SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 dell'11/2/2015

$\boxed{\text{COMPITO C}}$

1) f è definita per $1-|e^x-1|\geq 0$

$\Leftrightarrow \; |e^x-1|\leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1\leq e^x-1\leq 1$

$\Leftrightarrow \; 0\leq e^x\leq 2 \;\Leftrightarrow\; x\leq \log 2$

$\Rightarrow \; D=(-\infty, \log 2]$.

f è composta di funzioni continue $\Rightarrow f\in C^0(D)$.

$f(\log 2)=0$

$f(x)>0 \quad \forall x\in(-\infty,\log 2)$.

$x=\log 2$ MINIMO ASSOLUTO.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(e^x-1)} & \text{se } e^x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 0\\ \sqrt{1+(e^x-1)} & \text{se } e^x-1<0 \Rightarrow x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2-e^x} & \text{se } \cancel{e^x\geq 0}\ \ 0\leq x\leq \log 2\\ e^{x/2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-e^x}{2\sqrt{2-e^x}}<0 & \text{per } \cancel{x\geq 0}\ \ 0<x<\log 2\\ \dfrac{1}{2}e^{x/2}>0 & \text{per } x<0\end{cases}$$

f cresce in $(-\infty, 0)$ e decresce in 2c
$(0, \log 2]$.

Essendo f continua $\Rightarrow$ $x=0$ è punto di MAX. ASS.

$\cancel{f(\log 2) =}\ f(0) = 1$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

~~ANCHE~~ $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $x=0$ PUNTO ANGOLOSO.

ANCHE SE NON RICHIESTO, completiamo il grafico.

$$\cancel{f''(x) = \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{2-e^x}} e^x < 0 \quad \text{per } x > 0 \right.}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\dfrac{e^x\sqrt{2-e^x} + \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{2-e^x}}}{(2-e^x)}\right] & \text{per } \cancel{x>0}\ 0 < x < \log 2 \\ \frac{1}{4} e^{x/2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

③

$$= \begin{cases} -\frac{1}{4}\left[\frac{2e^x(2-e^x)+e^{2x}}{(2-e^x)^{3/2}}\right] & \text{per } \cancel{x>0} \; 0<x<\log 2 \\ \frac{1}{4}e^{x/2} & \text{per } x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{e^x}{4}\left[\frac{4-e^x}{(2-e^x)^{3/2}}\right] & \text{per } \cancel{x>0} \; 0<x<\log 2 \\ \frac{1}{4}e^{x/2}>0 & \text{per } x<0 \end{cases}$$

