Problemi Di Cinematica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un punto materiale si muove lungo la traiettoria di equazione $y = x^2$ e, lungo x, ha componente della velocità $\dot{x} = 2\,m/s$, costante. Determinare velocità ed accelerazione, in modulo e direzione, in corrispondenza alla posizione $x = 0,5\,m$.

Il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\dot{x}^2 + (2x\dot{x})^2} = \dot{x}\sqrt{1 + (2x)^2} = 2\sqrt{2}\,m/s.$$

La sua direzione risulta da:

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x = 1, \qquad \theta = 45°.$$

Modulo dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = 0; \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x}; \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x} = 8\,m/s^2.$$

La direzione è quella positiva dell'asse y.

2. Un punto materiale si muove di moto armonico. Alla distanza dalla posizione di equilibrio $x = 6\,cm$ la velocità del punto è $v = 40\,cm/s$, mentre alla distanza $x = 8\,cm$ la velocità risulta $v = 30\,cm/s$. Determinare ampiezza e velocità massima.

Dall'equazione del moto e dalla velocità

$$x = A\sin\omega t, \qquad \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

quadrando e sostituendo i valori assegnati, si ha

$$\sin^2\omega t = \frac{36}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{1600}{A^2\omega^2}.$$

$$\sin^2\omega t = \frac{64}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{900}{A^2\omega^2}$$

Sommando:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{1600}{A^2\omega^2} = 1, \qquad \frac{64}{A^2} + \frac{900}{A^2\omega^2} = 1.$$

Da cui

$$36\,\omega^2 + 1600 = A^2\omega^2, \qquad 64\,\omega^2 + 900 = A^2\omega^2.$$

Si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{700}{28}} = 5\,s^{-1}, \qquad A = \sqrt{36 + \frac{1600}{\omega^2}} = 10\,cm$$

$$v_{max} = A\omega = 50\,cm/s.$$

3. Un'automobile lunga $l = 3\,m$ viaggia in un tratto rettilineo alla velocità $v = 130\,km/h$. Calcolare il tempo t necessario per il sorpasso di un autocarro, lungo $l_1 = 12\,m$, che viaggia alla velocità costante $v_1 = 90\,km/h$. Trovare quale accelerazione costante occorre imprimere all'automobile all'inizio del sorpasso, perché il tempo di sorpasso si riduca di 1/5.

Quando i due veicoli viaggiano a velocità costante si ha

$$t = \frac{l + l_1}{v - v_1} = 1,35\,s \tag{1}$$

Ma il tempo di sorpasso dev'essere ridotto di $1/5$, $t' = 4t/5$, quindi l'automobile deve assumere una accelerazione a tale che la distanza $l + l_1$ (lunghezza dei due veicoli) venga percorsa nel tempo t', essendo la velocità iniziale quella relativa $v - v_1$. Quindi:

$$l + l_1 = \frac{1}{2}at'^2 + (v - v_1)t'.$$

Sostituendo nella precedente $t' = 4t/5$ e $v - v_1 = (l + l_1)/t$ ricavato dalla (1), si ottiene:

$$a = \frac{5}{8}\frac{1}{t^2}(l + l_1) = 5,14\,m/s^2.$$

4. Due tratti rettilinei a 90° di una pista automobilistica sono raccordati da una curva formata da un quarto di circonferenza di raggio R. Un pilota, proveniente da un tratto rettilineo, giunge in P_0 (inizio della curva) con accelerazione tangenziale a_t e percorre la curva mantenendo costante tale accelerazione. Sapendo che in P_0 l'accelerazione normale è $2a_t$, determinare l'accelerazione normale nel punto P in cui termina la curva e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla ($R = 100\,m$; $a_t = 5\,m/s^2$).

Detta v_0 la velocità in P_0, si ha

$$a_n(P_0) = 2a_t = \frac{v_0^2}{R}, \qquad a_n(P) = \frac{v^2}{R}. \tag{1}$$

Dalla legge cinematica,

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t},$$

dove $\Delta s = \pi R/2$ è la lunghezza dell'arco del quarto di circonferenza, si ricava:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t\Delta s = v_0^2 + a_t\pi R.$$

Quindi,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} + \pi a_t.$$

Si trae:

$$a_n(P) = a_n(P_0) + \pi a_t = a_t(2 + \pi) = 25,7\,m/s^2. \tag{2}$$

La relazione

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a_t},$$

fornisce l'intervallo di tempo impiegato per percorrere la curva, dove, per le (1) e (2),

$$v_0 = \sqrt{2a_tR} = 31,6\,m/s; \qquad v = \sqrt{a_t(2 + \pi)R} = 50,7\,m/s.$$

Pertanto:

$$\Delta t = 3,8\,s$$

5. Due imbarcazioni A e B procedono in direzioni opposte con velocità costanti, $v_A = 20\,km/h$ e $v_B = 30\,km/h$. Nell'istante in cui la distanza tra le imbarcazioni è d, da A viene sparato un proiettile con velocità, relativa all'imbarcazione, di modulo $v_P = 150\,m/s$ ed alzo $\theta = 30°$. Determinare la distanza d perché il proiettile colpisca B. Trascurare le dimensioni delle imbarcazioni e la resistenza dell'aria.

Il problema può essere risolto nel riferimento fisso o nel riferimento solidale con A.

Nel primo caso, tenuto conto che la componente orizzontale della velocità del proiettile è somma di $v_P\cos\theta$ e della velocità di A, le equazioni del moto sono,

$$x = (v_A + v_P\cos\theta)t; \qquad y = v_P\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

Il tempo di gittata va ricavato dalla seconda per $y=0$; si ha

$$t_G = \frac{2v_P \sin\theta}{g};$$

si noti che esso è indipendente da v_A. Sostituendo nella prima delle (1) e tenendo conto del moto dell'imbarcazione B, la gittata x_G risulta:

$$x_G = (v_A + v_P\cos\theta)\, t_G = d - v_B\, t_G,$$

dalla quale si ricava:

$$d = (v_A + v_B + v_P\cos\theta)\, t_G = 2,2\, km. \tag{2}$$

Nel riferimento solidale con A le equazioni del moto diventano:

$$x' = v_P\cos\theta\, t; \qquad y' = v_P\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il tempo di gittata è lo stesso del primo caso. La gittata, tenuto conto che la velocità relativa delle imbarcazioni è $v_A + v_B$, risulta:

$$x'_G = v_P\cos\theta\, t_G = d - (v_A + v_B)\, t_G,$$

da cui si ottiene lo stesso valore della (2).

6. Un bersaglio B posto all'altezza $h = 5\, m$ da un piano orizzontale, dev'essere colpito da un proiettile sparato da un carrello che si muove sul piano con velocità costante $v_C = 4,95\, m/s$, verso la proiezione O del bersaglio sul piano stesso. Determinare l'alzo θ in modo che il bersaglio venga colpito nel punto più alto della traiettoria del proiettile, se questo viene sparato quando il carrello si trova da O alla distanza uguale all'altezza h. Trascurare il rinculo del carrello.

Detto v_0 il modulo della velocità del proiettile, come noto, le equazioni del moto nel riferimento fisso, sono:

$$x = (v_C + v_0\cos\theta)t; \qquad y = v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

che per $x = y = h$, diventano,

$$h = (v_C + v_0\cos\theta)t; \qquad h = v_0\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Derivando rispetto al tempo si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = v_C + v_0\cos\theta; \qquad \dot{y} = v_0\sin\theta - gt,$$

e dalla seconda, annullando la componente verticale della velocità, il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere la massima quota:

$$t = \frac{v_0\sin\theta}{g}. \tag{3}$$

Sostituendo nella seconda delle (2), si ottiene,

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin^2\theta}{g}, \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}. \tag{4}$$

Tenuto conto delle (3) e (4), la prima delle (2) fornisce:

$$h = (v_C + v_0\cos\theta)\frac{v_0\sin\theta}{g} = (v_C + v_0\cos\theta)\sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gh}{2}} - \frac{v_C}{v_0}. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) si ottiene

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}\right). \tag{6}$$

Si deduce che l'alzo dipende dalla velocità di trascinamento v_C. Nel caso del problema risulta:

$$\tan\theta = \infty, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte, la componente orizzontale della velocità è somma della velocità di trascinamento v_C e della velocità $v_0 \cos\theta$ relativa al carrello. Siccome, tenendo presente la (4), la (3) risulta

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

si ha:

$$v_0 \cos\theta = \frac{h}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Si deduce, per la (6), che quando la velocità relativa è uguale alla velocità del carrello l'alzo dev'essere $\pi/2$.

7. Un tiratore posizionato sul bordo di una pedana circolare di raggio $R = 1\,m$, ruotante con velocità angolare costante $\omega = 5\,rad/s$ attorno al suo asse, deve colpire un bersaglio fisso B, posto all'esterno della pedana alla distanza $2R$ dal centro. Assumendo che velocità iniziale del proiettile abbia modulo $v_0 = 10\,m/s$, determinare la direzione θ da imporre al tiro se questo viene effettuato quando il tiratore si trova nella posizione A allineata col centro O della pedana e col bersaglio B.

Nel riferimento ortogonale fisso, con origine in O, asse x allineato col centro della pedana e col berasaglio, la velocità del proiettile $\mathbf{v}$, nell'istante in cui viene effettuato il tiro, deve risultare parallela a detto asse. Essa è somma della velocità $\mathbf{v}_0$, relativa alla pedana e della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_t$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_0. \tag{1}$$

La velocità di trascinamento è la velocità di rotazione della pedana,

$$\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \omega R\mathbf{j}.$$

Quindi la (1) diventa:

$$\mathbf{v} = \omega R\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Si trae:

$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = \omega R + v_{0y}.$$

Poiché dev'essere $v_y = 0$, si deduce,

$$v_{0y} = -\omega R.$$

Ma,

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{v_{0y}}{v_0} = -\frac{\omega R}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \theta = -30^\circ.$$

8. Un punto materiale si muove su un asse x di moto armonico con pulsazione $\omega = 2\pi\,s^{-1}$. Sapendo che all'istante $t_1 = 1\,s$ il punto occupa la posizione $x_1 = 3\,cm$ ed all'istante $t_2 = (1 + 3/4)\,s$ la posizione $x_2 = -4\,cm$, calcolare posizione, velocità ed accelerazione per $t = 0$.

Il moto può essere espresso dall'equazione

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

dove φ è la fase che determina le condizioni iniziali del moto. Dalla (1) si ha

$$x = A(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi).$$

Sostituendo i valori delle posizione e del tempo assegnati, si ha

$$x_1 = A\sin\varphi = 3\,cm \qquad x_2 = -A\cos\varphi = -4\,cm,$$

da cui si ricava l'ampiezza di oscillazione. Infatti:

$$\sin\varphi = \frac{3}{A}, \qquad \cos\varphi = \frac{4}{A}.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{9}{A^2} + \frac{16}{A^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{25} = 5\,cm.$$

Quindi nelle due posizioni assegnate si ottengono le due relazioni,

$$3 = 5\sin\varphi, \qquad 4 = 5\cos\varphi, \qquad \sin\varphi = 0,6, \qquad \cos\varphi = 0,8; \tag{2}$$

oppure:

$$\tan\varphi = \frac{3}{4}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,87^\circ = 0,64\,rad.$$

Pertanto dalla (1) si ottiene:
posizione,

$$x = 5\sin\varphi = 3\,cm;$$

velocità,

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 8\pi\,cm/s;$$

accelerazione,

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -12\pi^2\,m/s^2.$$

9. Un punto materiale, inizialmente fermo, si muove su una traiettoria circolare di raggio $r = 30\,cm$. Sapendo che l'accelerazione angolare varia nel tempo secondo la relazione $\alpha(t) = kt$ con $k = 4\cdot 10^{-3}\,rad/s^2$, determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante in cui l'arco percorso dal punto è $s = 20\,cm$.

Il modulo dell'accelerazione è dato da

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{1}$$

dove i moduli delle accelerazioni tangenziale a_t e normale a_n sono:

$$a_t = r\alpha(t) = r\,k\,t, \qquad a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

La velocità del punto è data da

$$v = \int r\alpha(t)dt = r\,k\int t\,dt = \frac{1}{2}r\,k\,t^2 + C_1, \tag{3}$$

dove C_1 è una costante, pari a zero perché il punto è inizialmente in quiete. Quindi l'arco percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = \frac{1}{6}rkt^3 + C_2,$$

dove C_2 può essere posta uguale a zero. Dalla precedente va ricavato il tempo impiegato dal punto per percorrere l'arco assegnato:

$$t = \sqrt[3]{\frac{6s}{rk}} = 10\,s.$$

Sostituendo nella (3) si ottiene il valore della velocità:

$$v = 6 \cdot 10^{-2}\,m/s$$

e dalle (2) i valori delle accelerazioni tangenziale e normale,

$$a_t = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2, \qquad a_n = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

La (1) fornisce il modulo dell'accelerazione:

$$a = 1,7 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

10. Un'automobile si pone in moto su una pista circolare di raggio $R = 225\,m$. Dall'istante $t = 0$ all'istante $t_1 = 10\,s$ la sua velocità cresce linearmente col tempo e percorre un arco di traiettoria $s = 150\,m$. Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.

Detta a_t l'accelerazione tangenziale, si ha

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = \frac{1}{2}a_t t^2 \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{2\Delta s}{t_1^2} = 3\,m/s^2.$$

Inoltre,

$$v(t_1) = a_t\,t_1 = 30\,m/s;$$

quindi l'accelerazione normale risulta:

$$a_n = \frac{[v(t_1)]^2}{R} = 4\,m/s^2.$$

Si ottiene:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5\,m/s^2.$$

11. Un corpo puntiforme si muove con velocità relativa $v_r = 0,5\,m/s$ in direzione radiale, verso il centro di una piattaforma orizzontale che ruota con velocità angolare $\omega = 2\pi\,rad/s$. Determinare velocità ed accelerazione quando il corpo si trova alla distanza $r = 12\,m$ dal centro.

Dette $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_t$ le velocità assoluta e di trascinamento, si ha

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$\sqrt{(\omega r)^2 + v_r^2} = 75,4\,m/s.$$

Tenuto conto che $\mathbf{v}_t$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali, $\mathbf{v}_a$ forma un angolo con $\mathbf{v}_r$ dato da

$$\tan\alpha = \frac{v_t}{v_r} = \frac{\omega r}{v_r} = 150,8, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega r}{v_r} = 89,6°.$$

L'accelerazione assoluta è somma della accelerazione di trascinamento (centripeta) e della accelerazione di Coriolis,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c = -\omega^2\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (2\omega v_r)^2} = 473,8\,m/s^2.$$

Tenendo presente che l'accelerazione di Coriolis è ortogonale alla velocità relativa e alla accelerazione centripeta, la accelerazione assoluta forma con quest'ultima un angolo:

$$\tan\beta = \frac{a_c}{a_t} = \frac{2v_r}{\omega r} = 0,013, \quad \Rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}\frac{2v_r}{\omega r} = 0,76°.$$

Raccolta di Problemi sulla Dinamica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un autocarro di massa $m = 25\,t$ ha una forza di trazione costante $F = 1,5 \cdot 10^4\,N$. Supponendo che il veicolo parta da fermo su una strada piana e che il modulo della forza resistente si possa approssimare con la relazione $R = k + bv$, con $k = 8 \cdot 10^3\,N$ e $b = 70\,N/(km/h)$, determinare: la massima velocità raggiunta v_L (velocità limite), il tempo t_1 impiegato per raggiungere la velocità $v_1 = v_L/5$ e lo spazio percorso in tale tempo.

$$F - (k + bv) = m\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

La velocità limite si ha per $dv/dt = 0$, pertanto:

$$v_L = \frac{F-k}{b} = 100\,km/h = 27,78\,m/s.$$

La velocità dell'autocarro va ottenuta integrando la (1), che si può scrivere:

$$v_L - v = \frac{m}{b}\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{v_L - v} = \frac{b}{m}dt.$$

Si ha:

$$-\ln(v_L - v) = \frac{b}{m}t + C,$$

con $C = -\ln v_L$, essendo nulla la velocità iniziale. Dunque:

$$v = v_L\left(1 - e^{-bt/m}\right).$$

Per $v = v_L/5$, tenuto conto che

$$b = 70\,N/(km/h) = 70 \cdot 3,6\,N/(m/s) = 252\,N/(m/s),$$

risulta

$$t_1 = \frac{m}{b}\ln\frac{5}{4} = 22,14\,s.$$

Lo spazio percorso nell'intervallo di tempo t_1 è dato da

$$x = v_L\int_0^{t_1}\left(1 - e^{-bt/m}\right)dt = v_L\left[t_1 + \frac{m}{b}\left(e^{-bt_1/m} - 1\right)\right] = 63,85\,m.$$

2. Una particella di massa $m = 1\,kg$ ha energia potenziale espressa dalla relazione

$$U = A(1 - \cos kx)$$

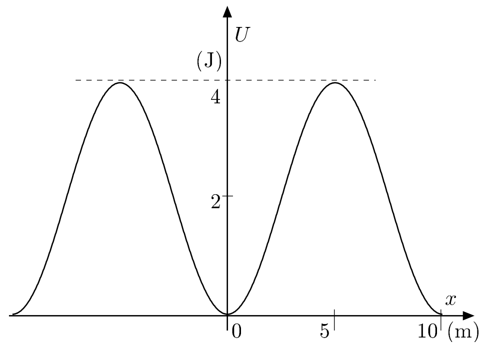
in cui $A = 2\,J$, $k = \pi/5\,rad/m$, e può muoversi, ovviamente, lungo l'asse x.

Inizialmente la particella si trova nella posizione $x_0 = 1\,m$. Determinare la massima distanza x_m che essa raggiunge se le velocità iniziali sono rispettivamente $v_0 = 2\,m/s$ e $v_0 = 4\,m/s$.

L'andamento dell'energia potenziale è periodico, come in figura, con massimi $U_{max} = 2A = 4\,J$, in corrispondenza a

$$kx = (2n+1)\pi, \qquad x = \frac{(2n+1)\pi}{k}.$$

La particella si trova nella buca di potenziale il cui valore massimo, $n = 0$, corrisponde a $x = 5\,m$ e pertanto nel primo caso, avendo energia cinetica $T = 2\,J$, non potrà oltrepassare tale massimo.



