

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Esercizio 1

Risolvi le seguenti disequazioni di I grado parametriche e non

1.

$$x(x - 2) > (x - 1)^2 + 2$$

2.

$$\frac{x}{3 - \sqrt{5}} + \frac{2 - x}{3 + \sqrt{5}} + 1 > -\frac{2\sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}$$

3.

$$4x(1 + \sqrt{3}) > \frac{x + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

4.

$$3x(1 - \sqrt{2}) > -\sqrt{2}$$

5.

$$x^2 + 1 + \sqrt{3}(x + \sqrt{2}) - \sqrt{2}(x + \sqrt{3}) < -\sqrt{3}x + (x + \sqrt{3})^2$$

6.

$$(a - 1)(x - 1) - (x - 2)(a + 1) > ax$$

7.

$$\frac{2x - a}{3a} - 1 > \frac{x}{6} - \frac{x - a}{2a}$$

Esercizio 2

Rappresentare graficamente la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ -2x - 2 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ -2 & \text{se } 0 < x < 3 \\ \sqrt{2}(x - 3) - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Determinare il campo di esistenza di $f(x)$

- b) Dire se la funzione $f(x)$ è iniettiva, suriettiva (se no, modificare l'insieme di arrivo di f in modo da renderla tale), biiettiva, crescente e decrescente (in quali intervalli?).
- c) Calcolare l'area del trapezio contenuto in $y \leq 0$ e delimitato dall'asse x.
- d) Rappresentare graficamente $f(x - 1)$, $f(x) - 1$, $|f(x)|$, $|f(x) + 2|$, $f(\frac{x}{2})$, $f(2x)$ e $2f(x)$. Cosa accade al grafico in questi ultimi due casi?

Esercizio 3

Risolvi le seguenti equazioni/ disequazioni letterali e non

1.

$$\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{2x+1}{x}\right) + 3 = 0$$

2.

$$x^2 + 2x - 2 = \frac{3}{x^2 + 2x}$$

3.

$$\frac{4(x^2 - 9)}{x^2 - 1} + \frac{8}{x^4 - x^2} = \frac{1}{x^2}$$

4.

$$\frac{2x - (3 + x^2)}{2} < \frac{7 - x^2}{4}$$

5.

$$x(\sqrt{3}x + 1) + x^2 + \sqrt{3}(x - 1) > \sqrt{3} + x(x + \sqrt{3})$$

6.

$$x - 2\sqrt{3} \leq \frac{1 - 4\sqrt{3}}{x + 2\sqrt{3}}$$

7.

$$\frac{2x + 5}{1 - 4x^2} - \frac{x + 2}{4x^2 - 4x + 1} \leq \frac{3}{2x + 1}$$

8.

$$2a(x - 1)^2 - x(1 - 4a) - 2a \leq 0$$

9.

$$\frac{x + 2k - 3}{x + 3} + \frac{x + 3}{x - 3} + \frac{6}{3 - x} < 0$$

Esercizio 4

Dopo aver verificato che le soluzioni dell'equazione $(k-2)x^2 - 2kx + k + 2 = 0$ sono reali per ogni k reale, determinare il parametro k affinché esse siano discordi.

Esercizio 5

Risolvi le disequazioni seguenti

1.

$$\frac{2x}{3x-1} - \frac{3-x^2}{9x^2-6x+1} < 1$$

2.

$$\frac{2x+5}{1-4x^2} - \frac{x+2}{4x^2-4x+1} \leq \frac{3}{2x+1}$$

3.

$$\frac{(x+1)^2 - (x-3)^2}{3} > \frac{(x+2)^2}{2} - x$$

4.

$$2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 3 > 0$$

5. a.

$$x^4 - 12x^2 + 32 < 0$$

b.

$$x^3 - 8 \geq 0$$

6.

$$\frac{x^2-2}{x^3-2x^2+4x-8} + \frac{x+2}{x^2+4} > \frac{1}{x-2}$$

7.

$$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} + \frac{x+2}{x+4} \geq \frac{x-2}{x^2+4x}$$

Esercizio 6

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni letterali e non

1.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x^3 - 2x^2 - \sqrt{2}x + 2 > 0 \\ (x^2 - 3\sqrt{2}x + 4)(x - 3) > 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 > 0 \\ \frac{x-2}{x-3} - \frac{5x+1}{x-2} - \frac{3x^2-2x-14}{-x^2+5x-6} \leq 0 \\ \frac{x}{x^2-x} > \frac{x^3}{x^2-x} \\ \frac{(x-2)(x^3-3x+2)}{x^4+x^3-x-1} \leq 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{x}{a-1} - \frac{5a}{a+1} > \frac{2x}{a^2-1} \\ (x-2a)(x+3a) < x^2 + 4a^2 \end{cases}$$

Esercizio 7

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni contenenti moduli

1.

$$(1 + |x|)^2 + x - 3 = x^2$$

2.

$$|x-1| + |x^2-x| - x^2 + 2x - 1 = 0$$

3.

$$\left| \frac{x^2-4}{2x+1} \right| > 1$$

4.

$$\left| \frac{2x+5}{4x-2} - \frac{x-1}{1-2x} \right| \leq \frac{2}{3}$$

5.

$$3 + |(x+4)(x-1)| > 2x - |x-1|$$

6.

$$\frac{2|x^2-3x+2| - x}{|x^2+x|} > 3$$

Esercizio 8 Tracciare il grafico delle seguenti tre curve di equazioni

$$y = \frac{x^3 - 8}{|2 - x|}, \quad y = \frac{x^3 - 4x + 3x^2 - 12}{|x + 3|}, \quad y = -\sqrt{2 - |x|}.$$