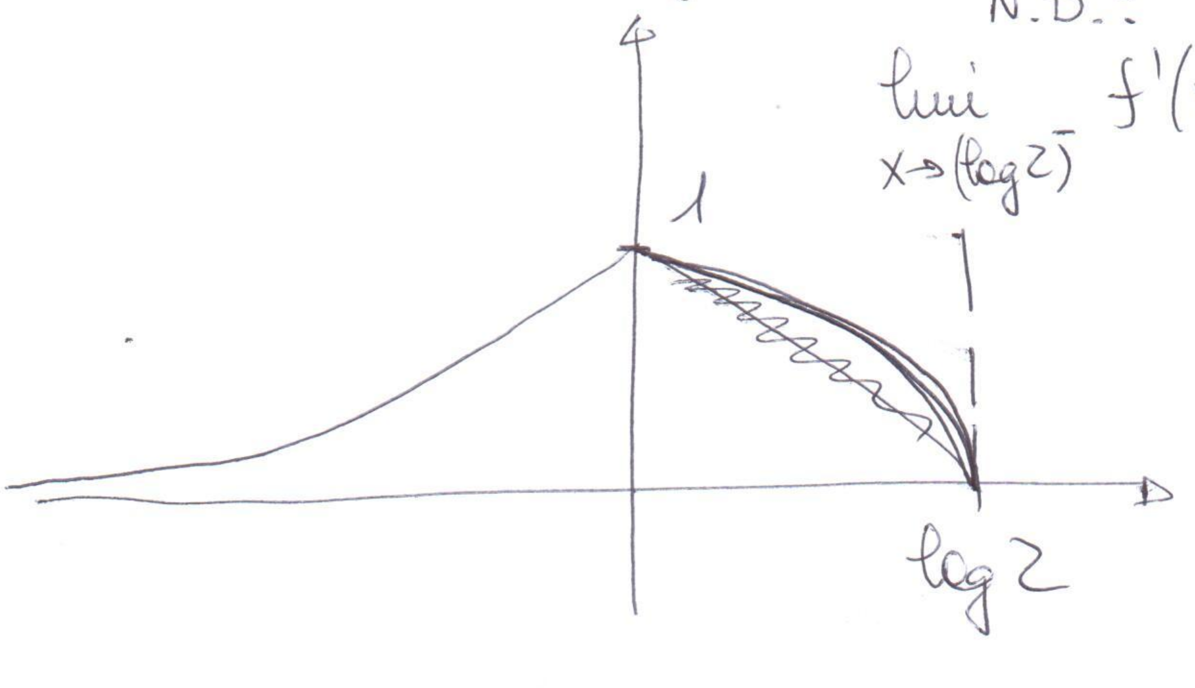
Per $x>0$ $\quad f''(x)>0 \iff e^x>4$

$\iff \cancel{\log} \; x>\log 4 \notin D.$

$\Rightarrow$ f convessa in $(-\infty,0)$; concava in $(0,\log 2]$.

$x=0$ punto di flesso discendente.

N.B.: $\lim_{x\to(\log 2)^-} f'(x)=\frac{-1}{2\cdot 0^+}=-\infty$



2) $(x+iy)^2 - 2i(x-iy) - 5 = 0$ 4

$$x^2 - y^2 + 2ixy - 2ix - 2y - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2y + 5 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 1 + 2 + 5 \end{cases}$$

$\Delta < 0$

$\nexists$ sol. reali

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = \sqrt{8} + i \\ z_2 = \sqrt{8} - i \end{array}$$

Non si può applicare il Teorema Fondamentale dell'Algebra perché l'equazione NON è algebrica, non essendo il termine a primo membro un polinomio in z, ma un'espressione in z e $\overline{z}$.

3) $-\underbrace{\left[1-e^{\frac{1}{n}}\right]}_{\wedge\atop 0}\log(n) = \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\log n > 0$

5c

Serie a termini positivi

$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\log n > \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n} \nearrow +\infty$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto, la serie diverge.

4) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{4x}}{e^{6x}} = \frac{1}{e^{2x}}$ integrabile a $+\infty$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ è integrabile in $[0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{4x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx =$$

$e^{2x}=t \quad dt = 2e^{2x}dx \quad t(0)=1 \quad t(+\infty)=+\infty$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{(t+1)^3}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t+1)^3}\right]dt\right]$$

(allo stesso risultato si può arrivare col metodo dei fratti semplici:

$$\frac{t}{(t+1)^3} = \frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} \quad)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{2(t+1)^2}\right]_1^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right] = \frac{3}{16}.$$

5) ~~Scriviamo~~ Poniamo $z = y'$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 z' = z^2$$

$$\Rightarrow \quad z' = \frac{z^2}{2x^2}$$

(equazione a variabili separabili

$$A(x) = \frac{1}{2x^2} \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$$

$$B(z) = z^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \exists\, I(-1)$ in cui $\exists!$ sol. $z \in C^1(I(-1))$

(esistenza e unicità locale).

$z = 0$ sol. singolare. Non soddisfa il Problema di Cauchy.

Metodo di separazione delle variabili:

7c

$$\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{z} = \frac{-1}{2x} + C_1 \qquad ; \quad z(-1) = y'(-1) = 1$$

$$-1 = \frac{1}{2} + C_1 \implies C_1 = -\frac{3}{2}$$

$$z = \frac{1}{\frac{1}{2x} + \frac{3}{2}} = \frac{2x}{3x+1} = \frac{2}{3}\left[\frac{3x+1-1}{3x+1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{3x+1}\right] = y'(x)$$

$$y(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\log(|3x+1|) + C_2$$

Poichè $x_0 = -1 \Rightarrow$ si devono considerare

8c

$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}\log(-3x-1) + C_2$$

$$y(-1) = 1 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{9}\log 2 + C_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{C_2 = \frac{2}{9}\log 2 + \frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\log(-3x-1) + \frac{2}{9}\log 2 + \frac{5}{3}.$$