La particella è legata, dunque raggiunge la distanza massima con energia cinetica nulla; pertanto:

$$T_0 + U_0 = U;$$

da cui:

$$U = \frac{1}{2} m v_0^2 + A(1 - \cos k x_0) = 2,38\, J.$$

Quindi, alla distanza massima si ha

$$A(1 - \cos k x_m) = 2,38\, J.$$

Si ottiene:

$$x_m = \frac{1}{k} \cos^{-1}\left(1 - \frac{2,38}{A}\right) = 2,8\, m.$$

Nel caso in cui la velocità iniziale sia $v_0 = 4\, m/s$, l'energia totale della particella risulta

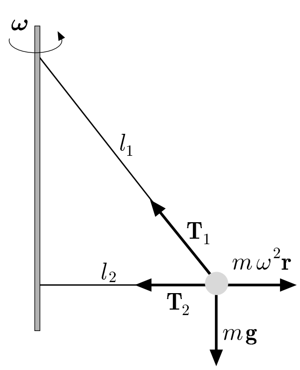
$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = 16,38\, J,$$

maggiore dell'energia potenziale massima, pertanto la particella si allontana indefinitamente lungo l'asse x.

3. Un corpo puntiforme di massa $m = 1\, kg$ è collegato mediante due fili ideali, di lunghezza rispettivamente $l_1 = 1\, m$ e $l_2 = 0,5\, m$ ad un'asta rigida verticale che ruota con velocità angolare ω. I fili sono fissati all'asta in modo che, nella rotazione, il filo più corto risulti ortogonale ad essa. Assegnata la tensione massima che possono sopportare i fili, $T_{max} = 60\, N$, determinare il valore massimo di ω.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio delle forze reali e della forza di trascinamento (centrifuga):

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2 \mathbf{r} = 0.$$



Proiettando sugli assi orizzontale e verticale, si ha:

$$-T_1 \cos 60° - T_2 + m\omega^2 l_2 = 0, \qquad T_1 \sin 60° - mg = 0.$$

Dalla prima,

$$\frac{1}{2} T_1 + T_2 = m\omega^2 l_2. \tag{1}$$

Dalla seconda,

$$T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = mg, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} mg = 11,33\, N,$$

indipendente dalla velocità angolare.

Ricavando ω dalla (1) e sostituendo a T_2 il valore della tensione massima assegnato, si ha:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_1}{2ml_2} + \frac{T_{max}}{ml_2}} = 11,46\, rad/s\,.$$

4. All'equatore un corpo cade liberamente dall'altezza $h = 100\,m$, con velocità iniziale nulla. Determinare, nel riferimento terrestre, le equazioni del moto e la deviazione x, rispetto alla verticale, del punto di impatto col suolo. Trascurare la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre.

Nel riferimento solidale con la terra, il corpo è soggetto alla gravità, alla forza centrifuga ed alla forza di Coriolis. Va applicata la legge della dinamica relativa che si scrive:

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{r}$ sono rispettivamente la velocità angolare della terra e la distanza del corpo dal suo centro.

Il problema è analiticamente piuttosto complesso. Tuttavia se si trascura ω^2 in quanto molto piccolo ($\omega = 7,27\cdot 10^{-5} rad/s$, quindi il suo quadrato è dell'ordine di 10^{-11}) si ottiene una soluzione soddisfacente; vedi T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 263. Il lettore può trovare la soluzione esatta in J. B. Marion; Classical Dynamics, Academic Press, N. Y. pagina 352. Nel caso del problema proposto, il corpo cade all'equatore dove $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali. Tenuto conto che la forza di Coriolis è rivolta verso est e fissato un riferimento con asse x orientato in questa direzione ed asse y verso l'alto, la (1) dà luogo alle due equazioni scalari:

$$\ddot{x} = |-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r| = 2\omega\, v_r; \qquad \ddot{y} = -g,$$

che integrate forniscono:

$$\dot{x} = \omega g t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega g t^3;$$

$$\dot{y} = -gt, \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Poiché la velocità angolare della terra è $\omega = 2\pi/T = 7,27\cdot 10^{-5}\, rad/s$ e il tempo d'impatto al suolo $t = \sqrt{2h/g}$, si ottiene:

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(2\frac{h}{g}\right)^{3/2} = 2,18\cdot 10^{-2}\, m.$$

5. Due masse $m_1 = 10\, kg$ e $m_2 = 5\, kg$ sono fissate agli estremi di un filo ideale e vengono trascinate, su un piano orizzontale, applicando a m_1 una forza costante $\mathbf{F}$, di modulo $F = 100\, N$. Quest'ultima forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito cinetico tra il piano e le due masse sono rispettivamente $\mu_1 = 0,3$ e $\mu_2 = 0,15$, calcolare la tensione del filo e l'accelerazione delle masse.

La forza applicata forma l'angolo θ con l'orizzontale, quindi la forza normale applicata a m_1 è inferiore al suo peso. Detta T la tensione del filo, le equazioni della dinamica relative alle due masse sono:

$$F\cos\theta - \mu_1(m_1 g - F\sin\theta) - T = m_1 a, \qquad T - \mu_2 m_2 g = m_2 a. \tag{1}$$

L'accelerazione è ovviamente la stessa in quanto il filo, durante il moto, risulta teso; inoltre il modulo della tensione nel filo ideale si trasmette inalterato in ogni suo punto.

Dalla (1) si trae:

$$a = 4,3\, m/s^2, \qquad T = 29\, N.$$

6. In un riferimento inerziale, un punto materiale di massa m si muove su una traiettoria circolare di raggio r. L'area spazzata dal vettore posizione, con origine nel centro della circonferenza, segue la legge

$$S = \frac{1}{2}c\,t^2,$$

dove c è una costante. Determinare il modulo della forza agente sul punto materiale.

Nel problema viene assegnata la legge con cui viene spazzata l'area dal vettore posizione. Ciò indica che la derivata di S rispetto al tempo fornisce il modulo della velocità areolare:

$$\frac{dS}{dt} = c\,t. \tag{1}$$

Ricordando che la velocità areolare è definita dalla relazione

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

nel caso di traiettoria circolare, si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}\omega r^2. \tag{2}$$

Uguagliando le (1) e (2):

$$c\,t = \frac{1}{2}\omega r^2, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2c}{r^2}\,t. \tag{3}$$

La velocità angolare cresce linearmente col tempo.

D'altra parte, per determinare il modulo della forza agente sul punto materiale occorre conoscere il modulo dell'accelerazione, dato da:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{4}$$

con

$$a_t = \dot{\omega}r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Sostituendo nella (4),

$$a = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4},$$

e, tenuto conto della (3),

$$a = \frac{2c}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4}t^4}.$$

Pertanto:

$$F = ma = \frac{2mc}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4}t^4}.$$

7. Un dischetto è posto alla distanza $r = 10\,cm$ dall'asse di una piattaforma ruotante con velocità angolare $\omega_0 = 2\,rad/s$, restando fermo rispetto ad essa. Imprimendo alla piattaforma una accelerazione angolare $\alpha = \dot{\omega} = 2\,rad/s^2$ si osserva che dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 1,5\,s$ il dischetto inizia a muoversi. Determinare il coefficiente di attrito statico.

Nel riferimento inerziale la forza agente sul dischetto è

$$\mu_s R_n = ma, \tag{1}$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed $R_n = mg$ la reazione normale. Ma:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{2}$$

con

$$a_t = \dot{\omega} r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Trascorso l'intervallo di tempo Δt, la velocità angolare assume il valore

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\Delta t = 5\, rad/s;$$

quindi dalle (1) e (2) si trae:

$$\mu_s = \frac{a}{g} = \frac{r}{g}\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0,26.$$

8. Un punto materiale di massa $m = 10\, gm$ si muove su una traiettoria circolare di raggio $R = 20\, cm$ con moto uniformemente ritardato. Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ la sua velocità ha modulo $v_0 = 15\, m/s$ e che all'istante $t_1 = 5\, s$ è nulla, determinare le leggi orarie della velocità, del moto e dell'accelerazione. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dalle forze agenti nell'intervallo di tempo considerato.

Il modulo dell'accelerazione tangenziale è costante,

$$a_t = \frac{0 - v_0}{t_1 - t_0} = -3\, m/s^2.$$

Si deduce:

$$v = v_0 + a_t\, t = 15 - 3\, t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t\, t^2 = 15\, t - \frac{3}{2} t^2. \tag{1}$$

Ricordando che il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

con

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

tenuto conto della prima delle (1), si trova:

$$a = \sqrt{9 + \left[\frac{(15 - 3t)^2}{0,2}\right]^2}. \tag{2}$$

Si noti che all'istante t_1, essendo $v = 0$, si annulla soltanto l'accelerazione normale. Infatti in tale istante il punto materiale, animato di velocità iniziale v_0 positiva, per esempio diretta nel verso antiorario, ma soggetto all'accelerazione tangenziale negativa di modulo costante, inverte il suo moto e procede con accelerazione il cui modulo è dato dalla (2). D'altra parte il grafico della seconda delle (1), che esprime la legge oraria con cui è percorsa la traiettoria, è una parabola ad asse verticale e concavità volta in basso. L'ascissa t_1 corrisponde proprio al suo vertice, punto di inversione del moto.

Il lavoro delle forze è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L} = \Delta T = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -1,12\, J.$$

9. Una particella di massa $10\, gm$ e velocità iniziale di modulo $v_0 = 6\, m/s$, all'istante $t = 0$ entra in un mezzo dove è soggetta ad una forza viscosa del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Calcolare l'energia E dissipata nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = m/b$.

L'andamento della velocità si ottiene integrando l'equazione

$$m\frac{dv}{dt} = -b\, v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt,$$

che fornisce
$$\ln v = -\frac{b}{m}\,t + C,$$
dove C è una costante che va determinata tenuto conto della condizione iniziale: $t = 0,\ v = v_0$. Pertanto,
$$\ln v = -\frac{b}{m}\,t + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-bt/m}.$$
L'energia dissipata è pari alla variazione di energia cinetica:
$$E = \Delta T = \frac{1}{2} m v_0^2 e^{-2bt/m} - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-2} - 1) = -0,15\,J.$$

10. Un oggetto animato di velocità iniziale v_0 viene lanciato in modo da strisciare su un piano orizzontale scabro, arrestandosi dopo aver percorso una distanza d. Se il piano viene accelerato verso l'alto si osserva che l'oggetto, lanciato con la stessa velocità iniziale, si arresta percorrendo una distanza $d/2$. Determinare l'accelerazione del piano.

Supponendo costante la forza di attrito, per il teorema dell'energia cinetica si ha:
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mu_c R_n d = \mu_c m g d, \tag{1}$$
dove R_n è la reazione normale e μ_c il coefficiente d'attrito cinetico o dinamico.

Nel caso in cui il piano venga accelerato verso l'alto le forze che agiscono sull'oggetto sono: la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ e la risultante delle forze reali che comprende la reazione vincolare $\mathbf{R}'_n$ e la forza peso. Poiché l'oggetto non assume un moto verticale perché striscia ancora sul piano si ha:
$$\mathbf{R}'_n + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t = 0.$$
Proiettando sulla verticale ascendente si ottiene:
$$R'_n - mg - ma_t = 0, \quad \Rightarrow \quad R'_n = m(g + a_t).$$
Dunque, ancora per il teorema dell'energia cinetica, si ha
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \mu_c R'_n \frac{d}{2} = \mu_c m (g + a_t) \frac{d}{2}. \tag{2}$$
dividendo membro a membro le (2) ed (1) si ottiene:
$$\frac{g + a_t}{g} = 2; \quad \Rightarrow \quad a_t = g.$$

11. Un treno viaggia alla velocità costante $v = 50\,km/h$. Supponendo che la forza di trazione del motore contrasti solo la forza di resistenza del mezzo, che si assume di tipo viscoso $F_v = -bv$ con $b = 100\,kg/s$, e che l'efficienza del motore sia $\epsilon = 0,6$ (rapporto tra l'energia erogata dal motore e l'energia elettrica assorbita), calcolare l'energia elettrica necessaria per percorrere $1\,km$.

Poiché il treno ha velocità costante, detta F la forza di trazione si deve avere,
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_v = 0, \qquad F - bv = 0, \qquad F = bv.$$
Detta E_{mot} l'energia erogata dal motore, E_{el} l'energia elettrica assorbita e Δl lo spazio percorso, si ha:
$$E_{el} = \frac{E_{mot}}{\epsilon} = \frac{F\Delta l}{\epsilon} = \frac{bv\Delta l}{\epsilon} = 2,3 \cdot 10^6\,J.$$

12. Un pendolo semplice di massa $m = 1\,kg$ e lunghezza l, inizialmente in quiete, è fissato al soffitto di un vagone che parte con accelerazione costante di modulo $a_t = 4,9\,m/s^2$. Calcolare la massima tensione del filo durante il moto del vagone.

Il pendolo, disposto inizialmente lungo la verticale, appena il vagone accelera comincia ad oscillare a causa della forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. La posizione attorno alla quale avvengono le oscillazioni, nel riferimento del vagone (accelerato), è determinata dalla relazione

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0,$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze reali: forza peso e tensione del filo. Detta $\mathbf{T}$ la tensione del filo, la precedente si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = 0. \tag{1}$$

Assunto positivo il verso degli archi crescenti e proiettando sulla tangente alla traiettoria si ottiene la relazione:

$$ma_t\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = g\,\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = g\tan\theta_0, \tag{2}$$

che determina l'angolo θ_0 attorno al quale avvengono le oscillazioni oppure, noto quest' ultimo, l'accelerazione di trascinamento.

Si intuisce subito, come avviene per un pendolo che oscilla in un riferimento inerziale, che in tale posizione la tensione del filo è massima. Infatti l'equazione della dinamica nel riferimento accelerato si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Assunto come positivo il verso centripeto e proiettando sulla normale, si ha:

$$T - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta = m\frac{v^2}{l}. \tag{3}$$

Detto φ l'angolo di oscillazione rispetto a θ_0, la (3) diventa

$$T - mg\cos(\theta_0 + \varphi) - ma_t\sin(\theta_0 + \varphi) = m\frac{v^2}{l},$$

ossia:

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + (ma_t\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0)\sin\varphi = m\frac{v^2}{l},$$

e ricordando la prima delle (2),

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi = m\frac{v^2}{l}.$$

Si trae,

$$T = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + m\frac{v^2}{l}.$$

La tensione massima si ha per $\varphi = 0$, cioè

$$T_{max} = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0) + m\frac{v_0^2}{l},$$

dove v_0 è la velocità (massima) con cui transita il pendolo in corrispondenza a θ_0.

Essendo

$$mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0 = m\sqrt{g^2 + a_t^2},$$

si può anche scrivere:

$$T_{max} = m\sqrt{g^2 + a_t^2} + \frac{mv_0^2}{l}. \tag{4}$$

La velocità v_0 va ricavata per mezzo del teorema dell'energia cinetica:

$$m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_0^2, \quad \Rightarrow \quad v_0^2=2\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0),$$

che sostituita nella (4) fornisce

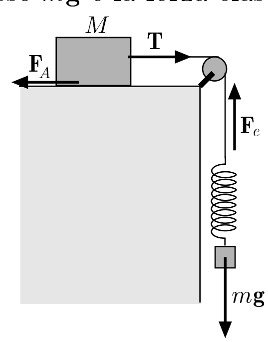
$$T_{max}=m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(3-2\cos\theta_0).$$

Ricavando il valore di θ_0 dalla (2), si ottiene:

$$T_{max}=13,27\,N.$$

13. Un blocco di massa $M=4\,kg$, appoggiato su un piano orizzontale è collegato, mediante un filo inestendibile e di massa trascurabile, ad una molla ideale di costante elastica $k=100\,N/m$, disposta verticalmente, al cui estremo inferiore viene agganciata una massa m, in modo tale da non imprimere oscillazioni al sistema; vedi figura. Sapendo che i coefficienti di attrito statico e dinamico tra blocco e piano sono rispettivamente $\mu_s=0,5$, $\mu_d=0,2$, determinare per quale valore di m il sistema si pone in moto e il corrispondente allungamento della molla.

Le forze che agiscono su M sono la reazione vincolare $\mathbf{R}=\mathbf{R}_n+\mathbf{R}_t$, la tensione del filo $\mathbf{T}$ ed il peso $M\mathbf{g}$. La reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ è ininfluente ai fini del moto in quanto opposta al peso, mentre la reazione tangenziale $\mathbf{R}_t$ è la forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Le forze che agiscono su m sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica.



Proiettando le forze su un asse orizzontale e su un asse verticale e tenuto conto che l'accelerazione di ogni parte del sistema è la stessa, le equazioni di Newton per le due masse sono:

$$T-F_A=Ma, \qquad F_e+mg=ma.$$

Poiché $F_e=-k\Delta x$ ed il filo ideale trasmette inalterato il modulo della forza elastica, risulta $T=k\Delta x$. Quindi le precedenti si scrivono:

$$k\Delta x-F_A=Ma, \qquad -k\Delta x+mg=ma. \tag{1}$$

Nelle condizioni di moto incipiente ($a=0$) si ha equilibrio dinamico delle forze; pertanto, indicando con Δx_1 l'allungamento della molla in queste condizioni, dalle (1) si ha

$$k\Delta x_1=F_A=\mu_s Mg, \qquad \Delta x_1=\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Dalla prima si ricava il valore minimo di m che pone in moto il sistema:

$$m=\mu_s M=2\,kg$$

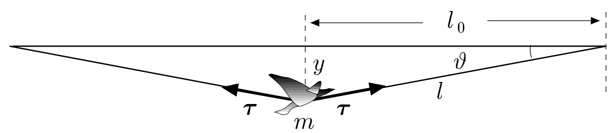
Quando il sistema è in moto, dalla prima delle (1) si ricava

$$a=\frac{k\Delta x-F_A}{M}.$$

Sostituendo nella seconda, tenuto conto della (2) e ricordando che $F_A = \mu_d M g$, si ottiene

$$\Delta x = \frac{mg}{k}\frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = \Delta x_1 \frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = 0,8\Delta x_1 = 0,16\, m$$

14. Un cavo elastico di lunghezza $2l_0 = 40\, m$ e massa trascurabile è teso orizzontalmente tra due punti fissi. Nel suo punto di mezzo si posa un piccione di massa $m = 1\, kg$, che imprime oscillazioni verticali di ampiezza molto piccola rispetto alla lunghezza del cavo. Determinare la tensione del cavo, sapendo che il periodo delle oscillazioni è $T = 1\, s$ e assumendo trascurabile lo smorzamento



Detti y lo spostamento verticale, τ la tensione del cavo, θ l'angolo che esso forma con l'orizzontale, l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau \sin\theta + mg. \tag{1}$$

Supponendo che y sia piccolo si può assumere $\sin\theta = y/l \approx y/l_0$, altrimenti le oscillazioni sarebbero anarmoniche (l è funzione di y). Pertanto la (1) si riscrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0} + mg. \tag{2}$$

Le oscillazioni avvengono intorno ad un punto di equilibrio y_0 $(d^2y/dt^2 = 0)$, dato da

$$mg = 2\tau\frac{y_0}{l_0}, \quad \Rightarrow \quad y_0 = mg\frac{l_0}{2\tau}.$$

Introducendo la nuova variabile

$$y' = y - mg\frac{l_0}{2\tau},$$

la (2) diventa:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{2\tau}{ml_0}y' = 0.$$

Pertanto,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ml_0}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi^2 m l_0}{T^2} = 394,8\, N.$$

Osservazione
Si è accennato più sopra che se $y \ll l_0$ le oscillazioni possono considerarsi armoniche. Il problema è analogo al caso considerato in T. Papa, Lezioni di Fisica; Meccanica, pag. 232. Infatti

$$l^2 = l_0^2 + y^2 = l_0^2\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right) = l_0\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{1/2};$$

quindi,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie si ha:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right),$$

e l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right).$$

Pertanto se $y \ll l_0$ è lecito trascurare i termini superiori al primo, ottenendo la (2).

