# COMPITO D



1)
$$a_n = -\underbrace{\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]}_{\leq 0} \log n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \log n > 0$$

La serie è a termini positivi.

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \log n > \frac{1}{2n}$$

e $\sum \frac{1}{2n} \nearrow +\infty$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto la serie diverge.

2)
$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{6x}}{e^{9x}} = \frac{1}{e^{3x}} \quad \text{integrabile a } +\infty.$$

$\Rightarrow f(x)$ integrabile in $[0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{6x}}{(e^{3x}+2)^3} dx =$$

$t = e^{3x}$; $dt = 3e^{3x} dx$; $t(0) = 1$; $t(+\infty) = +\infty$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t+2)^3} = \int_1^{+\infty} \left[\frac{t+2-2}{(t+2)^3}\right] dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{(t+2)^2} - \frac{2}{(t+2)^3}\right] dt$$

( si può arrivare allo stesso risultato col metodo dei fratti semplici:

$$\frac{t}{(t+2)^3} = \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{(t+2)^3}$$ )

$$= \left[-\frac{1}{(t+2)} + \frac{1}{(t+2)^2}\right]_1^{+\infty} = -\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right] = \frac{2}{9}$$

3) Poniamo $z = y'$

$\Rightarrow 6x^2 z' = z^2 \quad \Rightarrow$ in forma normale

$$z' = \frac{z^2}{6x^2}$$

Equazione a variabili separabili.

$A(x) = \dfrac{1}{6x^2} \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$

$B(z) = z^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \exists I(-1)$ in cui $\exists!$ sol. $z \in C^1(I(-1))$

$z=0$ sol. singolare ; non soddisfa (3D)
il problema di Cauchy.

Metodo di separazione delle variabili.

$$\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{6x} + C_1 \quad ; \quad z(-1) = y'(-1) = 1$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{1}{6} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{7}{6}} = \frac{6x}{1+7x} = \frac{6}{7}\left[1 - \frac{1}{7x+1}\right]$$

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \frac{6}{7}x - \frac{6}{49}\log(|7x+1|) + C_2$$

Poiché $x_0 = -1 \Rightarrow$ considero $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{7}\right)$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{6}{7}x - \frac{6}{49}\log(-7x-1) + C_2$$

$$y(-1) = 1 = -\frac{6}{7} - \frac{6}{49}\log(6) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{6}{49}\log(6) + \frac{13}{7}.$$

$$y(x) = \frac{6}{7}x - \frac{6}{49}\log(-7x-1) + \frac{6}{49}\log 6 + \frac{13}{7}.$$

4D

4) $f$ è definita per $2 - |e^x - 2| \geq 0$

$$\iff |e^x - 2| \leq 2 \iff -2 \leq e^x - 2 \leq 2$$

$$\iff x \leq \log 4$$

$D = (-\infty, \log 4]$. $f$ COMPOSTA DI FUNZIONI CONTINUE $\Rightarrow f \in C^0(D)$.

$f(\log 4) = 0$ ; $f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, \log 4)$

$\Rightarrow x = \log 4$ MINIMO ASSOLUTO.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - (e^x - 2)} & \text{se } e^x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \log 2 \\ \sqrt{2 - (2 - e^x)} & \text{se } e^x - 2 < 0 \Rightarrow x < \log 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{4 - e^x} & \text{se } \log 2 \leq x \leq \log 4 \\ e^{x/2} = \sqrt{e^x} & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^x}{2\sqrt{4 - e^x}} < 0 & \text{se } \log 2 < x < \log 4 \\ \dfrac{1}{2} e^{x/2} > 0 & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

f cresce in $(-\infty, \log 2)$ e decresce in $(\log 2, \log 4]$.

Poiché $f \in C^0(D)$, allora $x = \log 2$ è punto di MAX. ASSOLUTO

$$f(\log 2) = \sqrt{2}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \log 2^+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \to (\log 2)^-} f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ PUNTO ANGOLOSO in $x = \log 2$.

