COMPITO D

D1

1) $\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \arcsin(x^2) \neq 0 \\ -1 \leq x^2 \leq 1 \quad \leftarrow \text{arcoseno} \\ 1 - x^2 > 0 \quad \leftarrow \text{logaritmo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \leq 1 \\ x^2 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

$$\frac{\log(1-x^2) + x \sin x}{x^2 \arcsin(x^2)} = \frac{-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]}{x^2(x^2 + o(x^2))}$$

$$= \frac{x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \sim \frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = -\frac{2}{3} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{2}{3}$$

2) È sufficiente studiare la funzione

$$g(x) = e^{-x}(x-2)$$

per poi studiarne il modulo.

$D = \mathbb{R}$

$g(0) = -2 \quad ; \quad g(x) = 0 \iff x = 2$

$g(x) > 0 \iff x > 2 \; ; \; g(x) < 0 \iff x < 2.$

D2

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$; AS. ORIZZONTALE $y=0$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; andamento superlineare $\Rightarrow \nexists$ AS. OBLIQUO.

$g'(x) = e^{-x}(3-x) = 0 \iff x = 3$

$g'(x) > 0 \iff x < 3$ (g crescente)

$g'(x) < 0 \iff x > 3$ (g decrescente)

$x = 3$ punto di MAX. REL.

$\cancel{g''(x)}$

$f(3) = e^{-3}$

$g''(x) = e^{-x}(x-4) = 0 \iff x = 4$

$g''(x) > 0 \iff x > 4$ (convessa)

$g''(x) < 0 \iff x < 4$ (concava)

$x = 4$ punto di flesso.

Grafico di g:

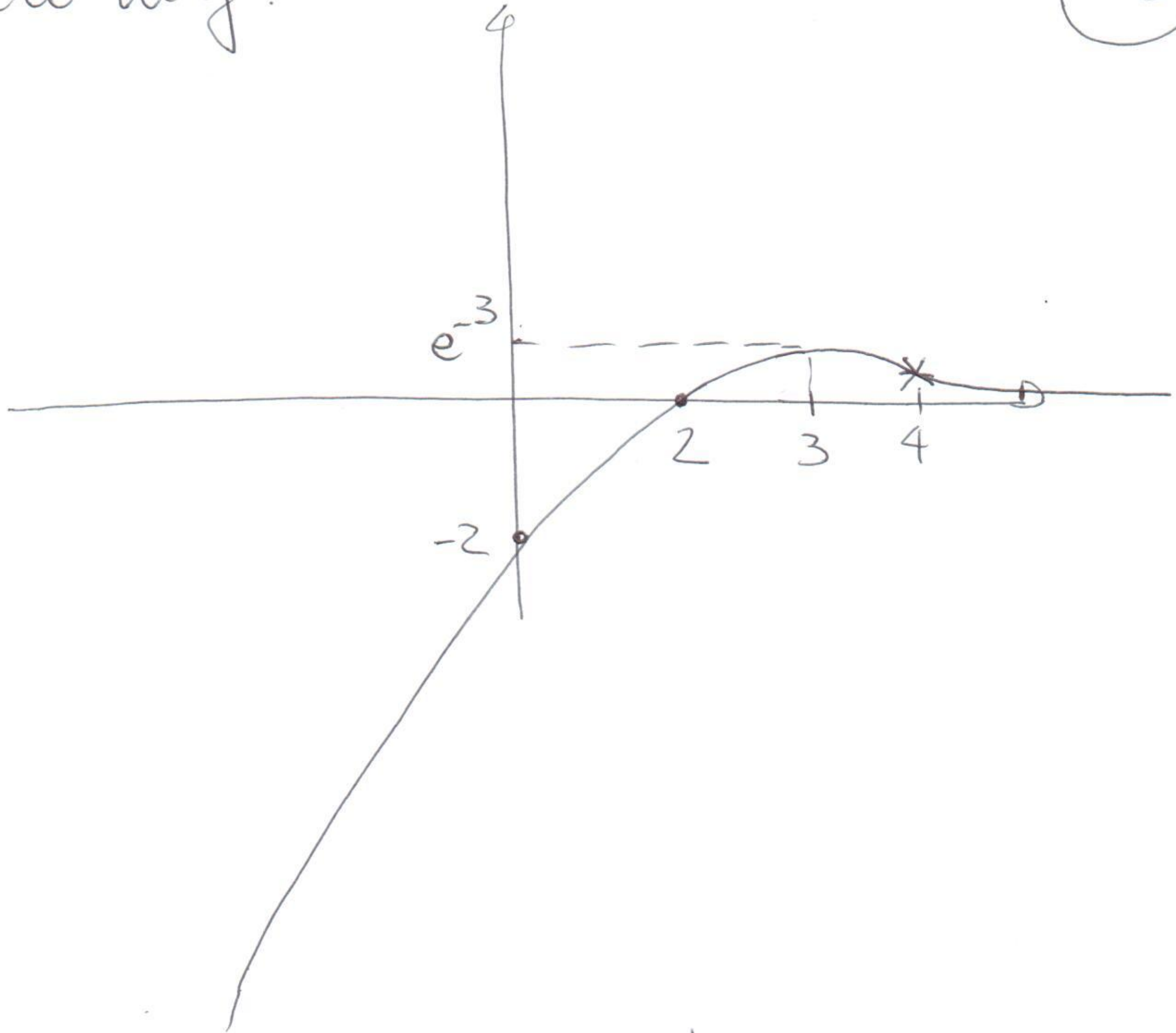
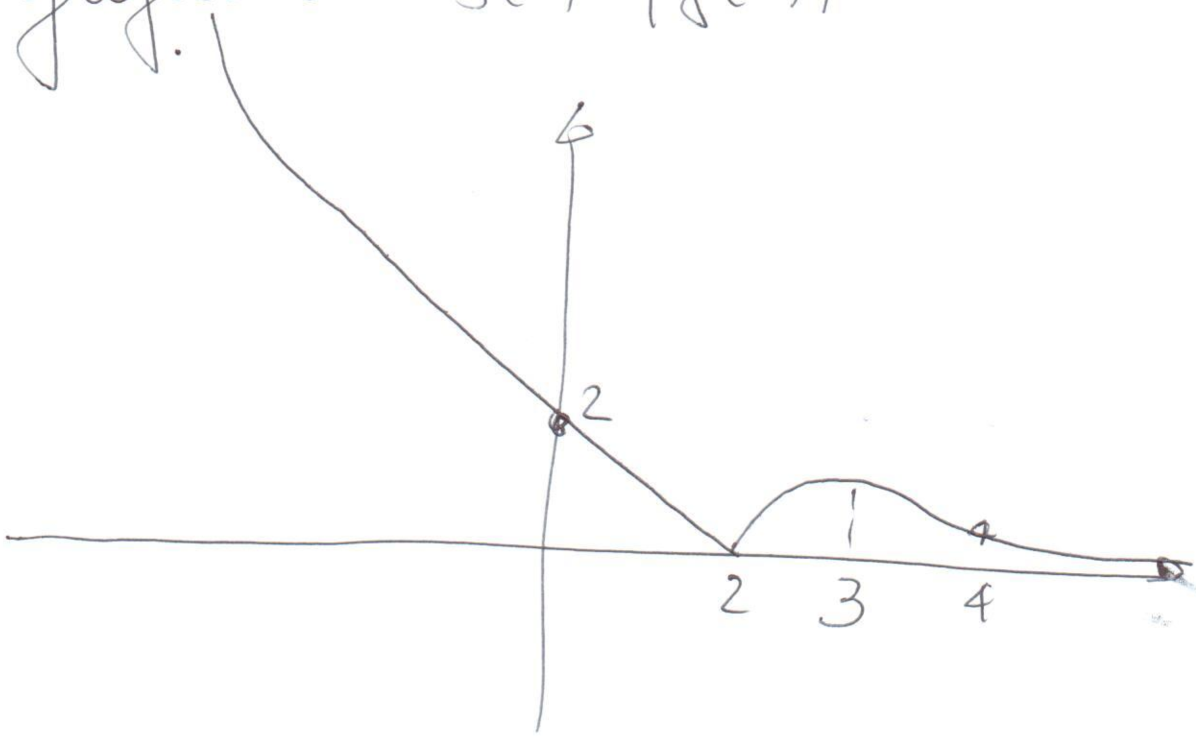