15. Una molla ideale di costante elastica $k = 10\,N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\,m$, vincolata per un estremo ad una parete verticale, è disposta su un piano orizzontale di lunghezza $4l_0$. La molla viene compressa fino a dimezzare la sua lunghezza e alla sua estremità libera viene appoggiata una massa puntiforme $m = 0,1\,kg$ che, una volta sbloccata la molla, viene spinta sul piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra massa e piano è $\mu_d = 0,1$, calcolare velocità ed accelerazione della massa alla fine del piano.

Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica,

$$E_2 - E_1 = \mathcal{L}^{nc}, \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 + \mathcal{L}^{nc},$$

ossia, detta v la velocità alla fine del piano,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \mu_d\, m\, g\left(4l_0 - \frac{1}{2}l_0\right).$$

Si ricava:

$$v^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0^2}{4} - 7\mu_d\, g\, l_0, \quad \Rightarrow \quad v = 4,26\,m/s.$$

L'accelerazione, supponendo costante la forza d'attrito, è ovviamente costante e risulta

$$a = \mu_d\, g = 0.98\,m/s^2.$$

16. Una slitta di massa $m = 100\,kg$, trainata da una forza costante di modulo $F = 400\,N$ che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale, deve percorrere un tratto $l = 50\,m$ su un piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra slitta e piano è $\mu_d = 0,3$, determinare l'angolo θ affinché il tempo di percorrenza sia minimo, supponendo che la velocità iniziale sia nulla.

Il problema va risolto applicando l'equazione di Newton,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti: forza esterna, peso, reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ e reazione tangente $\mathbf{R}_t$, pari alla forza d'attrito. Proiettando sugli assi x-y, orizzontale e verticale e tenuto conto che il moto avviene solo secondo x, si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F\cos\theta - R_t = F\cos\theta - \mu_d(mg - F\sin\theta) \\ m\ddot{y} &= F\sin\theta - mg + R_n = 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene:

$$\ddot{x} = \frac{F(\cos\theta + \mu_d\sin\theta) - \mu_d mg}{m}.$$

Affinché il tempo di percorrenza sia minimo, l'accelerazione impressa alla slitta dev'essere massima. Pertanto, annullando la derivata prima dell'accelerazione rispetto a θ, si ha:

$$-F\sin\theta + F\mu_d\cos\theta = 0, \qquad F\sin\theta = F\mu_d\cos\theta.$$

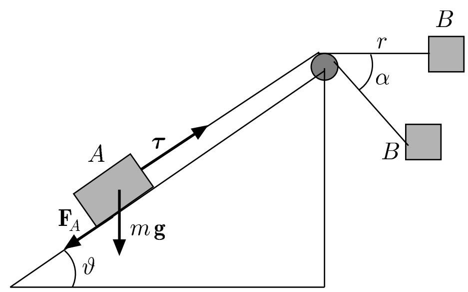
Si trae,

$$\tan\theta = \mu_d = 0,3, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta^* = 16,7^\circ.$$

Il tempo di percorrenza minimo è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2ml}{F(\cos\theta^* + \mu_d \sin\theta^*) - \mu_d \sin\theta^*}} = 4,9\,s$$

17. Una massa A, su un piano inclinato scabro che forma un angolo θ con l'orizzontale, è collegata mediante un filo ideale ad una massa uguale B, tenuta sospesa in posizione orizzontale rispetto al vertice più alto del piano ad una distanza r da esso. Si osserva che, rilasciata la massa B, A inizia a muoversi verso la sommità del piano quando il filo di collegamento forma un angolo α con l'orizzontale. Ricavare il coefficiente di attrito statico.



Lungo il filo ideale il modulo della tensione $\boldsymbol{\tau}$ si trasmette inalterato, quindi per la massa A, nelle condizioni di moto incipiente, si ha

$$\tau - (mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta) = 0,$$

da cui,

$$\tau = mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta. \tag{1}$$

Per la massa B, che percorre una traiettoria circolare, l'equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} + m\mathbf{g},$$

che proiettata nella direzione centripeta del filo fornisce

$$m\frac{v^2}{r} = \tau - mg\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad \tau = mg\sin\alpha + m\frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gr\sin\alpha,$$

e uguagliando le (1) e (2), si ottiene

$$3\sin\alpha - \sin\theta = \mu_s\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{3\sin\alpha - \sin\theta}{\cos\theta}.$$

18. Una guida verticale scabra ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $r = 10\,m$. Un blocchetto di massa $m = 5\,kg$ viene spinto dalla base della guida fino alla sommità, da una forza $\mathbf{F}$ tangente alla guida, di modulo tale da mantenere costante il modulo della velocità del blocchetto lungo tutta la traiettoria, uguale a $v_0 = 5\,m/s$. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra blocchetto e guida è $\mu_d = 0,3$, determinare il lavoro della forza.

Indicando con $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{L}_g$ rispettivamente i lavori della forza applicata, della forza d'attrito e della forza peso, per il teorema dell'energia cinetica, la somma di tali lavori è pari alla variazione di energia cinetica, nel caso del problema, nulla:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_g = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} + \mathcal{L}_A = -\mathcal{L}_g = mgr, \tag{1}$$

pari alla variazione di energia potenziale del blocchetto. La somma dei lavori al primo membro è dovuta a forze non conservative; infatti la forza applicata è una sorta di forza "intelligente"che mantiene costante la velocità, per esempio una forza muscolare; la forza d'attrito è notoriamente non conservativa. Quindi, essendo il lavoro delle forze non conservative pari alla variazione di energia totale,

$$\mathcal{L}^{nc} = (T_B + U_B) - (T_A + U_A),$$

nel caso del problema ($T_B = T_A$) si ha:

$$\mathcal{L}^{nc} = U_B - U_A = mgr.$$

Per calcolare esplicitamente il lavoro della forza d'attrito si osservi che sul blocchetto agiscono le forze: F, la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$, la reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ ed il peso. Si ha:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + m\mathbf{g}.$$

Proiettando lungo la tangente e lungo la normale alla guida, assunti positivi i versi centripeto e degli archi crescenti e tenuto conto che l'accelerazione tangenziale è nulla (velocità v_0 costante), si ha

$$\begin{aligned} &F - F_A - mg\sin\theta = 0 \\ &m\frac{v_0^2}{r} = R_n - mg\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

dove θ è l'angolo che forma la verticale col raggio. Dalla seconda delle (2) si ricava

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{r}.$$

Pertanto, tenuto conto che l'elemento d'arco $ds = rd\theta$, il lavoro elementare della forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$ è dato da:

$$d\mathcal{L}_A = -\mu_d(mgr\cos\theta d\theta + mv_0^2 d\theta).$$

Integrando:

$$\mathcal{L}_A = -\mu_d\left(mgr\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + mv_0^2\int_0^{\pi/2}d\theta\right) = -\mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right).$$

Sostituendo nella (1),

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_g = \mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right) + mgr = 696\,J$$

Va osservato che tale lavoro può essere ricavato dalla prima delle (2). Più sopra si è detto che la forza applicata al blocchetto dev'essere una forza "intelligente"in quanto va mantenuta costante la velocità. Se, per esempio, agisse una forza di modulo costante, tangente alla traiettoria, la reazione normale dipenderebbe oltre che dall'angolo θ, dalla velocità. In tal caso il calcolo del lavoro diverrebbe piuttosto complesso.

Limitandosi al caso di un corpo puntiforme vincolato ad una guida circolare scabra orizzontale, sul quale agisce una forza F di modulo costante tangente alla guida, l' equazione di Newton è

$$ma = F + F_A + R_n.$$

Come prima, proiettando sulla tangente e sulla normale, si ha

$$ma_t = F - F_A = F - \mu_d R_n, \qquad R_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Pertanto:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F - \mu_d m\frac{v^2}{r}, \tag{3}$$

dove s è l'arco di traiettoria. Si osserva anzitutto che, ponendo $a_t = d^2s/dt^2 = 0$, la velocità del corpo tende al valore limite

$$v_L = \sqrt{\frac{Fr}{\mu_d m}}.$$

Dunque il lavoro delle forze è pari alla variazione di energia cinetica:

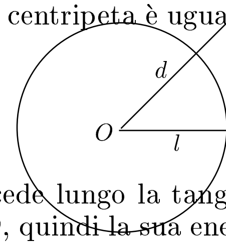
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

dove v_0 è la velocità iniziale che, in particolare, può essere nulla. L'espressione della velocità va ricavata integrando la (3) col metodo descritto in T. Papa; Lezioni di Fisica, pagina 247. Essa è data da

$$v = v_L \tanh\frac{Ft}{mv_L}.$$

19. Un corpo puntiforme, vincolato ad un filo di lunghezza l e carico di rottura T_m, ruota attorno ad un punto fisso O, su un piano orizzontale scabro. Ad un certo istante il filo si spezza ed il corpo si arresta ad una distanza d dal centro di rotazione O. Determinare la massa del corpo ($\mu_d = 0,15$, $l = 3\,cm$, $d = 5\,cm$, $T_m = 4,9\,N$).

All'istante della rottura del filo la forza centripeta è uguale al carico di rottura del filo,



$$m\frac{v^2}{l} = T_m. \tag{1}$$

D'altra parte il corpo da quell'istante procede lungo la tangente alla traiettoria, arrestandosi alla distanza D, quindi la sua energia cinetica iniziale è uguale all'energia dissipata per attrito:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu_d mgD, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\mu_d gD, \tag{2}$$

dove

$$D = \sqrt{d^2 - l^2}.$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ricava

$$m = \frac{lT_m}{v^2} = \frac{lT_m}{2\mu_d gD} = 1,25\,kg.$$

20. Un corpo di massa $m = 80\,kg$ è agganciato ad un estremo di una corda elastica di lunghezza l_0. ancorata per l'altro estremo ad un punto O fisso. Il corpo cade da un'altezza l_0 al di sopra di O e precipita trattenuto dalla corda. Supponendo che la corda sia di massa trascurabile ed abbia costante elastica $k = \alpha/l_0$, con $\alpha = 4\cdot 10^4\,N$, determinare la massima tensione.

Dopo che il corpo nella caduta ha percorso la quota $2l_0$ la corda inizia ad allungarsi di Δl. Si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mgh, \tag{1}$$

dove

$$h = 2l_0 + \Delta l.$$

In corrispondenza all'allungamento massimo $(\Delta l)_{max}$, la velocità del corpo è nulla $v = 0$, quindi la (1) diventa

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2_{max} = mg[2l_0 + (\Delta l)_{max}] = 2mgl_0 + mg(\Delta l)_{max},$$

ossia

$$k(\Delta l)^2_{max} - 2mg(\Delta l)_{max} - 4mgl_0 = 0,$$

che fornisce:

$$(\Delta l)_{max} = m\frac{g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 4mg\frac{l_0}{k}}.$$

Scartando il segno negativo e detta τ la tensione, si ottiene

$$\tau_{max} = k(\Delta l)_{max} = mg + \sqrt{(mg)^2 + 4mg\alpha} = 1,2 \cdot 10^4\, N.$$

21. Una piastra oscilla in un piano orizzontale, con moto armonico di ampiezza $A = 2,5\, cm$ e frequenza ν variabile. Sulla piastra viene appoggiato un dischetto e si osserva che che questo inizia a muoversi quando, aumentando la frequenza (molto lentamente) questa raggiunge il valore $\nu = 2\, Hz$. Determinare il coefficiente di attrito statico tra dischetto e piastra.

Nelle condizioni di moto incipiente dev'essere

$$ma = \mu_s mg.$$

Siccome l'accelerazione nel moto armonico è

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

si ha

$$a_{max} = |A\omega^2|, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{A\omega^2}{g} = 0,4.$$

22. Una pallina cade da un'altezza $h = 1\, m$ su un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ con velocità iniziale nulla. Nell'ipotesi di urto elastico, determinare la distanza in cui avviene il secondo rimbalzo sul piano inclinato.

Fissato un riferimento cartesiano con origine nel punto di impatto della pallina, asse x orientato lungo il piano inclinato nel verso discendente ed asse y ortogonale, le componenti dell'accelerazione lungo tali assi sono

$$\ddot{x} = g \sin \theta \qquad \ddot{y} = -g \cos \theta. \tag{1}$$

Il modulo della velocità con cui incide e viene riflessa la pallina è dato da

$$v_0 = \sqrt{2gh},$$

e poiché gli angoli di incidenza riflessione sono uguali all'angolo θ del piano inclinato ed interessa la traiettoria dopo l'impatto, le (1) vanno integrate con le seguenti condizioni iniziali:

$$\dot{x}_0 = v_0 \sin \theta = \sqrt{2gh}\, \sin \theta, \qquad \dot{y}_0 = v_0 \cos \theta = \sqrt{2gh}\, \cos \theta.$$

Si ottiene:
velocità,

$$\dot{x} = (g \sin \theta)t + \sqrt{2gh}\, \sin \theta, \qquad \dot{y} = -(g \cos \theta)t + \sqrt{2gh}\, \cos \theta;$$

equazioni del moto,

$$x = \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\, \sin \theta)t, \qquad y = -\frac{1}{2}(g \cos \theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\, \cos \theta)t. \tag{2}$$

L'istante in cui si ha il secondo contatto della pallina col piano si ha per $y = 0$; risulta:

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Sostituendo la precedente nella prima delle (2) si ricava l'ascissa cercata:

$$x_1 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)\frac{8h}{g} + \sqrt{2gh}\,\sin\theta\sqrt{\frac{8h}{g}} = 8h\sin\theta = 2,74\,m.$$

23. Un corpo puntiforme di massa $m = 50\,kg$ può scorrere lungo una guida orizzontale scabra, soggetto ad una forza $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, dove x è l'ascissa rispetto al centro O della forza e $k = 50\,N/m$. Il corpo, inizialmente in quiete ad una distanza $d = 50\,cm$ da O, viene lasciato libero di muoversi, quindi transita per O e si ferma in un punto B. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico è $\mu_d = 0,01$, determinare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico affinché il corpo resti fermo in B.

Il corpo è soggetto alla forza di tipo elastico, alla forza d'attrito, opposta alla velocità, al peso ed alla reazione vincolare. L'equazione della dinamica si scrive:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

La reazione vincolare è opposta al peso; la forza d'attrito, nella fase del moto prevista dal problema è positiva, contraria alla direzione del moto e, per velocità modeste, costante. Pertanto sull'asse del moto si ha

$$m\ddot{x} = -kx + \mu_d mg. \tag{1}$$

Questa equazione è tipica del sistema massa-molla al quale viene applicata anche una forza costante. Il nuovo centro di oscillazione x_0 va determinato ponendo $\ddot{x} = 0$ (accelerazione nulla). Si ha

$$x_0 = \mu_d\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Introducendo la nuova variabile $x' = x - x_0$, la (1) diventa

$$\ddot{x}' = -\frac{k}{m}x',$$

che, come noto, ha soluzione

$$x' = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Vanno ora determinate ampiezza e fase. Derivando:

$$\dot{x}' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

ed imponendo le condizioni iniziali ($t = 0$):

$$x'(0) = A\cos\varphi = d - x_0, \qquad \dot{x}'(0) = -A\omega\sin\varphi = 0.$$

Si ottiene

$$A = d - x_0, \qquad \varphi = 0.$$

Pertanto, passando alla vecchia variabile, le equazione del moto e della velocità sono:

$$x = x_0 + (d - x_0)\cos\omega t, \qquad \dot{x} = -(d - x_0)\omega\sin\omega t. \tag{3}$$

La soluzione trovata è valida finché il corpo raggiunge B; non è valida dopo, sia che il corpo resti fermo a causa dell'attrito statico, sia che si muova nel verso positivo fissato sulla guida. Il corpo raggiunge il punto B con velocità nulla (punto d'inversione del moto); dalla seconda della (3) si ha

$$-(d-x_0)\omega\sin\omega t=0, \quad\Rightarrow\quad \omega t=0.$$

Ricordando la (2), la prima delle (3) fornisce l'ascissa del punto B,

$$x_B=x_0-(d-x_0)=2\mu_d\frac{mg}{k}-d=-0,3\,m.$$

Affinché il corpo resti fermo in B è necessario che la forza di attrito statico sia maggiore o uguale alla forza elastica:

$$\mu_s mg\geq k|x_B|, \quad\Rightarrow\quad \mu_s\geq\frac{k|x_B|}{mg}=0,03.$$

24. L'energia potenziale di un punto materiale è data dall'espressione

$$U=10z-\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Determinare le superfici equipotenziali, il modulo della forza agente sul punto nella posizione $P\equiv(5;10;10)$ ed il luogo dei punti in cui la forza ha modulo costante.

Le superfici equipotenziali sono

$$10z-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=C,$$

dove C è una costante. Le superfici equipotenziali sono paraboloidi di rotazione attorno all'asse z del riferimento.

Le componenti della forza sono date da

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=x; \qquad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=y; \qquad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=-10.$$

Il modulo della forza nel punto assegnato risulta:

$$\sqrt{x^2+y^2+100}=15\,N.$$

Si rammenti che la forza è ortogonale alle superfici equipotenziali. I luoghi dei punti in cui la forza ha modulo costante soddisfano l'equazione:

$$x^2+y^2+100=cost,$$

cilindri intersezioni con le superfici equipotenziali. Si noti la analogia col problema riguardante un fluido contenuto in un vaso cilindrico, ruotante attorno al suo asse.

25. Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida circolare orizzontale di raggio $r=80\,cm$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico e la velocità iniziale sono rispettivamente $\mu_d=0,1$, $v_0=1\,m/s$, determinare dopo quanti giri la velocità si dimezza ed il corrispondente modulo dell'accelerazione.