Inoltre, $\lim_{x \to (\log 4)^-} f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{0^+}} = -\infty.$

ANCHE SE NON RICHIESTO,

completiamo il grafico.

$$f(0) = 1$$

$6_D$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^x\sqrt{4-e^x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^x}}}{(4-e^x)}\right] & \log 2 < x < \log 4 \\ \dfrac{1}{4} e^{x/2} & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{e^x}{4(4-e^x)^{3/2}}\left[2(4-e^x)+e^x\right] & \text{se } \log 2 < x < \log 4 \\ \dfrac{1}{4} e^{x/2} & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{e^x}{4(4-e^x)^{3/2}}(8-e^x) & \text{se } \log 2 < x < \log 4 \\ \dfrac{1}{4} e^{x/2} > 0 & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

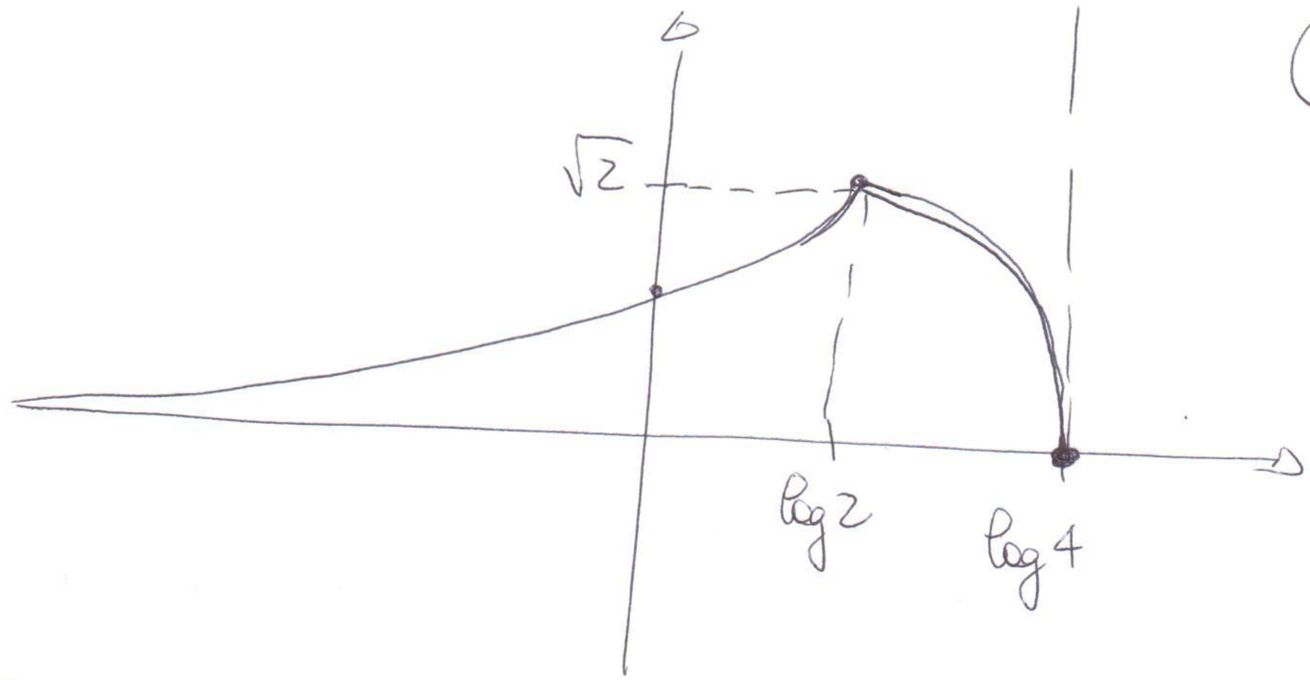
Per ~~a~~ $\log 2 < x < \log 4$

$f''(x) > 0 \iff e^x > 8 \iff x > \log 8$

non appartenente a D

$\Rightarrow f$ convessa in $(-\infty, \log 2)$; concava in $(\log 2, \log 4]$.

$x = \log 2$ punto di flesso discendente.




5)

$$(x+iy)^2-6(x-iy)+5=0$$

$$x^2-y^2+2ixy-6x+6iy+5=0$$

$$\begin{cases} x^2-y^2-6x+5=0 \\ y(x+3)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-3 \\ y^2=9+18+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}= \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-3 \\ y=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$8_D$

$z_1 = 5$ ; $z_2 = 1$ ; $z_3 = -3 + 4\sqrt{2}\,i$ ;

$$z_4 = -3 - 4\sqrt{2}\,i.$$

Il risultato NON contraddice il Teorema Fondamentale dell'Algebra perché l'equazione NON è algebrica, in quanto il primo membro NON è un polinomio in $z$, ma un'espressione in $z$ e $\bar{z}$.