SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 9/4/2018

1) $k(t) = \dfrac{\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\|}{v^3(t)}$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 - [\cosh^2 t + \sinh^2 t] = 1 - \cosh(2t) \\ y'(t) = 2\sinh t \end{cases}$$

$$\vec{r}\,''(t) = \begin{cases} x''(t) = -[4\sinh t \cosh t] = -2\sinh(2t) \\ y''(t) = 2\cosh t \end{cases}$$

$$v(t) = \cancel{\cosh t \sqrt{[1-(\cosh^2 t + \sinh^2 t)}}$$
$$= \sqrt{[1-\cosh(2t)]^2 + 4\sinh^2 t}$$

$$\|\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)\| = \left|[x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)]\right|$$
$$= \left|[1-\cosh 2t]\, 2\cosh t + 4\sinh(2t)\cdot \sinh t\right|$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\left|[1-\cosh(2t)]\, 2\cosh t + 4\sinh(2t)\sinh t\right|}{\left([1-\cosh(2t)]^2 + 4\sinh^2 t\right)^{3/2}}$$

(1bis)

L'espressione di $k(t)$ può essere semplificata (passaggi non richiesti, comunque)

$$\begin{cases} \cosh(2t) = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t \\ \operatorname{senh}(2t) = 2\cosh t \operatorname{senh} t \end{cases}$$

inoltre $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$

$$\Rightarrow \cosh(2t) = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t = 1 + 2\operatorname{senh}^2 t$$

e $\quad 1 - \cosh 2t = -2\operatorname{senh}^2 t$

$$k(t) = \frac{\left|-4\operatorname{senh}^2 t \cosh t + 8\operatorname{senh}^2 t \cosh t\right|}{\left[\left(2\operatorname{senh}^2 t\right)^2 + 4\operatorname{senh}^2 t\right]^{3/2}}$$

(si ricordi che $t \geq 0 \Rightarrow \operatorname{senh}(t) \geq 0$)

$$\Rightarrow k(t) = \frac{4\operatorname{senh}^2 t \cosh t}{8\operatorname{senh}^3 t \left[\operatorname{senh}^2 t + 1\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\cosh t}{2\operatorname{senh} t \left[\cosh^2 t\right]^{3/2}} = \frac{1}{2\operatorname{senh} t \cosh^2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Altrimenti:
Si ricordi che

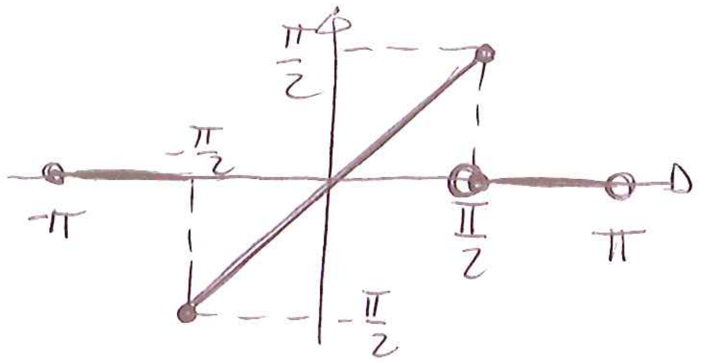
$$\cosh t \underset{t\to+\infty}{\sim} \sinh t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2}$$

$$\Rightarrow k(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\left|e^t\left(-\frac{e^{2t}}{2}\right)+\cancel{4}\frac{e^{2t}}{\cancel{2}}\cdot\frac{e^t}{\cancel{2}}\right|}{\left(\frac{e^{4t}}{4}\right)^{3/2}}$$ (2)

$$= \frac{e^{3t}\,8}{2\,e^{6t}} = \frac{4}{e^{3t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

2)

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \end{cases}$$



f DISPARI

$\Rightarrow a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\text{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos(kx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\cos(kx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2}\operatorname{sen}(kx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= -\frac{1}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi k^2}\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

La serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

la serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso del tipo $\left[-\pi+\varepsilon, -\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$; $\left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon; \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$; $\left[\frac{\pi}{2}+\varepsilon; \pi-\varepsilon\right]$ e i corrispettivi ottenuti per prolungamento periodico

Si osservi che

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ (-1)^m & \text{se } k = 2m \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & \text{se } k = 2m+1 \\ 0 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\mathrm{sen}(kx)$$

dove

$$b_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{2n}\cos(n\pi) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n} & \text{se } k = 2n \\[2ex] \dfrac{2}{\pi(2n+1)^2}(-1)^n & \text{se } k = 2n+1 \end{cases}$$

Quando $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^n & \text{se } k = 2n+1 \\ 0 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{\pi(2n+1)^2}(-1)^n}_{b_{2n+1}} \cdot \underbrace{(-1)^n}_{\mathrm{sen}(\cancel{n}\pi)} = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

3) $f(x,y) = x\, e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}$ è omogenea di grado 1: 5

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x\, e^{\frac{\cancel{\alpha^2} xy}{\cancel{\alpha^2}(x^2+y^2)}} = \alpha f(x,y)$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$.

Però non è differenziabile in $(0,0)$.

Effettuando direttamente i conti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\rho\to 0} \left|\rho \cos\vartheta\, e^{\cos\vartheta \sin\vartheta}\right|$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \left|\cos\vartheta\, e^{\cos\vartheta \sin\vartheta}\right| \leq \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot e = 0$$

La prolungata è

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = x\, e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h e^0}{h} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

~~DERIVATE~~ DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h e^{\frac{hk}{h^2+k^2}} - 0 - h}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\, e^{\cos\theta\sin\theta} - \rho\cos\theta}{\rho} = \cos\theta\left[e^{\cos\theta\sin\theta} - 1\right]$$

$\nexists$

Non differenziabile.

~~Si osservi, anche se non richiesto, che nonostante la non differenziabilità, per f vale la regola del gradiente:~~

$$\cancel{\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t e^{\frac{t^2\alpha\beta}{t^2}}}{t} =}$$

$$1 + xy\left(\frac{2y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\frac{x^4+y^4+2x^2y^2+}{(x^2+y^2)^2}$$

Allo stesso conclusione saremmo potuti arrivare osservando che non vale la formula del gradiente:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha \cancel{t}\, e^{\frac{\cancel{t^2}\alpha\beta}{\cancel{t^2}}}}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} \alpha e^{\alpha\beta} = \underline{\underline{\alpha e^{\alpha\beta}}}$$

$$\neq \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \underline{\underline{\alpha}}.$$

In tutti gli altri punti di $\mathbb{R}^2$ f è C^∞, quindi differenziabile, derivabile lungo qualsiasi direzione, continua.

In particolare,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\left[1 + xy\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\right] =$$

$$\cancel{x^2\left[\frac{x^2+y^2-y(2y)}{1^2}\right] = x^2\left[x^2\right.}$$

6 bis

$$= e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} \left[1 + xy \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \right] \right]$$

9

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

4) $\begin{cases} f_x = 4x^3 - y^2 = 0 \\ f_y = 2y(1-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

HESSIANO: $f_{xx} = 12x^2$; $f_{xy} = f_{yx} = -2y$; $f_{yy} = 2(1-x)$

$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ nessuna informazione.

$H_f(1,\pm 2) = \begin{vmatrix} 12 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ punti di sella.

Studio di $(0,0)$. $f(0,0) = -9$

$\Rightarrow \Delta f = x^4 + (1-x)y^2$

Se $x \leq 1 \Rightarrow \Delta f \geq 0$. In particolare, in un opportuno intorno di $(0,0)$, $\Delta f \geq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ punto di MIN. REL.