Grafico di $f(x) = |g(x)|$



In $(-\infty, 4]$: D_4

In $x=2$ MIN. REL. e ASS. $(f(2)=0)$

In $x=3$ MAX. REL. $(f(3)=e^{-3})$

In $x=4$ MIN. REL. $(f(4)=2e^{-4})$

$\nexists$ MAX. ASS. perché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3) $z \neq i+2$

$$(z-2+i)(z-2-i) = (-2z+3)$$

$$(z-2)^2 - (i)^2 = -2z+3$$

$$z^2 - 4z + 4 + 1 + 2z - 3 = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

4) $$n^\alpha \log\left(\frac{n^2+4n+2}{n^2+3}\right) = n^\alpha \log\left(1+\frac{4n-1}{n^2+3}\right)$$

$$\sim n^\alpha \left(\frac{4n-1}{n^2+3}\right) \sim \frac{4n^\alpha}{n} = \frac{4}{n^{1-\alpha}}$$ D_S

$$\Rightarrow \sum a_n \approx \sum \frac{4}{n^{1-\alpha}}$$

convergente per $1-\alpha > 1 \iff \alpha < 0$.

5) In forma normale:

$$y'(x) + \frac{1}{x\log x} y(x) = \frac{\log x}{x}$$

definita per $\begin{cases} x \neq 0 \\ \log x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} = (0,1) \cup (1+\infty)$

Pertanto il problema di Cauchy è definito in $(1,+\infty)$.

$a(x) = \dfrac{1}{x\log x} \in C^\infty(1,+\infty)$; $f(x) = \dfrac{\log x}{x} \in C^\infty(1,+\infty)$.

$\Rightarrow \exists!$ sol. (globale) $y(x) \in C^1(1,+\infty)$.

la soluzione si può determinare con la formula risolutiva consueta, oppure ri-scrivendo l'equazione nella forma

D6

$$\left(\log x \cdot y(x)\right)' = \frac{\log^2(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \log x \cdot y(x) = \int \frac{\log^2 x}{x}\,dx + C$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\log x}\left[\frac{\log^3 x}{3} + C\right]$$

$$= \frac{\log^2 x}{3} + \frac{C}{\log x}$$

$$y(e) = 1 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ l'unica soluzione è

$$y(x) = \frac{\log^2 x}{3} + \frac{2}{3\log x}.$$