SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI MAT. 2 del 30/6/2017 (A, 1)

TURNO MATTUTINO

1) Le ϕ_n sono dispari. Sono positive per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Basterà studiarle in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, dove $|\phi_n| = \phi_n$. Per $n > 1$ ϕ_n è definita, continua e limitata in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\phi_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{n(1+x^{2n})} \leq \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Convergenza puntuale $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} |\phi_n - \phi| = \sup |\phi_n| = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)} \phi_n \leq$$

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{x}{n} = \frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Convergenza uniforme su tutto $\phi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Serie: in $[-1, 1]$, $1 + x^{2n} \leq 2$

$$\Rightarrow |\phi_n| \sim \frac{\left|tg\left(\frac{x}{n}\right)\right|}{2} \geq \frac{|x|}{2n}$$

Per $x = 0$ A_2

$\phi_n(0) = 0 \Rightarrow$ la serie converge a 0.

Per $x \in (0, 1]$ (ma analogamente per $x \in [-1, 0)$),

$$\sum |\phi_n| = \sum \phi_n \geq \frac{x}{2} \sum \frac{1}{n} \nearrow +\infty$$

Quindi convergenza assoluta e semplice solo in $x = 0$.
Ovviamente non ha senso parlare di convergenza totale.

2) $$|f(x,y)| \sim \left| \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^5}{x^2 + y^4} \right| + \left| \frac{y^5}{x^2 + y^4} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^5}{x^2} \right| + \left| \frac{y^5}{y^4} \right| = |x^3| + |y| \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0$$

$f(x,y)$ è continua in $(0,0)$.

A_3

$$\frac{df}{d\vec{r}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\left[t^5(\alpha^5+\beta^5)\right]}{t^3\left[\alpha^2+t^2\beta^4\right]}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^5(\alpha^5+\beta^5)}{t^3(\alpha^2+t^2\beta^4)}$$

$$= (\alpha^5+\beta^5) \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{\alpha^2+t^2\beta^4} = \frac{0}{\alpha^2}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha \neq 0$$

Per $\alpha = 0$ $\cancel{\left(\frac{df}{d\vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$

$$\frac{df}{d\vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{\sin(k^5)}{k^4 \cdot k} = 1$$

mentre $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

Poichè $\dfrac{df}{d\vec{r}}(0,0) \neq \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$= 1$

$\Rightarrow f$ NON è differenziabile.

3) $$f(x,y)=\frac{e^{x-y}}{x-y}-1$$

A

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{e^{x-y}(x-y)-e^{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{e^{x-y}}{(x-y)^2}(x-y-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-e^{x-y}(x-y)+e^{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{e^{x-y}}{(x-y)^2}(1-x+y)$$

$$\vec{\nabla}f=\vec{0} \iff y=x-1.$$

Infiniti punti stazionari.

Ponendo $x-y=t$ si ha

$$f(t)=\frac{e^t}{t}-1$$

Si osservi che

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=+\infty \quad ; \quad \lim_{t\to 0^-} f(t)=-\infty$$

$\Rightarrow$ f è ILLIMITATA SUP. e INF.

A_5

Per i MAX. e MIN. locali:

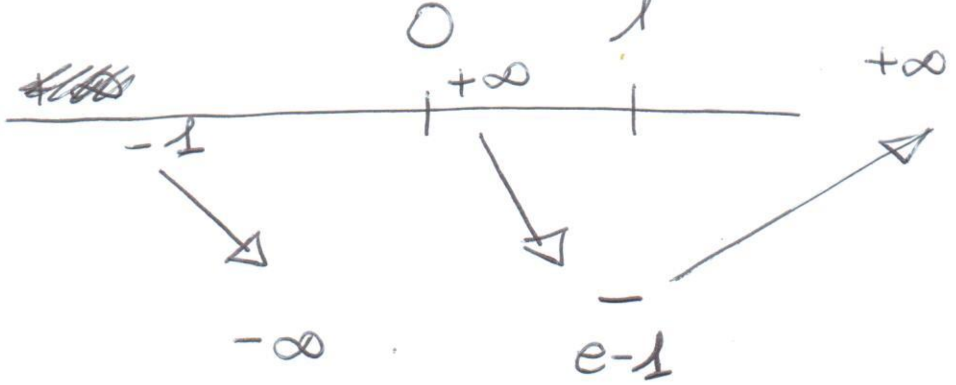
$$f(y=x-1) = \frac{e^{x-(x-1)}}{x-x+1} - 1 = e-1$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{e^t t - e^t}{t^2} = \frac{e^t(t-1)}{t^2} = 0$$

$$\iff t=1 \iff y=x-1$$

$$\frac{df}{dt}>0 \iff t>1 \iff y>x-1$$

Quindi:



(Si osservi che

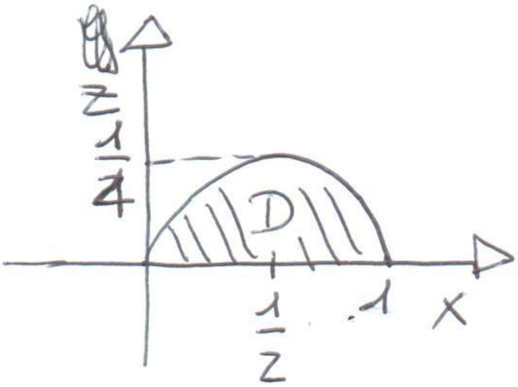
$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} - 1 = -1$$

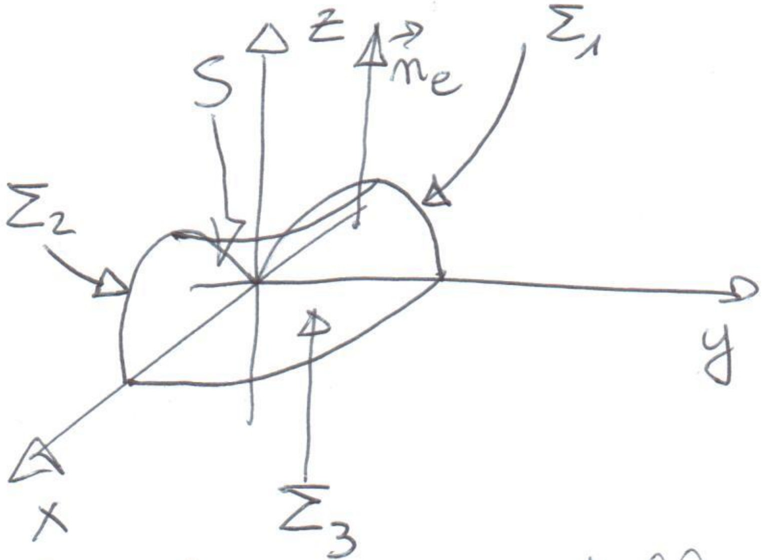
$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} - 1 = +\infty$$)

I punti $y=x-1$ sono tutti di MINIMO RELATIVO.

A_6

4)





Con il Teorema della Divergenza:

Su Σ_1: $\vec{n}_e = (-1, 0, 0)$; $\vec{F} = (0, 0, z)$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0$$

Su Σ_2: $\vec{n}_e = (0, -1, 0)$; $\vec{F} = (0, 0, z)$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0$$

Su Σ_3: $\vec{n}_e = (0, 0, -1)$; $\vec{F} = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0 .$$

A7

$$\iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial E} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS$$

$$= \int_{S\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS$$

$$= \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS = \iiint_E \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \mathrm{vol}\,E =$$

(Teorema di Guldino) $= \frac{\pi}{2}\,\text{Area}\,D\cdot x_B$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\text{Area}\,D$$

$$= \pi\int_0^1 (-t^2+t)\,dt = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{24}\pi.$$

Altrimenti, calcolando direttamente il flusso

A_8

$$S: \begin{cases} x(t,\vartheta) = t\cos\vartheta \\ y(t,\vartheta) = t\sin\vartheta \\ z(t,\vartheta) = -t^2+t \end{cases} \qquad t\in[0,1] \quad \vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & -2t+1 \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L = (2t^2-t)\cos\vartheta \\ M = (2t^2-t)\sin\vartheta \\ N = t \end{cases}$$

La componente z di $\vec{n}_e$ deve essere sempre positiva $\Rightarrow \vec{n}_e = \left((2t^2-t)\cos\vartheta, (2t^2-t)\sin\vartheta, t\right)$.