Sul punto agisce la reazione normale al vincolo $R_n=mv^2/r$ e la forza d'attrito $F_A=\mu_d R_n$. Pertanto l'unica equazione atta ad individuare il moto è

$$m\frac{dv}{dt}=-\mu_d m\frac{v^2}{r}. \qquad (1)$$

Per integrare la (1), detto θ l'angolo di rotazione, si ponga

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r}.$$

Sostituendo al primo membro della (1) si ottiene:

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu_d\, v.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\mu_d d\theta.$$

Integrando:

$$\ln v = -\mu_d\theta + C,$$

dove C è una costante che, in base alle condizioni iniziali $\theta = 0$, $v = v_0$, risulta $\ln v_0$. Pertanto la precedente diventa

$$\ln v = -\mu_d\theta + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\mu_d\theta}. \tag{2}$$

Ponendo $v = v_0/2$ nella (2), l'angolo θ^* per il quale la velocità si dimezza risulta

$$\ln 2 = \mu_d\theta^*, \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \frac{\ln 2}{\mu_d}.$$

Il numero di giri è

$$2\pi n = \frac{\ln 2}{\mu_d}, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{2\pi\mu_d} = 1,1\, giri.$$

Il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\mu_d^2 + 1},$$

che per $v = v_0/2$ risulta:

$$a = \frac{v_0^2}{4r}\sqrt{\mu_d^2 + 1} = 0,31\, m/s^2.$$

26. Un corpo puntiforme è appoggiato sulla falda interna di un cono circolare che ruota attorno al suo asse, disposto verticalmente, con velocità angolare ω costante. Detta r la distanza del corpo dall'asse e θ la semiapertura del cono, si determini il valore del coefficiente di attrito statico necessario perché il corpo sia in equilibrio.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio relativo delle forze reali e di trascinamento:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \tag{1}$$

Le forze reali comprendono la forza peso, la reazione normale $\mathbf{R}_n$, ortogonale alla falda del cono, e la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$. Pertanto la (1) si scrive,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{2}$$

Proiettando la (2) su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla normale, assumendo positivo il verso di $\mathbf{R}_n$, si ha

$$\begin{aligned} &-mg\cos\theta + F_A + m\omega^2 r\sin\theta = 0 \\ &-mg\sin\theta + R_n - m\omega^2 r\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

Si ricava:

$$
\begin{aligned}
F_A &= mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta \\
R_n &= mg\sin\theta + m\omega^2 r\cos\theta.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Poiché per l'equilibrio,

$$F_A \le \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{F_A}{R_n},$$

per le (2) si ottiene:

$$\mu_s \ge \frac{g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta}{g\sin\theta + \omega^2 r\cos\theta}. \tag{3}$$

Naturalmente questa relazione pone restrizioni sulla velocità angolare e sull'angolo di semiapertura del cono, in quanto il numeratore dev'essere positivo:

$$g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta > 0.$$

Se fosse $\mu_s = 0$,

$$g\cos\theta = \omega^2 r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{r\tan\theta}.$$

Per l'equilibrio, assegnato l'angolo θ, si avrebbe un preciso valore di ω.

Lo stesso risultato si ottiene nel riferimento fisso. In tal caso si ha

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A,$$

dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione centripeta. Proiettando secondo una generatrice del cono e la sua normale, con la stessa convenzione per i segni, si ha

$$
\begin{aligned}
-m\omega^2 r\sin\theta &= F_A - mg\cos\theta \\
m\omega^2 r\cos\theta &= -mg\sin\theta + R_n.
\end{aligned}
$$

Procedendo come prima, si ottiene la (3).

27. Un blocchetto di massa $1\,kg$ è appoggiato su un piano inclinato scabro, che forma un angolo $\theta = 60°$ con l'orizzontale. Il blocchetto è agganciato ad una molla di costante elastica $k = 20\,N/m$, fissata con un supporto alla sommità del piano. Sapendo che $\mu_d = 0,366$, calcolare il massimo allungamento della molla una volta lasciato libero il blocchetto con la molla non deformata.

Questo problema può essere risolto col teorema dell'energia cinetica. Negli stati iniziale e finale l'energia cinetica è nulla, pertanto la somma dei lavori delle forze agenti è pari a zero. Detto $(\Delta l)_m$ l'allungamento massimo della molla e assunto positivo il verso discendente del piano, si ha

$$-\frac{1}{2}k(\Delta l)_m^2 + mg\sin\theta(\Delta l)_m - \mu_d mg\cos\theta(\Delta l)_m = 0.$$

Si ricava:

$$(\Delta l)_m = \frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0,67\,m.$$

28. Un corpo di massa m è agganciato all'estremità di una molla ideale di costante elastica k, fissata al soffitto di un ascensore. Quando l'ascensore è fermo, il corpo è in equilibrio con la molla allungata di x_0 rispetto alla sua lunghezza a riposo. Ad un certo istante l'ascensore si pone in moto con accelerazione a costante. Determinare modulo e verso di a, sapendo che un osservatore solidale con l'ascensore misura un allungamento massimo della molla $x_m = 2x_0$.

Fissato un asse di riferimento con origine nel punto in cui la molla è a riposo, se l'ascensore è fermo l'allungamento della molla x_0 è dato ponendo $\ddot{x} = 0$ nell'equazione

$$m\ddot{x} = -kx + mg, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Il corpo si trova in equilibrio ($v = 0$) in tale posizione. Quando l'ascensore accelera l'equazione della dinamica, nel riferimento dell'ascensore, si scrive:

$$m\ddot{x} = F + F_t,$$

dove F è la somma delle forze reali ed $F_t = \pm a_t$ la forza di trascinamento. Pertanto:

$$m\ddot{x} = -kx + m(g \pm a_t).$$

Le oscillazioni del corpo avvengono ($\ddot{x} = 0$) attorno al nuovo centro di oscillazione

$$x_1 = \frac{m(g \pm a_t)}{k}.$$

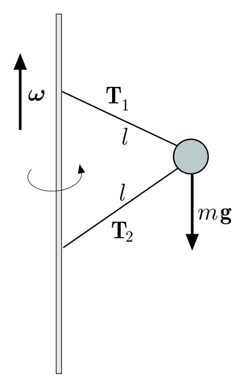
Ma l'osservatore registra un'ampiezza massima di oscillazione $2x_0$, quindi il corpo oscilla tra i punti di coordinate x_0 e $2x_0$ (in x_0 il corpo è inizialmente fermo). È chiaro inoltre che essendo $2x_0$ l'ampiezza massima, l'accelerazione di trascinamento è rivolta in alto. Quindi l'ampiezza dell'oscillazione risulta:

$$A = \frac{2x_0 - x_0}{2} = \frac{x_0}{2}.$$

Pertanto:

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0}{2} = \frac{m(g + a_t)}{k}, \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{g}{2}.$$

29. Una sfera di massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un'asta rigida verticale mediante due fili ideali, aventi la stessa lunghezza $l = 2\,m$. I fili sono fissati all'asta in due punti distanti l, in modo da formare un triangolo equilatero, vedi figura. Posta in rotazione l'asta con velocità angolare costante, determinare il minimo valore di ω per cui entrambi il fili risultano tesi e il valore delle tensioni che si sono destate.



Nel riferimento ruotante, si ha equilibrio delle forze reali e dalla forza di trascinamento,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0.$$

La somma delle forze reali $\mathbf{F}$ comprende: le tensioni dei fili e la forza peso; $\mathbf{F}_t$ è la forza centrifuga, pertanto:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{1}$$

Giacché i fili formano col segmento d'asta un triangolo equilatero, proiettando la (1) sugli assi x, orizzontale ed y verticale, si ha

$$-T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ + m\omega^2 r = 0$$
$$T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 60^\circ - mg = 0.$$

Essendo:

$$r = l \cos 30^\circ = l\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dalla prima si trae,

$$m\omega^2 l = T_1 + T_2. \tag{2}$$

Dalla seconda:

$$T_1 - T_2 = 2mg. \tag{3}$$

Tenuto conto della (3), dalla (2) si deduce:

$$\omega^2 = \frac{2mg + 2T_2}{ml}.$$

Ma $T_2 \geq 0$, quindi il minimo valore di ω si ha per $T_2 = 0$;

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}, \quad \Rightarrow \quad \omega = 3,1\, rad/s.$$

In tali condizioni la tensione T_1 risulta:

$$T_1 = 2mg = 19,6\, N.$$

30. Due masse $m_1 = 1,67\, kg$ e $m_2 = 3,33\, kg$, fissate agli estremi di un filo ideale, scivolano lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito dinamico tra masse e piano sono rispettivamente $\mu_1 = 0,225$ e $\mu_2 = 0,113$, calcolare l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.

Va osservato che, dai dati del problema, le forze d'attrito $\mu_1 m_1 g \cos\theta$ e $\mu_2 m_2 g \cos\theta$ sono uguali, pertanto durante il moto, il filo rimane teso e le masse si muovono con la stessa accelerazione. Inoltre il modulo della tensione T si trasmette inalterato lungo il filo.

Indicando con m_1 la massa più in alto e con m_2 quella in basso, l'equazione di Newton per dette masse si scrive:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\theta + T - \mu_1 m_1 g \cos\theta &= m_1 a \\ m_2 g \sin\theta - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta &= m_2 a. \end{aligned} \tag{2}$$

Risolvendo rispetto a T, si ha

$$m_1 a - m_1 g \sin\theta + \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - m_2 a,$$

da cui:

$$a = g \sin\theta - 2\frac{\mu_1 m_1 \cos\theta}{m_1 + m_2} g = 0,37\, g.$$

La tensione va ricavata da una delle (2); per esempio:

$$T = m_1 g(0,37 + \mu_1 \cos\theta - \sin\theta) = 1,06\, N.$$

31. Un corpo puntiforme di massa m è saldato ad una estremità di un'asta rigida di massa trascurabile, che ruota in un piano verticale attorno all'altro estremo con velocità angolare costante. Nel punto più basso della traiettoria l'asta esercita sul corpo una reazione $R_B = 12\, N$ mentre, se la velocità angolare raddoppia, la reazione diventa $R'_B = 21\, N$. Determinare le reazioni R_A ed R'_A nel punto più alto della traiettoria.

L'equazione della dinamica si scrive,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} + m\mathbf{g}.$$

Assumendo positivo il verso centripeto e detto r il raggio della traiettoria, nel punto più basso si ha:

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_B - mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_B - mg \end{aligned} \tag{1}$$

Alla sommità,

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_A + mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_A + mg. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (1) si ricavano le espressioni di mg e di $m\omega^2 r$; si ha:

$$mg = \frac{4R_B - R'_B}{3}, \qquad m\omega^2 r = \frac{R'_B - R_B}{3}.$$

Sostituendo nelle (2) si ottiene:

$$R_A = \frac{2R'_B - 5R_B}{3} = -6\,N, \qquad R'_A = \frac{5R'_B - 8R_B}{3} = 3\,N.$$

32. Un corpo puntiforme si muove lungo un asse orizzontale, con velocità costante $v_1 = 2\,m/s$. In seguito ad un impulso $J = 10\,N \cdot s$ esso assume la velocità $v_2 = 10\,m/s$, nella stessa direzione della velocità iniziale. Calcolare il lavoro della forza impulsiva.

Dal teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Poiché,

$$J = m(v_2 - v_1) = \Delta p,$$

si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \frac{1}{2}J\,(v_1 + v_2) = 60\,J.$$

Esercizi sulla Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali
A cura del Prof. T.Papa

1. Due masse m_1 e m_2, appoggiate su un piano orizzontale privo d'attrito, sono unite da una molla ideale di costante elastica k. Calcolare il periodo di oscillazione del sistema quando le masse vengono spostate dalla posizione di equilibrio. ($m_1 = 600\,gm$, $m_2 = 400\,gm$, $k = 6\,N/m$)

Si tratta di un problema a due corpi soggetti ad una forza di interazione. Si ha:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21},$$

ossia,

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}.$$

Sottraendo ed essendo $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$:

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \frac{1}{\mu}\mathbf{F}_{12},$$

essendo μ la massa ridotta.

Nel caso del problema, detta x la distanza relativa delle masse, si ha

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = 1,26\,s.$$

Si colga l'analogia del problema con la vibrazione di una molecola biatomica.

2. Due corpi dello stesso materiale, di masse $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 10\,kg$, sono collegati con una molla ideale di costante elastica $k = 50\,N/m$, poggiati su un piano orizzontale scabro. Alla massa m_1 è applicata una forza orizzontale di modulo $F = 15\,N$ in modo che il sistema si muova con la stessa velocità, costante. Determinare l'allungamento della molla ed il valore del coefficiente di attrito cinetico.

Nel moto le forze interne non intervengono; inoltre il moto del sistema è uniforme quindi, detti A_1 e A_2 i moduli delle forze d'attrito relative alle due masse, si ha:

$$F - A_1 - A_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{F}{(m_1 + m_2)g} = 0,1.$$

L'allungamento della molla va ricavato considerando le forze, elastica e di attrito, che agiscono su una delle due masse, per esempio m_2. Detto Δl l'allungamento, si ha:

$$k\Delta l = A_2, \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{\mu_d m_2 g}{k} = 0,2\,m.$$

3. Un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ è lanciato orizzontalmente dal bordo di un carrello di massa $M = 6\,kg$, inizialmente fermo su un binario privo d'attrito. Il corpo attraversa l'intera lunghezza $l = 2\,m$ del carrello in un tempo $t = 0,4\,s$. Si trovi l'energia rilasciata nel lancio.

Il sistema corpo-carrello nella direzione orizzontale non è soggetto a forze esterne, dunque il suo centro di massa, inizialmente in quiete, resta tale dopo il lancio del corpo. Fissato un riferimento con origine nel centro di massa del sistema e dette v_1 e v_2 le velocità del corpo e del carrello rispetto a tale riferimento, per la legge di conservazione della quantità di moto, si ha:

$$mv_1 + Mv_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m}{M}v_1. \tag{1}$$

Ma la velocità del corpo è somma della velocità l/t, relativa al carrello, e della velocità di trascinamento v_2,

$$v_1 = \frac{l}{t} + v_2,$$

pertanto, dalla (1) si ha:

$$v_2 = -\frac{m}{M}\left(\frac{l}{t} + v_2\right) = -\frac{m}{m+M}\,\frac{l}{t}, \tag{2}$$

e di conseguenza,

$$v_1 = \frac{M}{m+M}\,\frac{l}{t}. \tag{3}$$

L'energia rilasciata nel lancio è somma delle energie cinetiche della massa e del carrello che rincula:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

e, tenuto conto delle (2) e (3),

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m+M}\right)^2\left(\frac{l}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\left(\frac{l}{t}\right)^2 = 10,7\,J.$$

Il problema può essere risolto considerando gli spostamenti del corpo e del carrello, prima e dopo il lancio; le rispettive velocità vanno ottenute dividendo per il tempo t. Nel riferimento adottato si ha:

$$x_C = 0 = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M} = \frac{mx_1' + Mx_2'}{m+M},$$

dove x_1, x_2 sono le ascisse iniziali del corpo e del centro di massa del carrello e x_1', x_2' quelle finali.

Dalle precedenti si ottiene:

$$M(x_2' - x_2) = -m(x_1' - x_1), \qquad M\Delta x_2 = -m\Delta x_1,$$

Lo spostamento assoluto del corpo, come per le velocità, è somma dello spostamento relativo l, lunghezza del carrello, e dello spostamento di trascinamento Δx_2 del carrello:

$$\Delta x_1 = l + \Delta x_2. \tag{4}$$

Pertanto:

$$M\Delta x_2 = -m(l + \Delta x_2), \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = -\frac{m}{m+M}l,$$

in verso opposto allo spostamento della massa che, per la (4) risulta:

$$\Delta x_1 = \frac{M}{m+M}l.$$

4. Due masse puntiformi $4m$ ed m sono rigidamente collegate ad una sbarretta di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito per un suo estremo A. Le masse si trovano rispettivamente a distanza $l = 0,1\,m$ e $2l$ da tale estremo. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

Si tratta del noto problema del pendolo composto, T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 347. In questo caso, posto $\sin\theta \approx \theta$ (piccole oscillazioni) e detta m_t la massa totale, l'equazione della dinamica si scrive:

$$I_A\ddot{\theta} + m_t g\, l_C \theta = 0,$$

dove l_C è la distanza del centro di massa da A. Essendo:

$$m_t = 5m, \qquad l_C = \frac{4ml + 2ml}{5m} = \frac{6}{5}l, \qquad I_A = 4ml^2 + m(2l)^2 = 8ml^2,$$

il periodo risulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m_t g l_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{3}\frac{l}{g}} = 0,73\,s.$$

5. Una particella di massa m_1, all'istante iniziale $t = 0$ ha velocità nulla $\mathbf{v}_0 = 0$ ed è individuata dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_0 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Applicando la forza, funzione del tempo,

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{i} + 3m\,t\mathbf{k},$$

all'istante $t = 2\,s$ urta un'altra particella di massa $m_2 = 3m$, animata di velocità

$$\mathbf{v}_2 = \frac{4}{3}\mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

Determinare le coordinate del punto in cui avviene l'urto e la velocità delle particelle dopo l'urto, supponendo che sia completamente anelastico.

Velocità e posizione della prima particella si ottengono integrando la relazione che assegna l'accelerazione:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{m}\int \mathbf{F}dt = 2t\mathbf{i} + \frac{3}{2}t^2\mathbf{k} + C_1, \tag{1}$$

dove $C_1 = 0$ in quanto inizialmente la particella è ferma. Integrando ancora:

$$\mathbf{r}_1 = \int \mathbf{v}dt = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k} + \mathbf{r}_0 = (t^2 - 3)\mathbf{i} + \mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 - 4\right)\mathbf{k},$$

che per $t = 2\,s$ fornisce:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Quindi le coordinate del punto in cui avviene l'urto sono:

$$x_1 = 1\,m \qquad y_1 = 1\,m, \qquad z_1 = 0.$$

Dopo l'urto, per la conservazione della quantità di moto, si ha:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v},$$

da cui si trae

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{v}_2.$$

Sostituendo la (1) e l'espressione di $\mathbf{v}_2$, si ottiene:

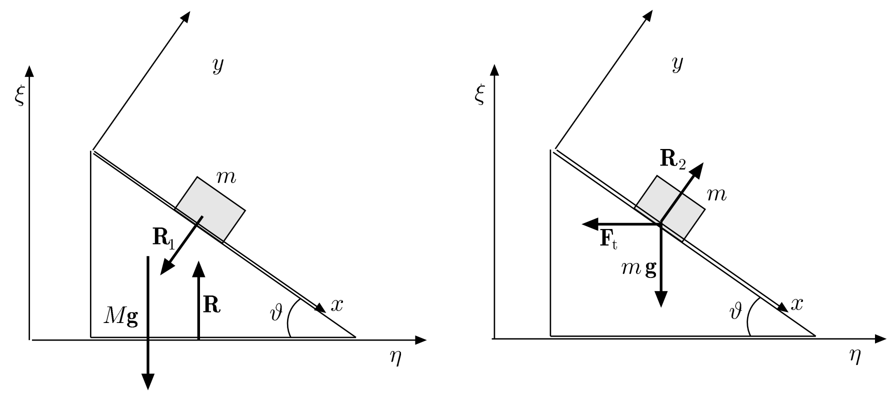
$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{2}\right)\mathbf{k},$$

che, per $t = 2\,s$ diventa

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i}.$$

Le particelle procedono lungo l'asse x con velocità pari a $2\,m/s$.

