

**PROVA SCRITTA DI ANALISI 1 DELL'11.06.2020**

**GLI ESERCIZI 1 E 2 SONO OBBLIGATORI. LO STUDENTE PUÒ SCEGLIERE DUE FRA I RIMANENTI 3 ESERCIZI.**

**Esercizio 1 (10 PUNTI)**

Stabilire per quale valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2} - 1 - \alpha x^2}{x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

risulti continua in  $x = 0$ .

In corrispondenza di tale valore di  $\alpha$ , stabilire se  $f$  sia anche derivabile in  $x = 0$  e se ammetta asintoti.

**Esercizio 2 (10 PUNTI)**

Stabilire se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'(x) + 1 = e^{y(x)} \\ y(1) = \ln 2 \end{cases}.$$

ammetta esistenza e unicità della soluzione. La soluzione è locale o globale? Perché?

In seguito, risolvere esplicitamente il problema di Cauchy.

**Esercizio 3 (7 PUNTI)**

Risolvere la seguente equazione

$$z^2 + \bar{z}^2 + 2|z|^2 + i(z - \bar{z}) + 2z = -i, \quad z \in \mathbf{C}.$$

**Esercizio 4 (7 PUNTI)**

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n}.$$

Dedurre il carattere della successione  $a_n = \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n}$ .

**Esercizio 5 (7 PUNTI)**

Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)} dx .$$