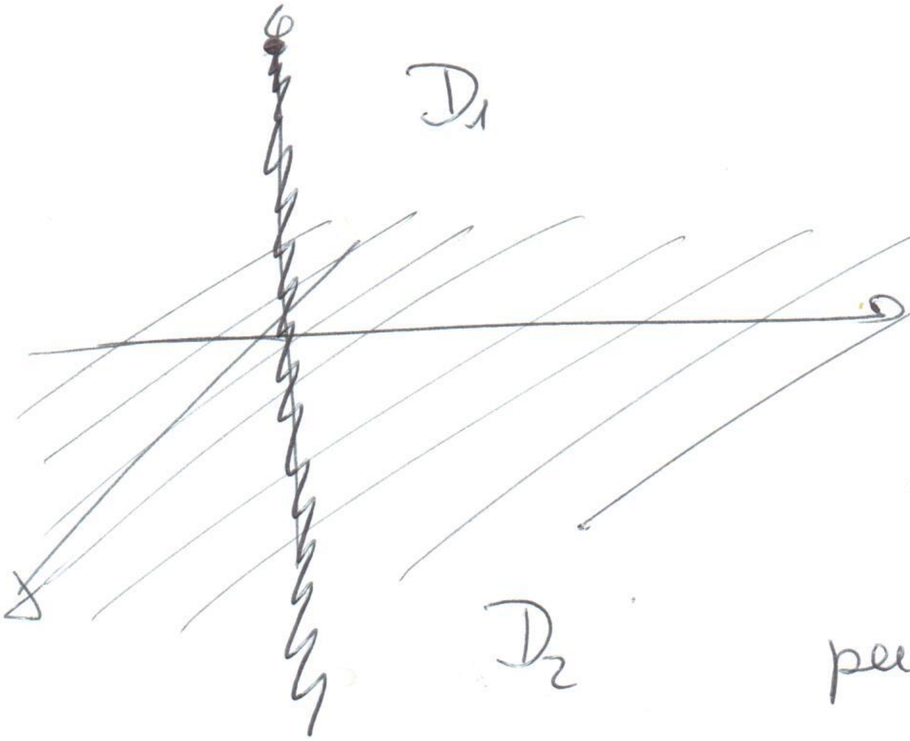
$$\vec{F}\cdot\vec{n}_e(t,\vartheta) = t(-t^2+t) = -t^3+t^2$$

$$\Rightarrow \Phi_S(\vec{F}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 (-t^3+t^2)\,dt$$

A9

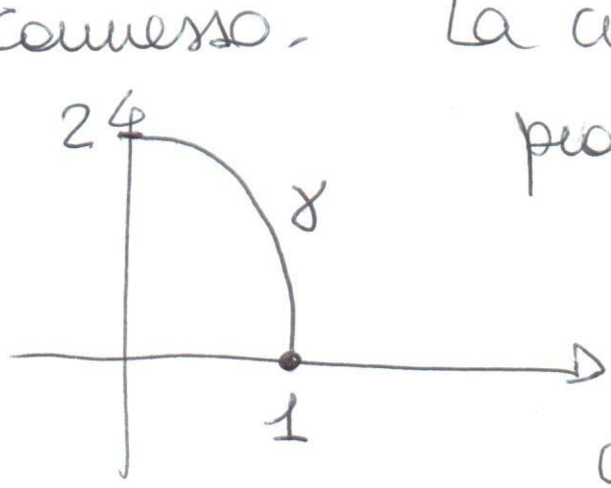
$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{24}.$$

5) la forma NON è definita per $x^2+y^2=0$, cioè lungo l'asse z ($x=0$; $y=0$) e per $z=0$, cioè sul piano $z=0$



Il dominio non è connesso. Ci poniamo nella componente D_1 ($z>0$), perché $\gamma \subseteq D_1$.

D_1 non è semplicemente linearmente connesso. La curva γ, posta sul



piano $z=1$, è un quarto di ellisse. Se la forma è chiusa, è anche localmente esatta

In effetti,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$ localmente esatta.

Inoltre $\omega(x,y,z) = \varphi(x,y) + \psi(z)$

$$\Rightarrow V(x,y,z) = V_1(x,y) + V_2(z)$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + 3z^{\frac{1}{3}} + \cancel{C}$$

$\cancel{\int_\gamma \omega = V(}$ $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,2,1)$

$P(0) = (1,0,1)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = V(0,2,1) - V(1,0,1)$$

$$= \log 2 + 3 - 3 = \log 2.$$

A10

Altrimenti, calcolando l'integrale indipendentemente dalla chiusura della forma:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos t}{\cos^2 t + 4\sin^2 t}(-\sin t) + \frac{4\sin t \cos t}{\cos^2 t + 4\sin^2 t} + 1 \cdot 0 \right] dt$$

A_{11}

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin t}{1 + 3\sin^2 t} \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(1 + 3\sin^2 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\log(4) = \log 2 .$$