6. Un cubo di massa m è posto alla sommità dell'ipotenusa di un cuneo triangolare di massa M, poggiato su un piano orizzontale. Noto l'angolo θ che l'ipotenusa del cuneo forma col piano e supponendo che l'attrito su ogni superficie sia nullo determinare, una volta liberato il cubo, l'accelerazione con cui esso giunge sul piano. Inizialmente il blocco si trova fermo all'altezza h dal piano.



Per una soluzione semplice del problema, occorre stabilire riferimenti opportuni. Tali sono: un riferimento fisso $\Omega\,\eta,\,\xi$, solidale col piano ed un riferimento Oxy mobile, solidale col cuneo, con asse x volto nel verso discendente ed asse y ortogonale, uscente.

Le forze che agiscono sul cuneo sono: il peso, la reazione vincolare $\mathbf{R}$, esercitata dal piano e la reazione $\mathbf{R}_1$ esercitata dal cubo, quindi l'equazione di Newton si scrive:

$$M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 = M\mathbf{a}_t,$$

dove $\mathbf{a}_t$ è l'accelerazione, che è anche l'accelerazione di trascinamento del riferimento mobile. Proiettando sugli assi η-ξ, si ha

$$\begin{aligned} &-R_1 \sin\theta = M a_t \\ &-Mg + R - R_1 \cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Le forze che agiscono sul cubo sono: il peso, la reazione vincolare $\mathbf{R}_2$, esercitata dal cuneo, in modulo uguale ad $\mathbf{R}_1$ ma di direzione opposta, e la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t$; pertanto

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Proiettando sugli assi mobili x-y:

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - ma_t\cos\theta &= m\ddot{x} \\ R_1 - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla prima delle (1) si trae,

$$a_t = -\frac{R_1}{M}\sin\theta \tag{3}$$

e sostituendo nella seconda delle (2):

$$R_1 = mg\cos\theta - \frac{m}{M}R_1\sin^2\theta.$$

Si ottiene:

$$R_1 = \frac{mM\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g. \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) si ricava l'accelerazione del cuneo (di trascinamento):

$$a_t = -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \tag{5}$$

negativa, rispetto al riferimento fisso.

Sostituendo la (5) nella prima delle (2), si ottiene l'accelerazione (relativa) del cubo nel riferimento mobile, dove ha una unica componente:

$$\ddot{x} = \frac{(m+M)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} g. \tag{6}$$

Ma l'accelerazione nel riferimento fisso (assoluta) è

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r.$$

Indicando con $\hat{\mathbf{u}}$ il versore dell'asse x e con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi ξ-η, è

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j};$$

quindi:

$$\mathbf{a}_t = a_t\mathbf{i}; \qquad \mathbf{a}_r = a_r\hat{\mathbf{u}} = a_r(\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}).$$

Si ottiene:

$$\mathbf{a} = (a_t + a_r\cos\theta)\mathbf{i} - a_r\sin\theta\mathbf{j} = (a_t + \ddot{x}\cos\theta)\mathbf{i} - \ddot{x}\sin\theta\mathbf{j}.$$

Pertanto, ricordando le (5) e (6), le componenti dell'accelerazione nel riferimento fisso sono:

$$\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\xi} = -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g + \frac{(m+M)\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g = \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g \\ a_\eta &= -\ddot{x}\sin\theta = -\frac{(m+M)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta} g. \end{aligned}$$

Si può verificare immediatamente che si ha conservazione della quantità di moto orizzontale. Infatti, essendo costanti le accelerazioni, nell'istante $\sqrt{2h/g}$ in cui il cubo raggiunge il piano orizzontale, si ha

$$\frac{mM\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{mM\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.$$

Il metodo descritto per risolvere il problema, in cui si fa uso dell'equazione di Newton, può apparire piuttosto complesso in quanto vanno determinate correttamente le reazioni vincolari e, inevitabilmente vanno assuni due riferimenti in moto relativo. Un altro approccio, più semplice, consiste nell'usare le equazioni di Lagrange per una sollecitazione conservativa. Tuttavia occorre che il lettore possegga qualche nozione di Meccanica Analitica. Di seguito se ne d un cenno.

Si definisce lagrangiana L del sistema la funzione,

$$L = T - U,$$

dove T è l'energia cinetica ed U l'energia poteziale. Le equazioni di Lagrange nella seconda forma (vedi un testo di Meccanica Razionale) sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \tag{7}$$

dove q_k e $\dot{q}_k$ sono le coordinate libere e le loro derivate rispetto al tempo. Per quanto riguarda il concetto di coordinata libera si veda T. Papa, Lezioni di Fisica, pagina 38. Le coordinate libere del sistema cuneo-cubo sono: l'ascissa X del punto più alto del cuneo e l'ascissa x del cubo. Infatti, detta h l'altezza del cuneo, θ l'angolo che l'ipotenusa del cuneo forma col piano orizzontale, l'ordinata y del cubo può essere espressa dalla relazione

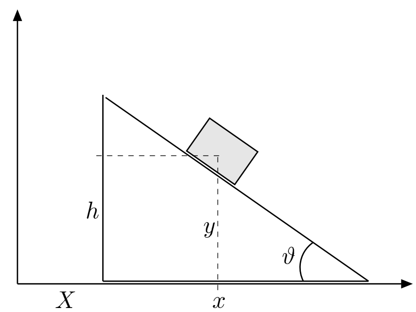
$$h - y = (x - X)\tan\theta, \quad \Rightarrow \quad y = h + (X - x)\tan\theta.$$

Indicando, per comodità, con $k = \tan\theta$, la lagrangiana del sistema si scrive:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + (\dot{X}^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{X}\dot{x})k^2\right] + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mg[h + (X - x)k]. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mk^2\dot{x} - mk^2\dot{X},$$



ed inoltre,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + mk^2\ddot{x} - mk^2\ddot{X}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mkg.$$

Pertanto, per la (7):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + mk^2\ddot{x} - mk^2\ddot{X} - mkg = 0. \tag{8}$$

Analogamente

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = mk^2\dot{X} - mk^2\dot{x} + M\dot{X},$$

e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = mk^2\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + M\ddot{X}, \qquad \frac{\partial L}{\partial X} = -mkg.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = mk^2\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + M\ddot{X} + mkg = 0. \tag{9}$$

Dalle (8) e (9) si traggono le equazioni dei moti:

$$\begin{aligned} (1 + k^2)\ddot{x} - k^2\ddot{X} - kg &= 0 \\ (mk^2 + M)\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + mkg &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Dalla prima delle(10) si ricava,

$$\ddot{x} = \frac{k^2\ddot{X} + kg}{1 + k^2}, \tag{11}$$

che sostituta nella seconda fornisce:

$$\ddot{X} = -\frac{mk}{(m + M)k^2 + M}\, g. \tag{12}$$

Sostituendo nella (11) si ricava,

$$\ddot{x} = \frac{Mk}{(M + m)k^2 + M}\, g. \tag{13}$$

Infine, ponendo nelle (12) e (13) $k = \sin\theta/\cos\theta$, si trova:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\, g \\ \ddot{X} &= -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\, g. \end{aligned}$$

Le relazioni precedenti rappresentano le componenti secondo l'asse orizzontale delle accelerazioni assolute, coincidenti rispettivamente con $\ddot{\xi}$ ed a_t. Come si vede, non è stato necessario assumere riferimenti mobili né determinare le reazioni, che peraltro possono anche essere trovate mediante le equazioni di Lagrange nella prima forma. È immediato verificare la conservazione della quantità di moto del sistema.

7. Due masse puntiformi $4m$ ed m, con $m = 0,1\,kg$, sono rigidamente collegate ad una sbarretta di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo O. Le masse si trovano rispettivamente a distanza l e $2l$ da tale estremo. Calcolare la reazione vincolare in O quando la sbarretta, inizialmente ferma nella posizione orizzontale, viene lasciata libera e raggiunge la posizione verticale.

Detta $M = 5m$ la massa totale ed l_C la distanza del centro di massa dall'asse, si ha

$$l_C = \frac{4ml + m2l}{5m} = \frac{6}{5}\,l.$$

La reazione vincolare nella posizione verticale, $\theta = 0$, va ricavata dalla prima equazione della dinamica dei sistemi rigidi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = M\mathbf{a}_C, \quad \Rightarrow \quad R = Mg + M\frac{v_C^2}{l_C}, \tag{1}$$

dove a_C e v_C sono accelerazione e velocità del centro di massa. Il rapporto v_C^2/l_C va trovato mediante la conservazione dell'energia:

$$Mgl_C = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{v_C^2}{l_C^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_C^2}{l_C} = \frac{2Mgl_C^2}{I}.$$

Tenuto conto che il momento d'inerzia del sistema è

$$I = 4ml^2 + m4l^2 = 8ml^2,$$

dalla seconda delle (1) si ottiene

$$R = 14mg = 13,72\,N.$$

Esercizi sulla Dinamica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Una palla da biliardo di raggio R è in quiete sul piano del tavolo da giuoco. Ad essa viene impresso un impulso centrale che la fa muovere con velocità iniziale v_0. Si calcoli la velocità angolare della palla nell'istante in cui il suo moto diventa di puro rotolamento. ($v_0 = 0,5\,m/s,\ R = 5\,cm,\ I = 2mR^2/5$).

Il piano del tavolo presenta attrito, quindi la velocità decresce secondo la legge:

$$v = v_0 - \mu g t. \tag{1}$$

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ha

$$M = \mu g R = I\frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu g R}{I} = \frac{5\mu g}{2R}.$$

Integrando:

$$\omega = \frac{5\mu g}{2R}t. \tag{2}$$

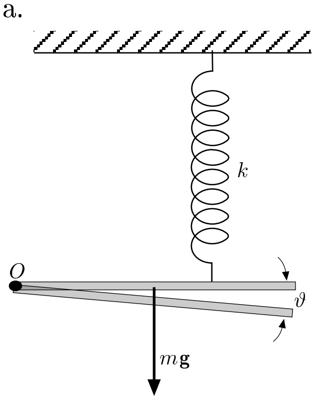
Nell'istante t^* in cui si ha puro rotolamento:

$$v(t^*) = R\omega(t^*).$$

Dunque, combinando le (1) e (2):

$$t^* = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}, \qquad \omega(t^*) = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = 7,14\,rad/s.$$

2. Una sbarretta omogenea di massa $m = 300\,gm$ e lunghezza l è incernierata, senza attrito, ad un estremo O ed è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla ideale, ad asse verticale, di costante elastica $k = 10^3\,N/m$, agganciata alla sbarretta nel punto distante $2l/3$ dall'estremo O. Si determini il periodo delle piccole oscillazioni verticali della sbarretta.



Supponendo che la molla all'equilibrio sia allungata di Δy, per l'uguaglianza dei momenti delle forze rispetto ad O, si ha

$$mg\frac{l}{2} = \frac{2}{3}lk\Delta y, \quad \Rightarrow \quad k\Delta y = \frac{3}{4}mg. \tag{1}$$

Impartendo un piccolo spostamento verticale y, il sistema inizia ad oscillare. Dalla seconda equazione cardinale dei sistemi rigidi si ha:

$$mg\frac{l}{2} - \frac{2}{3}l\,k(\Delta y + y) = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Tenuto conto della (1), si ha

$$-\frac{2}{3}l\,k\,y = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

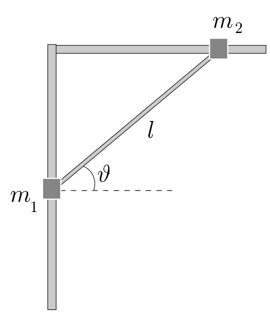
Ma detto θ l'angolo formato dalla sbarretta con l'orizzontale, per piccoli spostamenti verticali si può scrivere $y \approx 2l\theta/3$ ed $\omega = d\theta/dt$. Ricordando inoltre che il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'estremo è $I = ml^2/3$, la (2) diventa,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

Il periodo risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{m}{k}} \approx 0,09\,s.$$

3. Un sistema articolato è costituito da due masse m_1 ed m_2 uguali che possono scorrere senza attrito su due guide disposte ad angolo retto, una verticale e l'altra orizzontale. Le due masse sono incernierate ad un'asta di lunghezza l, anch'essa di massa uguale alle altre, in modo che possano scorrere liberamente sulle guide. Inizialmente il sistema è in quiete con l'asta inclinata di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Lasciato il sistema libero di muoversi, determinare la velocità delle due masse quando l'asta raggiunge la posizione verticale.



Le reazioni vincolari, ortogonali alle guide non compiono lavoro quindi va applicato il teorema di conservazione dell'energia. La massa m_2, scorrendo sulla guida orizzontale ha energia potenziale costante. Posta uguale a zero l'energia potenziale nella configurazione verticale e detto θ l'angolo che durante il moto l'asta forma con l'orizzontale, l'energia potenziale del sistema è somma dell'energia potenziale di m_1 e dell'asta. La prima è

$$U_1 = mgl(1 - \sin\theta),$$

la seconda,

$$U_a = mg\frac{l}{2}(1 - \sin\theta).$$

Sommando si ha:

$$U = U_1 + U_a = \frac{3}{2}mgl(1 - \sin\theta).$$

Durante il moto, l'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta, che ruota attorno al centro istantaneo di rotazione, e dell'energia cinetica delle masse m_1 ed m_2.

Il centro istantaneo di rotazione Q si trova all'intersezione delle normali alle guide condotte dagli estremi dell'asta, alla distanza $l/2$ dal suo baricentro. Dunque l'energia cinetica dell'asta risulta

$$T_a = \frac{1}{2}I_Q\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Le masse m_1 ed m_2 hanno rispettivamente velocità:

$$v_1 = \omega l\cos\theta, \qquad v_2 = \omega l\sin\theta; \tag{1}$$

quindi energie cinetiche:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \cos^2\theta; \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta.$$

Per la conservazione dell'energia si ha:

$$T_a + T_1 + T_2 + \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta) = \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta_0),$$

ossia:

$$\frac{1}{6}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta = \frac{3}{2}mgl(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

da cui si ricava:

$$\omega^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0). \tag{2}$$

Ma la velocità del baricentro dell'asta è

$$v_C = \omega l/2, \qquad \omega = \frac{2}{l}v_C, \tag{3}$$

quindi sostituendo nella (2):

$$v_C^2 = \frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

quando l'asta è verticale $\sin\theta = 1$, si ha

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(1-\sin\theta_0)}.$$

Infine, tenuto conto delle (1) e (3), le velocità delle masse risultano:

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 2v_C = \sqrt{\frac{9}{4}gl(1-\sin\theta_0)}.$$

Va osservato che il sistema oscilla: m_1 ed asta sulla guida verticale, m_2 su quella orizzzontale. Dalla (2), essendo $\omega = \dot\theta$, si ha

$$\dot\theta^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

Separando le variabili:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}}\; dt.$$

Questa equazione è simile a quella delle grandi oscillazioni del pendolo semplice; essa va integrata col metodo indicato in T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 241.

4. Un'asta omogenea di massa $m = 0,5\,kg$ e lunghezza $l = 1\,m$ reca agli estremi due masse puntiformi $m_1 = 0,2\,kg$ ed $m_2 = 0,3\,kg$. L'asta è posta in rotazione con velocità angolare ω_0 costante, attorno ad un asse ad essa ortogonale, passante per un punto a distanza x da m_1. L'unica sollecitazione alla quale è soggetta l'asta consiste in una coppia frenante di momento costante. Determinare il valore di x affinché si fermi nel minor tempo possibile.

Detto $-M$ il momento della coppia frenante, dalla seconda equazione della dinamica dei corpi rigidi si ha,

$$-M = I\frac{d\omega}{dt},$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x. Integrando:

$$\omega = \omega_0 - \frac{M}{I}t.$$

Il tempo di arresto t_A si ottiene per $\omega = 0$, quindi,

$$t_A = \frac{I\omega_0}{M}.$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x è dato da:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + m_1x^2 + m_2(l-x)^2.$$

Perché l'asta si fermi nel minor tempo possibile, tale momento d'inerzia dev'essere minimo:

$$\frac{dI}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l(2m_2 + m)}{2(m + m_1 + m_2)} = 0,55\,m.$$

Infatti,

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 2(m + m_1 + m_2) > 0.$$

5. Una sbarretta omogenea di lunghezza $l = 60\,cm$, soggetta alla gravità, può oscillare attorno ad un asse orizzontale passante per un punto P, posto tra il centro O della sbarretta ed il suo estremo superiore. Determinare la distanza $x = OP$ per la quale il periodo delle piccole oscillazioni è minimo.

Come noto, il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo composto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{mgx}},$$

dove

$$I_P = I_O + mx^2 = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2.$$

Pertanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}}. \tag{1}$$

Il valore minimo del periodo si ha annullando la derivata prima della (1) rispetto ad x;

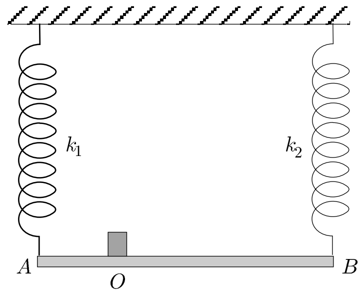
$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x_{min} = \sqrt{\frac{l^2}{12}} = 17,3\,cm,$$

cui corrisponde:

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1,18\,s.$$

6. Una sbarra omogenea AB di sezione costante, lunghezza $l = 34\,cm$ e massa $m = 250\,gm$ è sospesa ad un soffitto per mezzo di due molle ideali verticali, di uguale lunghezza a riposo e costanti elastiche $k_1 = 50\,N/m$ e $k_2 = 13\,N/m$, poste agli estremi A e B. Allo scopo di disporre la sbarra in equilibrio orizzontale, viene fissato ad essa un corpo puntiforme di massa $m_1 = 750\,gm$ in un punto O compreso tra gli estremi. Determinare:
a) la distanza di tale punto dall'estremo A;

b) la frequenza delle piccole oscillazioni quando il sistema viene spostato verticalmente dalla posizione di equilibrio.