N.B.: $f(x,0) = x^4 - 9 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$

f illimitata sup. mente

Consideriamo inoltre qualsiasi retta verticale a destra di $x=1$, ad esempio $x = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}, y\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)y^2 - 9$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 9\right] - \frac{1}{2}y^2 \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} -\infty$$

f illimitata anche inf. mente.

5) Applichiamo il Teorema del Rotore, tenendo conto che la superficie è il semiellissoide superiore e il suo bordo è $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{array}\right\}$

$$\Phi_S\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, F}\right) = \oint_{+BS} \vec{F} \cdot d\vec{P}$$

usando le coordinate ellittiche: $\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases}$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\sin\vartheta + \sin(2\cos\vartheta)\right)(-2\sin\vartheta)\right] d\vartheta$$

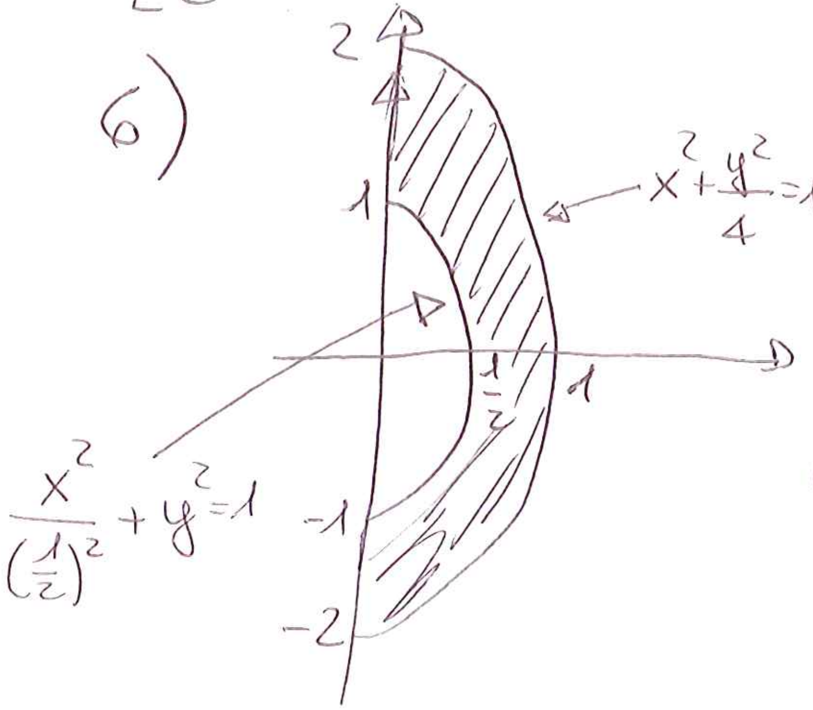
$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\sin^2\vartheta\right] d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sin(2\cos\vartheta)\, d(2\cos\vartheta)$$

$$\left[-2\sin^2\vartheta = \cos 2\vartheta - 1\right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\cos 2\vartheta - 1\right] d\vartheta + \cos(2\cos\vartheta)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2\vartheta - \vartheta\right]_0^{2\pi} + \cancel{\cos(2)} - \cancel{\cos(2)} = -2\pi$$

6)



Si tratta di una corona ellittica. Usiamo pertanto coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho^2 \le 4 \\ \frac{1}{2}\rho\cos\vartheta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\boxed{J = ab\rho = \frac{1}{2}\rho}$$

come chiaramente visibile in figura.

Si osservi che

$$\frac{e^{x^2} y}{4x^2+y^2}$$

è (anti) simmetrica rispetto all'asse x. Pertanto il suo integrale su un dominio simmetrico rispetto all'asse x è NULLO.

Per la simmetria di $\frac{x}{4x^2+y^2}$ rispetto all'asse x, possiamo inoltre scrivere (10)

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \frac{x}{4x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}\cancel{\rho}\cos\vartheta}{\cancel{\rho^2}}\,\frac{1}{2}\cancel{\rho}\,d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$