Corso di Analisi Matematica 1 - Dr. Alberto Maria BERSANI
NOTE AGGIUNTIVE SULL'ARGOMENTO DI UN NUMERO COMPLESSO

Ricordiamo che nella coppia di coordinate polari (o trigonometriche) legate ai numeri complessi $z = x+iy$ (o, più in generale, ai punti del piano)

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0) \ ,$$

ρ rappresenta $|z|$, cioè la distanza del punto $P \equiv (x,y)$ dall'origine, mentre θ rappresenta l'angolo formato con l'asse delle x positive dal vettore congiungente l'origine con P .

Può essere utile determinare la trasformazione inversa, che lega le coordinate polari a quelle cartesiane (x,y), limitando però la variabilità di ρ e di θ, al fine di garantire la biunivocità, ad esempio nel seguente modo:

$$(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times (-\pi,\pi]$$

(ma potremmo prendere anche altri intervalli per θ, come ad esempio $[0,2\pi)$).

L'angolo $\theta \in (-\pi,\pi]$ prende il nome di argomento principale di z ($Arg(z)$). Tutti gli altri argomenti di z si ottengono aggiungendo all'argomento principale un multiplo di un angolo giro:

$$arg(z) = Arg(z) + 2k\pi \qquad , \qquad k \in \mathbf{Z} \ .$$

Dalla (1) e dalla definizione di ρ si ha facilmente

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \ .$$

Se però vogliamo ricavare $\theta = \theta(x,y)$, dobbiamo porre la massima attenzione.

Ricordando la definizione di θ, si ha subito che, per un generico numero immaginario $z = iy$,

$$Arg(iy) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad y > 0 \\ \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se} \quad y < 0 \end{cases} \ .$$

Si osservi che i numeri $z = iy$ sono caratterizzati dall'avere $x = Re(z) = 0$. Per tutti gli altri numeri possiamo dividere ambo i membri delle (1), ottenendo

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta) \ .$$

Purtroppo, vi è l'abitudine, da parte di molti studenti (ma anche di alcuni libri di testo!) di ricavare θ tramite la funzione inversa della tangente, cioè l'arcotangente, scrivendo

$$(2) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \forall \theta \in (-\pi,\pi]$$

senza ricordare che

a) $\tan(\theta)$ è invertibile solo nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; quindi la (2) è valida solo per $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, cioè solo per $x > 0$

b) la (2), in ogni caso, non è valida per $x = 0$.

Per $x < 0$, cioè nel II e III quadrante, qual è la relazione corretta? Ricordiamoci che $\tan(\theta)$ è π-periodica. Pertanto i valori assunti da $\tan(\theta)$ nel II (rispettivamente III) quadrante coincidono con i valori da essa assunti nel IV (risp. I) quadrante. Per i numeri z appartenenti al II quadrante, $Arg(z) \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, mentre per quelli del III quadrante $Arg(z) \in \left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

Pertanto per i numeri del II quadrante sarà necessario e sufficiente <u>*aggiungere*</u> al valore (2) un angolo piatto, mentre per i numeri del III quadrante sarà necessario e sufficiente <u>*sottrarre*</u> al valore (2) un angolo piatto.

Da ciò

$$(3) \qquad Arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \quad \text{(I e IV quadrante)} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \ ; \ y > 0 \quad \text{(asse delle } y \text{ positive)} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \ ; \ y < 0 \quad \text{(asse delle } y \text{ negative)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \ ; \ y > 0 \quad \text{(II quadrante)} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0 \ ; \ y < 0 \quad \text{(III quadrante)} \end{cases}$$

Si osservi che, per numeri appartenenti al II quadrante ($x < 0 \ ; \ y > 0$),

$$\lim_{x \to 0^-} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi\right] = \arctan\left(\frac{y}{0^-}\right) + \pi = \arctan(-\infty) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

(dove abbiamo usato i comodi simboli della retta ampliata, sottintendenti l'operazione di limite).

D'altra parte, per numeri appartenenti al III quadrante ($x < 0 \ ; \ y < 0$),

$$\lim_{x \to 0^-} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi\right] = \arctan\left(\frac{y}{0^-}\right) - \pi = \arctan(+\infty) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

Da ciò segue che, come dovremmo naturalmente aspettarci, $Arg(z)$ assume <u>*con continuità*</u> tutti i valori nell'intervallo $(-\pi, \pi]$.

Il valore $Arg(z) = \pi$ viene, come noto, assunto da tutti i punti corrispondenti ai numeri reali negativi: se $z = x \ ; \ x < 0$ allora

$$Arg(z) = Arg(x) = \pi \ .$$

Esempio di corretta determinazione di $Arg(z)$: al numero complesso $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ corrisponde il punto di coordinate $\left(-\frac{1}{2} \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, situato nel II quadrante. Pertanto $Arg(z) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Poiché $\rho = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, allora

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

abbiamo $\theta = \frac{2\pi}{3}$; pertanto in coordinate trigonometriche abbiamo $\rho = 1$ e $\theta = Arg(z) = \frac{2\pi}{3}$, da cui

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Se ci affidassimo alla (2), avremmo

$$Arg(z) = \arctan\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) / \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \ ,$$

che, ovviamente, è errato.

Affidandoci invece alla (3), avremo

$$Arg(z) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

che è il valore corretto.