A causa delle masse sospese, le molle vengono allungate di una quantità y_0 rispetto alla loro lunghezza a riposo; si ha:

$$(k_1+k_2)y_0=(m+m_1)g, \quad \Rightarrow \quad y_0=\frac{m+m_1}{k_1+k_2}g=0,15\,m. \tag{1}$$

Detta x la distanza OA, l'equilibrio dei momenti delle forze applicate rispetto ad A, fornisce:

$$m_1gx+mg\frac{l}{2}-k_2y_0l=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{m_1g}\left(k_2y_0l-mg\frac{l}{2}\right)=3,3\,cm.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni va ricavata considerando l'equazione della dinamica del sistema. Detto y lo spostamento rispetto ad y_0, si ha:

$$(m+m_1)\ddot{y}=(m+m_1)g-(k_1+k_2)(y_0+y),$$

e sostituendo a y_0 la (1),

$$(m+m_1)\ddot{y}+(k_1+k_2)y=0.$$

Si ricava.

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+m_1}}=1,26\,s^{-1}.$$

7. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, oscilla attorno ad un asse orizzontale fisso, passante per un suo estremo. Determinare l'espressione della reazione vincolare esercitata dall'asse.

Le forze applicate all'asta sono il peso e la reazione vincolare. Come sempre vanno considerate le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{g}+\mathbf{R}, \qquad \mathbf{M}=I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

dove $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare, $\mathbf{M}$ il momento risultante delle forze ed I il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla prima, assumendo positive la rotazione antioraria e la direzione centripeta, si ha:

$$ma_t=-mg\sin\theta+R_t, \qquad ma_n=-mg\cos\theta+R_n.$$

Dalla seconda:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta=I\frac{d\omega}{dt}=I\frac{a_t}{l/2}.$$

Poiché il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione è $I=ml^2/3$, si ha

$$a_t=-\frac{3}{4}g\sin\theta.$$

Pertanto:

$$R_t = \frac{1}{4} mg \sin\theta, \qquad R_n = mg\cos\theta + \frac{1}{2} ml\omega^2.$$

8. Una sbarretta omogenea di massa m, sezione costante e lunghezza $l = 1,2\,m$ può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale, privo d'attrito, passante ad una distanza $l/4$ da un suo estremo. Assegnata la velocità angolare massima $\omega_{max} = 8\,rad/s$, si determini il valore minimo della velocità del centro di massa durante il moto.

La velocità angolare massima si ha nel punto più basso della traiettoria, dove l'energia potenziale si assume nulla, mentre la velocità angolare minima si ha nel punto più alto dove l'energia potenziale è massima, pertanto

$$\frac{1}{2} I\omega^2_{max} = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2_{min}.$$

Essendo

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{16} ml^2 = \frac{7}{48} ml^2\,,$$

si ottiene:

$$\omega_{min} = \sqrt{\omega^2_{max} - \frac{48}{7}\frac{g}{l}} = 2,83\,rad/s; \qquad v_C = \omega_{min}\frac{l}{4} = 0,85\,m/s.$$

9. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa M è adagiata, senza altri vincoli, su un piano orizzontale privo di attrito. Inizialmente l'asta è in quiete; quindi viene urtata elasticamente da una pallina di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}_0$ ortogonale all'asta, in un punto distante d dal suo centro. Determinare l'espressione di m affinché dopo l'urto la pallina si arresti.

Si ha conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia cinetica:

$$mv_0 = Mv_C, \qquad mv_0 d = I\omega, \qquad \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{1}$$

essendo v_C ed I rispettivamente la velocità del centro di massa e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a quest'ultimo, avendo tenuto conto che l'asta, dopo l'urto, assume un movimento rototraslatorio.

Tenendo presente la prima e la seconda delle (1), la terza diventa:

$$mv_0^2 = \frac{m^2 v_0^2}{M} + \frac{m^2 v_0^2 d^2}{I}, \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{1}{M} + \frac{d^2}{I}\right) = 1,$$

ed, introducendo il momento d'inerzia della asta $I = Ml^2/12$, si ottiene:

$$m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}.$$

10. Un disco omogeneo di masssa $M = 4\,kg$ e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente. Lungo il suo bordo è avvolto, in modo che non possa slittare, un filo ideale alla cui estremità è fissata una massa $m = 2\,kg$. All'istante iniziale il disco è fermo; quindi viene lasciato libero e la massa m comincia scendere mettendo in moto il disco. Determinare l'energia cinetica del disco all'istante $t = 2\,s$.

Detta T l'energia cinetica del disco, per la conservazione dell'energia, si ha

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{1}$$

Dalle equazioni cardinali della dinamica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

detta τ la tensione del filo e proiettando su un asse verticale volto in basso, si ha

$$mg - \tau = ma_C, \qquad \tau R = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

Poiché il filo non slitta $a_C\dot{\omega}R$; quindi la seconda delle (2) fornisce:

$$\tau = I\frac{a_C}{R^2}.$$

Sostituendo nella prima:

$$mg - I\frac{a_C}{R^2} = ma_C, \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{mg}{m + I/R^2} = \frac{mg}{m + M/2}. \tag{3}$$

Il moto della massa è uniformemente accelerato, dunque la quota h di cui scende e la velocità acquistata sono

$$h = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2, \qquad v = a_C t, \tag{4}$$

pertanto, tenuto conto delle (3) e (4), dalla (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= mgh - \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 \\ &= \frac{M}{4}\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 = 96\,J \end{aligned}$$

In alternativa, la prima delle (3) si può scrivere

$$mg - I\frac{\dot{\omega}R}{R^2} = m\dot{\omega}R, \quad \Rightarrow \quad mgR = \dot{\omega}(mR^2 + I),$$

da cui:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{mR^2 + I}.$$

Integrando,

$$\omega = \frac{mgR}{mR^2 + I}\,t = \frac{mg}{mR + MR/2}\,t.$$

Pertanto l'energia cinetica del disco risulta:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M}{4}\frac{m^2 g^2}{(m + M/2)^2}\,t^2 = 96\,J.$$

11. Una matita di lunghezza $l = 15\,cm$, viene appoggiata in posizione verticale su un piano con attrito. Essa, inizialmente ferma, cade ruotando attorno al punto di contatto col piano. Ricavare velocità ed accelerazione angolare nell'istante dell'impatto col piano.

Per la conservazione dell'energia, detta m la massa della matita, si ha:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia della matita rispetto all'estremo poggiato sul piano, pari a $ml^2/3$.

Dalla (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 14\, rad/s.$$

Per la seconda equazione della dinamica dei sistemi rigidi,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

al momento dell'impatto, si ha:

$$-mg\frac{l}{2} = I\dot{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l} = -98\, rad/s^2.$$

12. Sul bordo di una piattaforma circolare di raggio r che può ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale, è fissato un dispositivo di massa M, munito di una molla ideale di costante k, atto a lanciare un corpo di massa m lungo una traiettoria tangente alla piattaforma. Determinare la velocità angolare della piattaforma dopo il lancio del corpo, supponendo che inizialmente il sistema sia in quiete e che la molla sia stata compressa di un tratto Δl. ($r = 50\, cm$; $M = 1\, kg$; $m = 200\, gm$; $k = 100\, N/m$; $\Delta l = 20\, cm$; momento d'inerzia della piattaforma $I = 0,75\, kg \cdot m^2$)

Per la conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2; \tag{1}$$

per la conservazione del momento angolare, detta v la velocità del corpo, si ha:

$$mvr - (I + Mr^2)\omega = 0,$$

da cui si ricava:

$$v = \frac{(I + Mr^2)\,\omega}{mr}.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{kmr^2(\Delta l)^2}{(I + Mr^2)^2 + mr^2(I + Mr^2)}} = 0,44\, rad/s.$$

13. Un disco omogeneo di massa m e raggio R viene fatto rotolare lungo un piano inclinato. Determinare l'angolo massimo θ di inclinazione, oltre il quale il moto non è più di puro rotolamento sapendo che $\mu_s = 0,5$.

Come sempre, il problema va risolto mediante le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C; \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti, peso, forza d'attrito e reazione normale, $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di tali forze, $I = mR^2/2$ il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse. Nel caso di puro rotolamento, detta $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, proiettando la prima delle (1) lungo il piano inclinato, nel verso discendente, si ha:

$$mg\sin\theta - F_A = ma_C; \tag{2}$$

Inoltre, assunti i momenti delle forze rispetto all'asse del disco, la seconda delle (1) fornisce,

$$F_A R = I\dot{\omega}.$$

Poiché $a_C = \dot{\omega}R$, quest'ultima diventa:

$$F_A R = I\frac{a_C}{R}, \quad \Rightarrow \quad F_A = I\frac{a_C}{R^2},$$

e sostituendo nella (2) si trova:

$$a_C = \frac{mg\sin\theta}{m + I/R^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Quindi la forza d'attrito vale:

$$F_A = I\frac{a_C}{R^2} = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

Ma per il puro rotolamento deve essere,

$$F_A \le \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mg\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta.$$

Pertanto,

$$\tan\theta \le 3\mu_s \quad \Rightarrow \quad \theta = 56,3^\circ.$$

14. Un corpo puntiforme di massa m percorre, su un piano orizzontale scabro, una traiettoria circolare di raggio R con velocità angolare iniziale ω_0. Calcolare il numero di giri n che compie prima di arrestarsi, sapendo che una sbarra omogenea di sezione costante, lunghezza $2R$ e massa m uguale, animata della stessa velocità angolare iniziale, ruotando sullo stesso piano intorno al proprio asse baricentrale, si arresta dopo un giro. Assumere che il coefficienete d'attrito dinamico per il corpo e la sbarra sia lo stesso.

Supponendo che sulla sbarra agisca un momento frenate M costante, dovuto alla forza d'attrito μmg, il lavoro dissipato è dato da

$$\mathcal{L}_s = M\theta_1 = \mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1.$$

Tale lavoro è pari all'energia cinetica iniziale:

$$\mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1 = \frac{1}{2}I\omega_0^2, \tag{1}$$

dove $I = m(2R)^2/12$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla (1) si trae:

$$\mu\, g\,\theta_1 = \frac{1}{3}R\omega_0^2. \tag{2}$$

Il lavoro dissipato dal corpo risulta

$$\mathcal{L}_c = \mu\, m\, g\, R\,\theta_2,$$

uguale all'energia cinetica iniziale del corpo;

$$\mu\, m\, g\, R\theta_2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2, \quad \Rightarrow \quad \mu\, g\,\theta_2 = \frac{1}{2}R\omega_0^2. \tag{3}$$

Dalle (2) e (3) si ricava:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2, \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{3}{2},$$

ed essendo $\theta_1 = 2\pi$,

$$\theta_2 = 3\pi, \quad \Rightarrow \quad n = 1,5\, giri.$$

15. Una sbarra omogenea di sezione costante ed un corpo puntiforme, di masse $m_1 = m_2 = 1\,kg$, sono adagiati senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4\,N/m$, compressa di $\Delta x = 7\,cm$, è disposta ortogonalmente tra un estremo della sbarra ed il corpo. Trovare la velocità v del corpo dopo che la molla viene sbloccata.

Dopo il rilascio della molla, il moto della sbarra è rototraslatorio mentre il moto del corpo è rettilineo. Detta v_C la velocità del centro di massa della sbarra, si ha conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_C^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2, \tag{1}$$

della quantità di moto,

$$m_1 v_C = m_2 v, \tag{2}$$

e del momento angolare:

$$I\omega = \frac{l}{2}m_2 v, \tag{3}$$

dove l è la lunghezza della sbarra.

Tenuto conto che $m_1 = m_2$, dalle (2) e (3) si ha:

$$v = v_C, \qquad \omega = \frac{1}{2}\frac{l}{I}mv.$$

Ricordando che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al baricentro è $I = ml^2/12$ e sostituendo nella (1) si ricava:

$$k(\Delta x)^2 = 3mv^2 + 2mv^2 = 5mv^2, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k(\Delta x)^2}{5m}} = 7\,m/s.$$

16. Un carrello, costituito da un telaio di massa M, e da quattro ruote, assimilabili a dischi di raggio R e massa $m = M/16$ ognuno, viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 7\,m/s$ lungo una rotaia che ha la pendenza del 15%. Determinare il tratto percorso dal carrello fino al suo arresto. Trascurare ogni altro attrito oltre a quello che determina il puro rotolamento.

In condizioni di puro rotolamento si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(M + 4m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = (M + 4m)gh. \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica iniziale, comprendente quella del carrello e delle ruote, il secondo l'energia potenziale assunta nel punto di arresto. Calcolando il momento d'inerzia delle quattro ruote rispetto al loro asse e ricordando la condizione di rotolamento:

$$I = 4\frac{1}{2}\frac{M}{16}R^2 \qquad \omega = v_0 R,$$

la (1) diventa,

$$\frac{11}{16}Mv_0^2 = \frac{20}{16}Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g}.$$

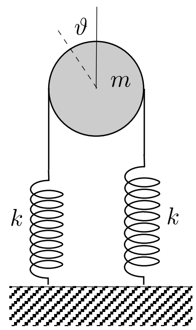
D'altra parte, detta d la proiezione orizzontale del percorso l, si ha

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = 0,15, \quad \Rightarrow \quad \theta = 8,53°.$$

Pertanto:

$$h = l\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g\sin\theta} = 18,54\,m$$

17. Nella gola di una carrucola di massa m e raggio r ad asse orizzontale, intorno al quale può ruotare senza attrito, è diposto un filo ideale che non slitta. Gli estremi di quest'ultimo sono collegati a due molle ideali di costante elastica k, fissate a loro volta ad un supporto rigido, come in figura. Determinare il periodo delle oscillazioni e la velocità angolare massima della carrucola, quando il sistema viene spostato dalla sua posizione di equilibrio.



Il sistema ha un solo grado di libertà: l'angolo di rotazione. Per la seconda equazione cardinale della dinamica dei corpi rigidi,

$$M = I\frac{d\omega}{dt},$$

indicando con θ l'angolo di rotazione, si ha:

$$-2k(r\theta)r = \frac{1}{2}mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\ddot{\theta} + 2k\theta = 0.$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}.$$

Il moto oscillatorio e la velocità angolare possono essere espressi dalle equazioni

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \theta_0\omega\sin\omega t,$$

dove θ_0 è l'angolo massimo di rotazione della carrucola. Quindi, tenendo conto della (1), la velocità angolare massima risulta:

$$\omega_{max} = \theta_0\omega = \theta_0\sqrt{\frac{4k}{m}}.$$

Da notare che inevitabilmente, velocità angolare e pulsazione sono espresse con lo stesso simbolo.

Si lascia al lettore risolvere il problema mediante la conservazione dell'energia: cinetica ed elastica.

18. Una sbarretta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, è adagiata senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Sullo stesso piano una particella, anch'essa di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}$ che forma un angolo θ con la sbarretta, colpisce un estremo di questa aderendovi all'istante. Determinare l'espressione dell'energia cinetica del sistema dopo l'urto.

Il sistema dopo l'urto anelastico, assume un movimento rototraslatorio piano. Non agendo forze esterne, tranne la reazione del vincolo, che non compie lavoro perché ortogonale al piano, l'energia cinetica finale risulta somma di due termini: uno di traslazione del centro di massa, l'altro di rotazione intorno ad esso. Il centro di massa del sistema, dopo l'urto si trova alla distanza $l/4$ dall'estremo della sbarretta. Si ha conservazione della quantità di moto e del momento angolare, prima e dopo l'urto:

$$m\mathbf{v} = 2m\mathbf{v}_C, \qquad mv\frac{l}{4}\sin\theta = I_C\omega, \tag{1}$$

dove I_C è il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa. Dalle (1) si trae:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\mathbf{v}}{2}, \qquad I_C = m\frac{l^2}{12} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}ml^2.$$

Quindi, dalla seconda delle (1),

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{l}\sin\theta.$$

L'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}(2m)v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{4}mv^2\left(1 + \frac{3}{5}\sin^2\theta\right).$$

19. Una ruota, assimilabile ad un disco di massa $m = 10\,kg$ e raggio r, rotola senza strisciare su una rotaia orizzontale, trainata da una forza, parallela alla rotaia e applicata al centro di massa, di intensità che varia nel tempo con la legge $F = kt$, con $k = 1\,N/s$. Determinare l'istante in cui cessa il rotolamento puro, sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu_s = 0,2$.

Come in tutti i problemi che riguardano il movimento di un corpo rigido, vanno applicate le equazioni:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

in cui $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti ed $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di dette forze. Nel caso del problema le forze agenti sono la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$, opposta alla direzione del moto, e la forza di traino. Proiettando sull'asse orizzontale e assumendo i momenti delle forze ed il momento d'inerzia rispetto al centro di massa della ruota, si ha:

$$kt - F_A = ma_C \qquad F_A r = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Dalla seconda si trae

$$F_A = \frac{I}{r}\ddot{\theta}, \tag{1}$$

che sostituita nella prima fornisce:

$$kt - \frac{I}{r}\ddot{\theta} = mr\ddot{\theta}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{k\,t}{mr + I/r}.$$

perciò la (1) diventa,

$$F_A = \frac{I}{r}\frac{k\,t}{mr + I/r} = \frac{1}{3}k\,t.$$

Ma perché il moto sia di puro rotolamento dev'essere

$$F_A \le \mu_s mg, \qquad \frac{1}{3}k\,t \le \mu_s mg, \quad \Rightarrow \quad t \le 3\frac{\mu_s mg}{k} = 58,8\,s.$$

20. Un'asta omogenea di sezione costante e massa $M = 9m$ può ruotare su un piano orizzontale privo di attrito, attorno ad un asse fisso verticale, passante per un suo estremo. Essa si trova in quiete finché un corpo puntiforme di massa m animato di velocità $\mathbf{v}$ ortogonale all'asta e parallela al piano, la colpisce nel punto di mezzo, rimbalzando con velocità $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}/3$. Stabilire se l'urto è elastico o meno.

