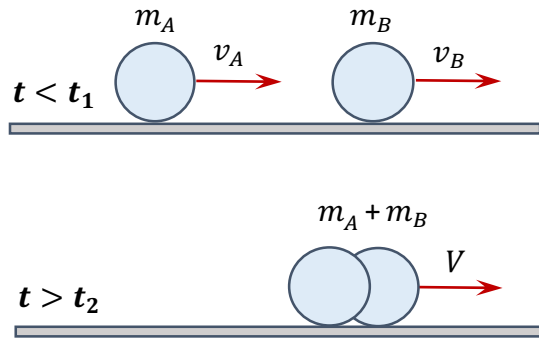


Fig.119, *Urto totalmente anelastico*

Uguagliamo la quantità di moto prima e dopo l'urto abbiamo:

$$Q(t_1) = Q(t_2) \quad (\text{IX.17})$$

cioè:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) V \quad (\text{IX.18})$$

da cui:

$$V = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{(m_A + m_B)} \quad (\text{IX.19})$$

Facciamo notare che V è pari alla velocità del centro di massa, pertanto $K(t_2) = K_C$, e possiamo verificare quindi che l'urto è totalmente anelastico.

IX.1.4 *Urto centrale elastico*

In questo caso le due masse rimbalzano elasticamente nell'urto e proseguono con velocità V_A e V_B diverse tra loro.

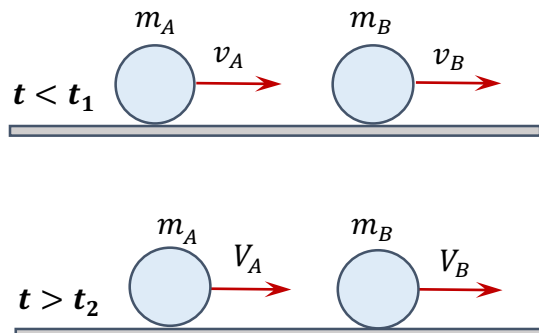


Fig.120, Urto elastico

Per risolvere questo caso, che chiamiamo *urto centrale elastico*, in cui si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica scriviamo:

$$\begin{cases} Q(t_1) = Q(t_2) \\ K(t_1) = K(t_2) \end{cases} \quad (\text{IX.20})$$

cioè:

$$\begin{cases} m_A v_A + m_B v_B = m_A V_A + m_B V_B \\ \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 \end{cases} \quad (\text{IX.21})$$

Il sistema si risolve con i seguenti passaggi:

$$\begin{cases} m_A(v_A - V_A) = m_B(V_B - v_B) \\ m_A(v_A^2 - V_A^2) = m_B(V_B^2 - v_B^2) \end{cases} \quad (\text{IX.22})$$

Dividiamo la seconda equazione per la prima (sostituiamo la seconda equazione del sistema):

$$\begin{cases} m_A(v_A - V_A) = m_B(V_B - v_B) \\ (v_A + V_A) = (V_B + v_B) \end{cases} \quad (\text{IX.23})$$

otteniamo in tal modo un sistema di due equazioni lineari. Ricaviamo V_B nella seconda

$$\begin{cases} m_A(v_A - V_A) = m_B(V_B - v_B) \\ V_B = v_A + V_A - v_B \end{cases} \quad (\text{IX.24})$$

e sostituiamo nella prima equazione, abbiamo:

$$\begin{cases} m_A(v_A - V_A) = m_B(v_A + V_A - v_B) - m_B v_B \\ V_B = v_A + V_A - v_B \end{cases} \quad (\text{IX.25})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} V_A = \frac{(m_A - m_B)}{(m_A + m_B)} v_A + \frac{2m_B}{(m_A + m_B)} v_B \\ V_B = \frac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)} v_B + \frac{2m_A}{(m_A + m_B)} v_A \end{cases} \quad (\text{IX.26})$$

Esaminiamo vari casi:

IX.1.4.1 Masse uguali

Se le masse sono uguali $m_A = m_B = m$ abbiamo:

$$\begin{cases} V_A = v_B \\ V_B = v_A \end{cases} \quad (\text{IX.27})$$

Le due masse si scambiano la velocità. Nel caso in cui la massa B sia inizialmente ferma troviamo:

$$\begin{cases} V_A = 0 \\ V_B = v_A \end{cases} \quad (\text{IX.28})$$

La massa A nell'urto con la massa B si ferma, mentre B prosegue con la velocità v_A . Questo scambio di velocità si osserva facilmente su un tavolo da biliardo.