Per stabilire il tipo d'urto occorre valutare l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto. In ogni caso si ha conservazione del momento angolare. Detta l la lunghezza dell'asta si ha

$$mv\frac{l}{2} = -mv'\frac{l}{2} + I\omega = -\frac{1}{3}mv\frac{l}{2} + I\omega, \tag{1}$$

in cui $I = Ml^2/3$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'estremo. Dalla (1) si ricava:

$$\frac{2}{3}mvl = I\omega, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{9}\frac{v}{l}. \tag{2}$$

L'energia cinetica dopo l'urto è:

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{9} + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Sostituendo l'espressione di ω data dalla (2), si ottiene:

$$T' = \frac{7}{54}mv^2,$$

e, confrontando con l'energia cinetica del corpo prima dell'urto, $T = mv^2/2$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{7}{27} = 0,26.$$

L'urto non è elastico.

21. Una sbarra di sezione costante, lunghezza l e massa M in quiete, può ruotare su un piano orizzontale liscio, attorno ad un perno fissato ad un estremo. Una massa m animata di velocità $\mathbf{v}_0$, perpendicolare alla sbarra e parallela al piano, vi si conficca ad una distanza x dal perno. Ricavare la distanza x per la quale la velocità angolare, dopo l'urto, è massima e l'espressione di quest'ultima.

L'urto è anelastico. Si ha conservazione del momento angolare prima e dopo l'urto:

$$mv_0x = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è dato da

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + mx^2.$$

dalla (1) si ricava:

$$\omega = \frac{mv_0x}{mx^2 + Ml^2/3}.$$

Annullando la derivata rispetto ad x della relazione precedente, si ottiene la distanza x_0 per la quale la velocità angolare risulta massima:

$$x_0 = l\sqrt{\frac{M}{3m}}$$

e la velocità angolare massima:

$$\omega_{max} = \frac{v_0}{2l\sqrt{M/(3m)}}.$$

22. Una sbarretta omogenea di massa M, lunghezza l e sezione costante può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed ortogonale ad essa. Un corpo puntiforme di massa m viene fatto cadere da un'altezza h aderendo ad una estremità della sbarretta, inizialmente in quiete ed in posizione orizzontale. Determinare l'altezza minima da cui deve cadere il corpo affinché il sistema compia un giro completo ($M = 3m$).

L'urto è anelastico; si conserva il momento angolare. Detta v la velocità del corpo al momento dell'impatto, si ha

$$mv\frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2.$$

dalla (1) si ha

$$\omega = \frac{mvl}{2I} = \frac{v}{l}.$$

Poiché,

$$v = \sqrt{2gh},$$

si ottiene

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{2gh}.$$

Affinché il sistema compia un giro completo, la sua energia cinetica dopo l'urto, dev'essere almeno pari alla variazione di energia potenziale del corpo che, una volta colpita la sbarretta, raggiunge la massima altezza $l/2$:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq mg\frac{l}{2}, \quad \Rightarrow \quad h \geq l.$$

23. Un disco e un anello rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato, partendo rispettivamente dalle quote h_d ed h_a. Determinare il rapporto h_d/h_a perché alla fine del piano inclinato giungano con la stessa velocità.

Trascurando l'attrito di rotolamento, sempre molto piccolo se il piano d'appoggio è indeformabile, si ha conservazione dell'energia cinetica in quanto la forza di attrito statico non compie lavoro; essa infatti non sposta il suo punto di applicazione. Pertanto:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, che per il disco e l'anello sono

$$I_d = \frac{1}{2}m_dR_d^2, \qquad I_a = m_aR_a^2.$$

Inoltre trattandosi di puro rotolamento nei due casi si ha

$$\omega_d = \frac{v_{Cd}}{R_d}, \qquad \omega_a = \frac{v_{Ca}}{R_a},$$

con ovvio significato dei simboli. Sostituendo nella (1) le grandezze pertinenti al disco e all'anello, si ottiene

$$v_{Cd}^2 = \frac{4}{3}gh_d, \qquad v_{Ca}^2 = gh_a.$$

Ma, dovendo essere uguali le velocità alla fine del piano inclinato, confrontando si trae:

$$\frac{h_d}{h_a} = \frac{3}{4}.$$

24. Una semisfera omogenea di raggio R e massa m è trascinata, con velocità costante $\mathbf{v}_0$ da una forza orizzontale $\mathbf{F}_1$, applicata come in figura. Il baricentro della semisfera si trova ad una distanza $3R/8$ dalla superficie piana. determinare il coefficiente di attrito dinamico sapendo che, durante il moto, la normale alla superficie piana forma con la verticale un angolo $\alpha = 28°$.

Giacché la normale alla superficie piana forma un angolo α con la verticale, il punto di contatto O della semisfera col piano non si trova su detta normale, vedi figura. Inoltre la semisfera si muove con velocità costante, quindi la somma delle forze $\mathbf{F}$ e la somma dei momenti $\mathbf{M}$ devono essere nulle. Detta $\mathbf{R}_n$ la reazione normale al piano ed $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, si ha,

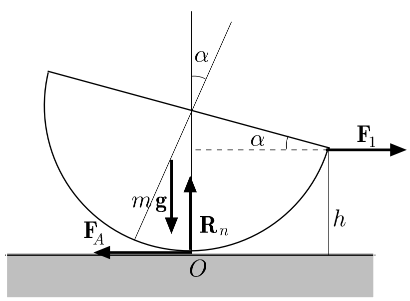
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} = 0.$$

Proiettando lungo l'asse x orizzontale:

$$F_x = F_1 - F_A = 0, \quad \Rightarrow \quad F_A = F_1. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto al punto di contatto O, sapendo che la forza peso è applicata al baricentro, distante $3R/8$ dalla superficie piana e tenuto conto che $F_1 = F_A$, la somma dei moduli dei momenti risulta:

$$M = mg\frac{3}{8}R\sin\alpha - \mu_d mgR(1 - \sin\alpha) = 0.$$



Si ottiene

$$\frac{3}{8}\sin\alpha = \mu_d(1 - \sin\alpha), \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{3}{8}\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

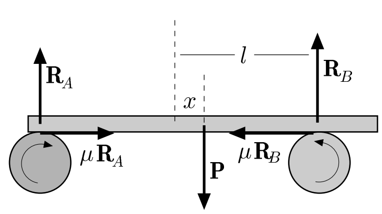
Per $\alpha = 28°$ risulta:

$$\mu_d = \frac{1}{3}.$$

Se α fosse uguale a zero non ci sarebbe attrito; la semisfera si muoverebbe di moto uniformemente accelerato.

25. Una sbarra omogenea di sezione costante e peso $P = 4\,kg_p$, è appoggiata orizzontalmente su due cilindri identici ad assi paralleli ed orizzontali, distanti $2l = 1,2\,m$. Calcolare le reazioni R_A ed R_B nei punti d'appoggio A e B, quando il baricentro della sbarra dista $x = 10\,cm$ dal piano verticale equidistante dai cilindri. Assumendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra sbarra e cilindri sia $\mu = 0,2$ e posti in rotazione i cilindri attorno ai loro assi, con velocità angolari uguali e in verso opposto, dimostrare che il moto della sbarra è armonico. Supponendo che essa sia sufficientemente lunga da potere appoggiare sempre sui cilindri, calcolare il valore di μ nel caso in cui il periodo delle oscillazioni sia $T = 2,5\,s$.

Calcolo delle reazioni



Per l'equilibrio delle forze e dei momenti, rispetto al baricentro della sbarra, si ha

$$R_A + R_B - P = 0, \qquad M_B - M_A = 0. \tag{1}$$

Quest'ultima si scrive:

$$R_A(l+x) = R_B(l-x),$$

e, tenuto conto della prima delle (1),

$$(P - R_B)(l+x) = R_B(l-x).$$

Si trae:

$$R_B = \frac{P(l+x)}{2l} = 2,33\, kg_p, \qquad R_A = \frac{P(l-x)}{2l} = 1,67\, kg_p. \tag{2}$$

Calcolo del moto

Le forze orizzontali alle quali è soggetta la sbarra sono le forze d'attrito che si destano nei punti di contatto coi cilindri μR_A e μR_B. Supponendo che il primo cilindro ruoti in senso orario ed il secondo in senso antiorario, l'equazione di Newton si scrive:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\left(\frac{P(l-x)}{2l} - \frac{P(l+x)}{2l}\right) = -\mu\frac{P}{l}\,x.$$

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{g}{l}\,x,$$

equazione dell'oscillatore armonico con

$$\omega^2 = \mu\frac{g}{l}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Il coefficiente d'attrito per un periodo $T = 2,5\, s$ dev'essere

$$\mu = 4\pi^2\frac{l}{gT^2} = 0,39.$$

26. Una sbarra omogenea di sezione costante, massa $m = 200\, gm$ e lunghezza l, è adagiata, in quiete, su un piano orizzontale liscio. La sbarra viene posta in moto da un impulso $J = 2\, N\cdot s$, ortogonale ad essa ed applicato ad un estremo. Calcolare il lavoro della forza impusiva.

Il lavoro della forza impulsiva è pari all'energia cinetica dalla sbarra che assume un moto rototrasaltorio:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

Poiché l'impulso angolare è uguale alla variazione del momento angolare,

$$\mathbf{J}_\theta = \Delta\mathbf{L}, \quad \Rightarrow \quad J_\theta = I\omega,$$

si ha:

$$\omega = \frac{J_\theta}{I} = \frac{Jl}{2I} = \frac{6J}{ml},$$

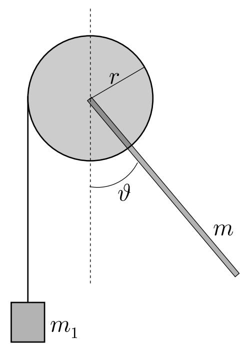
avendo tenuto conto che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al suo centro di massa è $I = ml^2/12$. D'altra parte,

$$v_C = \omega\frac{l}{2} = 3\frac{J}{m}.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{9}{2}\frac{J^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\frac{36J^2}{m^2l^2} = 6\frac{J^2}{m} = 120\,J.$$

27. Un sistema rigido è costituito da una sbarra omogenea di sezione costante, massa m e lunghezza l, la cui estremità è saldata ortogonalmente all'asse di un disco di raggio r, di massa trascurabile rispetto a quella della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse del disco, disposto orizzontalmente, ed è tenuto in equilibrio da un corpo di massa m_1 agganciato ad un estremo di un filo ideale, mentre l'altro estremo è fissato al bordo del disco. In tale posizione, individuata dall'angolo θ che l'asta forma con la verticale, viene agganciato al filo un altro corpo di massa $2m_1$. Determinare la velocità angolare del sistema quando la sbarra si dispone verticalmente ($r = 10\,cm$; $m = 800\,gm$; $m_1 = 1\,kg$; $l = 32\,cm$).



Dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione, si ottiene l'angolo θ:

$$m_1 gr - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0, \qquad \sin\theta = \frac{2mr}{m_1 l}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Quando al filo, oltre al corpo di massa m_1, viene agganciato il corpo di massa $2m_1$, il sistema inizia a ruotare. Tenuto conto che, raggiunta la posizione verticale della sbarra, il filo si svolge di una lunghezza pari a $r(\pi - \pi/6)$ ed i corpi scendono di tale quota mentre la sbarra raggiunge la verticale, la variazione di energia potenziale del sistema risulta:

$$\Delta U = -3mgr\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + mg\frac{l}{2}(1 + \cos\theta) = -5,35\,J.$$

La variazione di energia cinetica corrispondente è

$$\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(3m_1)v^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{3}{2}m_1 r^2\omega^2.$$

Ma $\Delta T = -\Delta U$, quindi:

$$\left(\frac{1}{6}ml^2 + \frac{3}{2}mr^2\right)\omega^2 = 5,35, \quad \Rightarrow \quad \omega = 13,68\,rad/s.$$

28. Un cubo omogeneo di spigolo $l = 10\,cm$ e massa M è appoggiato su un piano orizzontale. Al centro della faccia opposta a quella su cui poggia è applicata una forza $\mathbf{F}$, parallela agli spigoli orizzontali. Fuori dal centro, in un punto P opposto alla direzione della forza, viene collocata una massa $m = \alpha M$, con $\alpha = 0,3$. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico tra cubo e piano è $\mu_s = 0,5$ determinare la minima distanza x dalla faccia verticale, normale ad $\mathbf{F}$, del punto P affinché, nella condizione di moto incipiente, il cubo trasli senza subire rotazioni.

Nelle condizioni di moto incipiente il modulo della forza applicata dev'essere:

$$F = \mu_s Mg(1+\alpha).$$

La distanza minima x in cui va posta m va ricavata imponendo che la somma dei momenti delle forze dev'essere nulla. Assumendo i momenti rispetto allo spigolo anteriore che poggia sul piano, si ha

$$\mu_s Mg(1+\alpha)l - Mg\frac{l}{2} - \alpha Mgx = 0.$$

Si ricava:

$$x = \frac{\mu_s(1+0,3)l - l/2}{0,3} = 5\,cm.$$

29. Un'automobile viaggia su un rettilineo con velocità $v_0 = 216\,km/h$. Alla distanza $d = 150\,m$ dall'inizio di una curva comincia a frenare con accelerazione costante, in modo da affrontare la curva con la massima velocità, di modulo costante, senza slittare. Calcolare il valore dell'accelerazione sapendo che il raggio della curva è $r = 90\,m$ ed il coefficiente di attrito statico $\mu_s = 1$.

Perché la macchina non slitti la forza centripeta dev'essere:

$$m\frac{v^2}{r} \leq \mu_s mg, \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}. \tag{1}$$

L'accelerazione va determinata mediante la relazione:

$$v_{max}^2 - v_0^2 = 2ad.$$

Sostituendo la (1),

$$a = \frac{v_{max}^2 - v_0^2}{2d} = -9\,m/s^2.$$

30. Un'asta omogenea di sezione costante, massa $m = 0,9\,kg$ e lunghezza $l = 0,2\,m$, incernierata nel suo punto di mezzo ad un asse, è inizialmente in equilibrio in posizione orizzontale. Essa viene colpita verticalmente da un proiettile, di massa $m_1 = 100\,gm$ e velocità $v_0 = 100\,m/s$ che si conficca in un sua estremo. Determinare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto e il numero di giri compiuto prima di arrestarsi, supponendo che la cerniera eserciti un momento costante, dovuto alla forza d'attrito pari a $M = 6\,N\cdot m$.

Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$m_1 v_0 \frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema:

$$I = m\frac{l^2}{12} + m_1\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}(m+3m_1)l^2.$$

Dalla (1) si trae:

$$\omega = \frac{6m_1 v_0}{(m+3m_1)l}.$$

Il lavoro della forza d'attrito è

$$\mathcal{L}_A = -\int_0^\theta M d\theta = -M\theta.$$

Tale lavoro è pari alla variazione di energia cinetica $T_f - T_i$ dove $T_f = 0$. Pertanto:

$$M\theta = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Si deduce:

$$\theta = \frac{3}{2}\frac{(m_1 v_0)^2}{(m + 3m_1)M} = 20,8\, rad, \qquad n = \frac{\theta}{2\pi} = 3,32\, giri.$$

31. Un disco ed una sfera omogenei, animati di velocità baricentrale v_d e v_s, affrontano in salita un piano inclinato, rotolando senza strisciare. Determinare quanto dev'essere il rapporto v_d/v_s affinché raggiungano la stessa quota h.

Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 = mgh,$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Poiché il momento d'inerzia, nei due casi, ha l'espressione

$$I = kmr^2,$$

con $k_d = 1/2$ e $k_s = 2/5$, rispettivamente per il disco e la sfera, ed il moto è di puro rotolamento, si ha

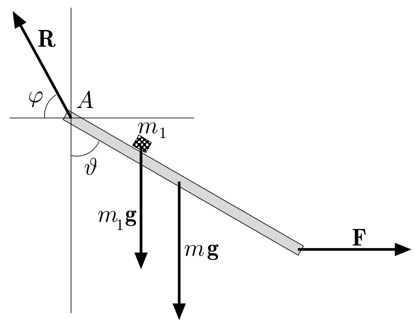
$$\frac{1}{2} k_d m r^2 \frac{v_d^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_d^2 = \frac{1}{2} m v_d^2 (k_d + 1) = mgh$$
$$\frac{1}{2} k_s m r^2 \frac{v_s^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_s^2 = \frac{1}{2} m v_s^2 (k_s + 1) = mgh.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{v_d}{v_s} = \sqrt{\frac{1 + k_s}{1 + k_d}} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

Esercizi sulla Statica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Un'asta rigida AB, di sezione costante, lunghezza l e massa $m = 20\,kg$, è incernierata ad un asse orizzontale passante per l'estremo A, Sull'asta, alla distanza $2l/3$ da B è fissato un corpo puntiforme di massa $m_1 = 10\,kg$. Determinare il modulo della forza orizzontale che si deve applicare all'estremo B per mantenere l'asta in equilibrio nella posizione in cui forma un angolo $\theta = 60°$ con la verticale, e la reazione in A in tali condizioni.



Per l'equilibrio le somme delle forze e la somma dei momenti devono essere nulle,

$$\sum \mathbf{F} = 0, \qquad \sum \mathbf{M} = 0.$$

Le forze agenti sull'asta sono: il peso proprio, il peso del corpo, la forza applicata e la reazione vincolare

$$m\mathbf{g} + m_1\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{R} = 0.$$

Proiettando sugli assi di un riferimento cartesiano con origine in A, si ha

$$F + R_{Ax} = 0, \qquad R_{Ay} - mg - m_1 g = 0,$$

da cui:

$$R_{Ax} = -F \qquad R_{Ay} = (m + m_1)g. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto ad A, si ottiene:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta - m_1 g\frac{l}{3}\sin\theta + Fl\cos\theta = 0.$$

Si ricava:

$$F = \left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{3}\right) g\tan\theta = 226,3\,N.$$

Tenuto conto delle (1), il modulo della reazione è

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{F^2 + [(m + m_1)g]^2} = 371,1\,N.$$

Poiché per le (1),

$$\tan\varphi = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = -1,29, \quad \Rightarrow \quad \varphi = |52,22°|.$$

La direzione di $\mathbf{R}$, rispetto all'orizzontale, risulta

$$\beta = 180° - 52,22° = 127,78°.$$

2. Una trave omogenea, di sezione costante e lunghezza l, è appoggiata ad una parete verticale liscia e ad un pavimento scabro. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra pavimento e trave è $\mu_s = 0,5$, si determini il minimo angolo formato dalla trave col pavimento perché si abbia equilibrio.

Detti A e B i punti di appoggio della trave sulla parete e sul pavimento, la condizione di equilibrio è espressa dalle relazioni,

$$\sum \mathbf{F} = 0. \qquad \sum \mathbf{M} = 0. \tag{1}$$

Le forze che agiscono sulla trave sono: il peso, applicato al suo baricentro, e le reazioni $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$; la prima delle (1) si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0. \tag{2}$$

Fissato un riferimento con asse x parallelo al piano ed asse y ortogonale, volto in alto, e proiettando la (2) su tali assi, si ha

$$R_A + R_{Bx} = 0 \qquad R_{By} - mg = 0. \tag{3}$$

Va osservato che, essendo la parete liscia, la reazione $\mathbf{R}_A$ è ortogonale alla parete mentre non è nota la direzione della reazione $\mathbf{R}_B$. Pertanto conviene assumere i momenti delle forze rispetto ad B. Si ha:

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - R_A l \sin\theta = 0.$$

Si ottiene:

$$R_A = \frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Per la prima delle (3) si deduce

$$R_{Bx} = -R_A = -\frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

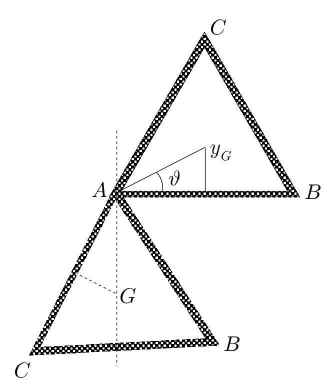
Tenuto conto della seconda delle (3), perché la trave non scivoli si deve avere:

$$|R_{Bx}| \le \mu_s R_{By} = \mu_s mg.$$

Da cui:

$$\mu_s \ge \frac{|R_{Bx}|}{mg} = \frac{1}{2}\cot\theta, \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°.$$

3. Un triangolo equilatero ABC è formato da tre asticelle omogenee, di sezioni S uguali. I lati AC e BC sono costituiti da materiale di densità ρ; il lato AB ha densità $\rho_1 = 2\rho/3$. Inizialmente il triangolo è disposto col lato AB orizzontale e può ruotare attorno al vertice A. Determinare l'angolo di rotazione quando, lasciandolo libero, raggiunge la posizione di equilibrio.



Nella posizione di equilibrio stabile il baricentro del triangolo, soggetto alla gravità, è disposto sulla verticale. Per ragioni di simmetria il baricentro si trova sull'altezza relativa al lato AB; quindi, detta l la lunghezza del lato, la sua ascissa è

$$x_G = l\cos 60^\circ = \frac{l}{2}.$$

Dette m_1, m_2 ed m_3 le masse dei lati, l'ordinata è data da:

$$y_G = \frac{(m_1+m_2)(l/2)\sin 60^\circ}{m_1+m_2+m_3}.$$

Essendo,

$$m_1 = m_2 = lS\rho, \qquad m_3 = 2lS\rho/3,$$

si ottiene:

$$y_G = \frac{3}{8} l\sin 60^\circ = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}\, l.$$

L'angolo θ formato dal segmento che unisce il baricentro col vertice A è dato da

$$\tan\theta = \frac{y_G}{l/2} = \frac{3}{8}\sqrt{3} = 0,65, \quad \Rightarrow \quad \theta = 33^\circ.$$

L'angolo di rotazione:

$$\varphi = 90^\circ + 33^\circ = 123^\circ.$$

Esercizi sulla Statica dei Fluidi
A cura del Prof. T.Papa

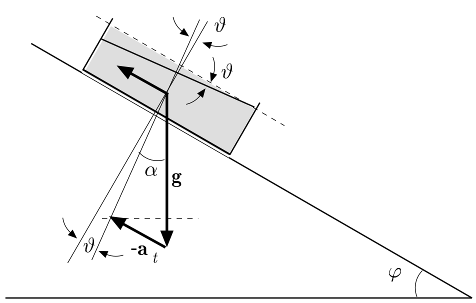
1. Un recipiente contenente un liquido scivola lungo un piano inclinato di un angolo φ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito cinetico tra recipiente e piano è $\mu = 0,15$. Si determini l'angolo θ che la superficie libera del liquido forma col piano inclinato durante il moto del recipiente.

Nel riferimento solidale col recipiente si ha equilibrio tra le forze di superficie e le forze di volume; queste ultime dovute al peso del liquido e alla forza di trascinamento. La somma di tali forze è ortogonale alla superficie isobarica (equipotenziale). Si verifica facilmente che nel caso in cui non fosse presente attrito, la superficie libera del liquido sarebbe parallela al piano inclinato. Infatti l'accelerazione di trascinamento è in modulo $a_t = g \sin\varphi$, opposta all'accelerazione con cui si muove il recipiente. La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$ è ortogonale al piano inclinato e quindi alla superficie libera del liquido.

Nel caso in cui sia presente l'attrito l'accelerazione di trascinamento risulta, in modulo,

$$a_t = g \sin\varphi - \mu g \cos\varphi. \tag{1}$$

La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$, dev'essere ortogonale alla superficie libera del liquido ma non è ortogonale al piano inclinato.



Si consideri l'angolo α che la forza peso forma con la normale alla superficie libera, vedi figura; esso è dato dalla relazione

$$\tan\alpha = \frac{a_t \cos\varphi}{g - a_t \sin\varphi}. \tag{2}$$

Si verifica immediatamente che in assenza di attrito $\tan\alpha = \tan\varphi$. Poiché $\theta = \varphi - \alpha$, si ha:

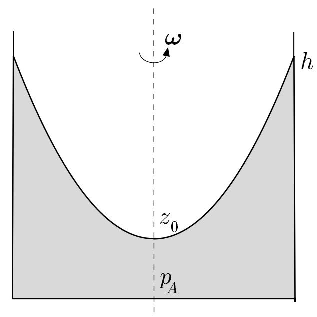
$$\tan\theta = \tan(\varphi - \alpha) = \frac{\tan\varphi - \tan\alpha}{1 + \tan\varphi \tan\alpha}.$$

Sostituendo nella precedente relazione le (1) e (2), si ottiene

$$\tan\theta = \mu, \qquad \theta = 8,53^\circ.$$

Il risultato è interessante ma non sorprendente; infatti nell'accelerazione di trascinamento interviene la forza di attrito che è proporzionale a μ.

2. Un recipiente cilindrico di raggio $R = 25\,cm$ contenente acqua, ruota attorno al proprio asse, disposto verticalmente, compiendo $1,5\,giri/s$. Sapendo che la pressione minima sul fondo del recipiente è $p_A = 1,02\,atm$, si determini l'altezza h che l'acqua raggiunge in corrispondenza alla parete. Si assuma che la pressione esterna p_0 sia uguale ad una atmosfera.



Nel riferimento ruotante si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume. Le superfici equipotenziali, e quindi la superficie libera dell'acqua, sono paraboloidi di rotazione (T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pag. 427) di equazione

$$g(z-z_0)=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2), \tag{1}$$

dove z_0 è l'ordinata del vertice del paraboloide. La pressione sul fondo, p_A, è minima in corrispondenza all'asse di rotazione e massima in corrispondenza alla parete, dove l'acqua assume l'altezza h. Pertanto dalla (1) si ha

$$g(h-z_0)=\frac{1}{2}\omega^2R^2,$$

e moltiplicando per ρ:

$$\rho gh-\rho gz_0=\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2. \tag{2}$$

D'altra parte:

$$p_A=\rho gz_0+p_0, \quad \Rightarrow \quad \rho gz_0=p_A-p_0.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\rho gh=p_A-p_0+\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2, \quad \Rightarrow \quad h=\frac{p_A-p_0}{\rho g}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2R^2}{g}=0,49\,m$$

3. Un palloncino di gomma, che può sopportare una sovrappressione massima $\Delta p = 0,66\,atm$, è riempito con elio alla pressione atmosferica. Nell'ipotesi di atmosfera isoterma secondo cui la densità dell'aria obbedisce alla legge di Boyle $\rho=\rho_0 p/p_0$, dove ρ_0 e p_0 sono la densità e la pressione al livello del mare, si calcoli a quale altezza dal suolo il palloncino esploderà. ($\rho_0=1,29\,kg/m^3$, $p_0=1\,atm$)

Fissato un asse z di riferimento volto in alto, la variazione infinitesima di pressione è data da

$$dp=-\rho gdz=-\frac{\rho_0}{p_0}pgdz.$$

Separando le variabili ed integrando si ha

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\rho_0}{p_0}gdz, \quad \Rightarrow \quad \ln p=-\frac{\rho_0}{p_0}gz+C,$$

dove C è una costante pari a $\ln p_0$. Pertanto

$$\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{\rho_0}{p_0}gz, \quad \Rightarrow \quad p=p_0e^{-\rho_0 gz/p_0}. \tag{1}$$

Ma la pressione alla quale il palloncino esplode è $p_0-\Delta p$, quindi sostituendo nella prima delle (1) si trae:

$$\ln\frac{p_0-\Delta p}{p_0}=-\frac{\rho_0}{p_0}gz, \quad \Rightarrow \quad z=\frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p_0}{p_0-\Delta p}=8,5\,km.$$

4. Un recipiente a pareti verticali poggia su un piano orizzontale ed è rempito, fino all'altezza $h = 25\,cm$, con una massa d'acqua $m = 30\,kg$. In esso viene posto a galleggiare un cubo di ghiaccio di spigolo $l = 20\,cm$. Si determini la pressione sul fondo, prima e dopo la fusione del ghiaccio (densità del ghiaccio $\rho_{gh} = 940\,kg/m^3$).

Dalla definizione di pressione come rapporto tra forza normale e superficie, si deduce che la pressione sul fondo del recipiente è la stessa prima e dopo la fusione del ghiaccio;

$$p = p_0 + \frac{m + m_{gh}}{A} g, \tag{1}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica ed A la superficie del fondo. Poiché

$$A = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho_a h},$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua, la (1) si scrive:

$$p = p_0 + (m + \rho_{gh} l^3) g \frac{h}{m} \rho_a = p_0 + 3064\,N/m^2.$$

5. Un'autocisterna completamente piena di un liquido di densità $\rho = 850\,kg/m^3$ viaggia su una strada piana con velocità costante. Ad un certo istante essa frena con accelerazione costante $a = 1,5\,m/s^2$. Sapendo che la lunghezza dell'autocisterna è $l = 7\,m$ e l'altezza del liquido in quiete è $z_0 = 1,5\,m$, determinare il valore della pressione massima esercitata dal liquido durante la frenata.

Nel riferimento x-z dell'autocisterna, fintanto che l'accelerazione impartita dalla frenata è costante, si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume:

$$\nabla p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t,$$

dove $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_t$ sono rispettivamente la somma delle forze reali e delle forze di trascinamento. Nel caso del problema, la forza peso e la forza di trascinamento destata dalla frenata $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. Se l'asse x del riferimento è positivo nel verso del moto, essendo l'accelerazione negativa, tale forza è positiva e spinge il liquido contro la parete anteriore. La precedente relazione si scrive:

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k} + \rho a_t \mathbf{i},$$

che dà luogo a

$$\nabla p = \nabla(\rho a_t x - \rho g z), \quad \Rightarrow \quad \nabla(p - \rho a_t x + \rho g z) = 0.$$

Si trae:

$$p - \rho a_t x + \rho g z = cost, \tag{1}$$

in cui, per $x = 0$, $z = z_0$, $p = p_0$ (pressione atmosferica),

$$cost = p_0 + \rho g z_0.$$

Pertanto la (1) diventa,

$$p = \rho a_t x - \rho g z + \rho g z_0 + p_0. \tag{2}$$

La pressione è massima per $x = l$ e $z = 0$:

$$p_{max} = \rho a_t l + \rho g z_0 + p_0 = 122720\,N/m^2.$$

Questo risultato è corretto se si suppone l'autocisterna completamente piena di liquido incompressibile e se essa è munita di un opportuno dispositivo che mantiene la pressione p_0 (atmosferica) alla superficie libera del liquido.

Se l'autocisterna fosse aperta, con pareti sufficienetemente alte, le superfici isobariche (equipotenziali) vanno ottenute assegnando i corrispondenti valori di p nella (2). In particolare, ponendo $p = p_0$, si ha l'equazione della superficie libera:

$$\rho g z = \rho a_t x + \rho g z_0' \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a_t}{g}x + z_0', \tag{3}$$

dove z_0' è l'altezza minima assunta dal liquido (parete posteriore).

La (3) è l'equazione di un piano inclinato di un angolo

$$\tan\theta = \frac{a_t}{g}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_t}{g}.$$

Per trovare le altezze z_0' (parete posteriore) ed h (parete anteriore) che assume il liquido (incompressibile) durante la frenata, si osservi che il suo volume rimane lo stesso; quindi, qualunque sia la sezione trasversale del serbatoio, la sezione mediana longitudinale, prima e durante la frenata, è costituita da un rettangolo e da un trapezio di aree uguali:

$$z_0 l = \frac{1}{2}(h + z_0')l, \quad z_0' = 2z_0 - h. \tag{4}$$

pertanto la (3) diventa,

$$z = \frac{a_t}{g}x + 2z_0 - h.$$

Ponendo $z = h$, $x = l$, si ha:

$$h = \frac{a_t}{g}l + 2z_0 - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} + z_0 = 2{,}03\,m \tag{5}$$

La pressione massima risulta

$$p_{max} = \rho g h + p_0 = \frac{l}{2}\rho a_t + \rho g z_0 + p_0 = 118254\,N/m^2.$$

Il valore della pressione è leggermente inferiore a quello trovato prima (autocisterna piena). Si deduce che in quel caso la sovrappressione è dovuta alla reazione esercitata dalla parete superiore del serbatoio.

Si osservi che, tenuto conto della (5), la (4) fornisce:

$$z_0' = z_0 - \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} = 0{,}96\,m.$$

6. Una sfera omogenea, di volume $V = 25\,dm^3$ e densità ρ, è trattenuta, completamente immersa nell'acqua di un grande recipiente, da una funicella ideale ancorata al fondo, soggetta ad una tensione $T = 20\,kg_p$. A causa della rottura della funicella, la sfera emerge raggiungendo una nuova posizione di equilibrio. Determinare la frazione di sfera emergente e la variazione della reazione vincolare esercitata dal fondo.

Detta ρ_a la densità dell'acqua, la tensione della funicella è data dalla differenza tra la spinta d'Archimede ed il peso della sfera,

$$T = \rho_a V g - \rho V g, \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_a - \frac{T}{Vg} = 200\,kg/m^3.$$

Quando la sfera emerge, una parte rimane immersa. Detto V_1 il volume di tale parte, si ha:

$$\rho_a V_1 g = \rho V g \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{\rho V}{\rho_a}.$$

pertanto,

$$\frac{V - V_1}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{\rho}{\rho_a} = 0,8.$$

La variazione della reazione vincolare è ovviamente:

$$\Delta R = T = 20\,kg_p = 196,2\,N.$$

7. Sul fondo di una piscina piena d'acqua è ancorata una fune ideale alla quale sono fissate, immerse nell'acqua e a distanze diverse, due boe A e B, entrambe di massa $m = 3\,kg$ e densità media ρ pari ad un terzo di quella dell'acqua. Determinare le tensioni τ_1 e τ_2 nei tratti di fune compresi tra il fondo e la prima boa A e tra la prima e la seconda boa B.

Fissato un asse di riferimento volto in basso, sulla boa A agiscono le forze: τ_1, τ_2, peso e spinta d'Archimede; per l'equilibrio si ha,

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m_a g = 0,$$

dove m_a è la massa d'acqua spostata. Detta ρ_a la densità dell'acqua, risulta,

$$m_a = m\frac{\rho_a}{\rho};$$

quindi la relazione precedente diventa:

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0. \qquad (1)$$

D'altra parte per l'equilibrio della boa B si ha:

$$\tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 58,8\,N.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\tau_1 = 2mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 2\tau_2 = 117,6\,N.$$

8. Un corpo, a pressione atmosferica, ha densità $\rho = 960\,kg/m^3$ e modulo di compressibilità $K = 2\cdot 10^7\,Pa$. Determinare la minima profondità dell'acqua alla quale si deve immergere il corpo perché affondi spontaneamente. Considerare l'acqua come liquido incompressibile.

La variazione di pressione è legata alla variazione relativa di volume dalla relazione,

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V},$$

dove K è il modulo di compressibilità. Poiché

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho'},$$

dove ρ' è la densità assunta dal corpo a causa della compressione, si ottiene

$$\Delta p = K\frac{\Delta \rho}{\rho'}, \quad \Rightarrow \quad \rho_a g h = K\frac{\rho' - \rho}{\rho'},$$

in cui ρ_a è la densità dell'acqua. Pertanto la profondità minima alla quale bisogna immergere il corpo viene determinata quando quest'ultimo assume la densità dell'acqua:

$$\rho_a g h_m = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a}, \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{K}{\rho_a g}\frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} = 81,63\,m$$

In queste condizioni il corpo è in equilibrio; appena più in basso di h_m esso affonda.

9. Un'asta di legno uniforme di lunghezza l e massa $m = 0,3\,kg$ è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un estremo, disposto ad un'altezza $l/2$ sopra la superficie libera dell'acqua contenuta in un grande recipiente. Sapendo che la densità del legno è $\rho = 600\,kg/m^3$, determinare la reazione vincolare sull'asse quando l'asta è in posizione d'equilibrio.

La reazione è
$$R = mg - S,$$
dove S è la spinta d'Archimede. Detta A la sezione dell'asta, ρ_a la densità dell'acqua ed l_{im} la lunghezza immersa dell'asta, si ha

$$R = \rho Alg - \rho_a Al_{im}g = Alg\left(\rho - \frac{l_{im}}{l}\rho_a\right) = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right).$$

La posizione verticale dell'asta non è di equilibrio stabile, in quanto il suo baricentro è sopra il centro di spinta. In questa posizione ($l_{im} = l/2$), risulta:

$$R_1 = mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 0,5\,N.$$

Poiché l'asta è vincolata a ruotare, posizioni di equilibrio stabili sono quelle simmetriche rispetto alla verticale, con un angolo d'inclinazione θ, per il quale la somma dei momenti della forza peso e della spinta, rispetto all'asse di rotazione, è nulla; ossia:

$$\rho Alg\frac{l}{2}\sin\theta = \rho_a Al_{im}g\left(l - \frac{l_{im}}{2}\right)\sin\theta.$$

Si trae:
$$\rho l^2 = 2\rho_a l l_{im} - \rho_a l_{im}^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l_{im}}{l}\right)^2 - 2\frac{l_{im}}{l} + \frac{\rho}{\rho_a} = 0.$$

Risolvendo questa equazione si trova:

$$\frac{l_{im}}{l} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_a}} = 1 \pm 0,63.$$

Scartando il segno positivo si ottiene,

$$\frac{l_{im}}{l} = 0,37.$$

pertanto la reazione vale:

$$R = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 1,13\,N.$$