IX.1.4.2 La massa m_A trascurabile rispetto alla massa m_B

$$m_B \gg m_A \quad (\text{IX.29})$$

In tal caso abbiamo:

$$\begin{cases} V_A \cong -v_A + 2v_B \\ V_B \cong v_B \end{cases} \quad (\text{IX.30})$$

Supponiamo ora che la massa B sia inizialmente ferma, abbiamo:

$$\begin{cases} V_A \cong -v_A \\ V_B \cong 0 \end{cases} \quad (\text{IX.31})$$

troviamo in questo caso che la massa A rimbalza sulla massa B invertendo il moto con una velocità uguale e contraria (riflessione).

IX.2 URTI TRA CORPI VINCOLATI

Quando un corpo vincolato A è colpito da una massa B , durante l'urto la reazione vincolare è anch'essa impulsiva, infatti essa deve reagire all'urto per mantenere fermo almeno un punto del corpo. In questo caso non sono più valide le relazioni:

$$\begin{cases} |\vec{I}_A^{ext}| \ll |\vec{I}_A^{int}| \\ |\vec{I}_B^{ext}| \ll |\vec{I}_B^{int}| \end{cases} \quad (\text{IX.32})$$

e quindi nemmeno possiamo affermare che la quantità di moto e il momento angolare si conservano nell'urto. Ci sono tuttavia casi particolari per i quali è possibile descrivere l'urto e calcolare le variazioni di velocità da esso causate. Ciò è possibile quando le forze vincolari agiscono su un punto del corpo (vincolo), e il momento delle forze rispetto a tale punto (che scegliamo come polo) è nullo. In tal caso il momento angolare rispetto al polo risulta costante nell'urto.

IX.2.1 Pendolo balistico

Consideriamo ad esempio il caso di un pendolo in equilibrio che viene colpito da un proiettile come in figura. Osserviamo che durante l'urto (in cui il pendolo non si sposta) la forza peso e la reazione vincolare hanno la retta d'azione che passa per il polo Ω . Rispetto a tale polo il momento delle forze esterno è nullo, $\vec{M}_\Omega^e = 0$,

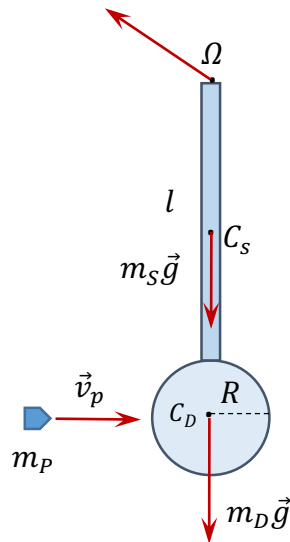


Fig.122, Pendolo balistico

Pertanto durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto a tale polo:

$$\vec{P}_\Omega(t_1) = \vec{P}_\Omega(t_2) \quad (\text{IX.33})$$

tenendo conto che prima dell'urto il pendolo è fermo, e dopo l'urto il proiettile si conficca nel centro del disco, scriviamo:

$$m_p v_p (l + R) \hat{k} = I_\Omega \omega(t_2) \hat{k} \quad (\text{IX.34})$$

da cui ricaviamo:

$$\omega(t_2) = \frac{m_p v_p (l + R)}{I_\Omega} \quad (\text{IX.35})$$

Per quanto riguarda il momento d'inerzia, esso sarà composto da tre termini, sbarretta, disco e proiettile:

$$I_\Omega = \frac{m_S l^2}{3} + m_D \left[\frac{R^2}{2} + (l + R)^2 \right] \quad (\text{IX.36})$$

Bibliografia:

[1] Mencuccini, Silvestrini, Meccanica e Termodinamica, Casa Editrice Ambrosiana.