ESERCITAZIONE DEL 22/12/2020

~~p. 163~~ Esercizio 7.19 pp. 164

1) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} ky - z = 1 \\ kx - y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} 0 & k & -1 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -k(-k) - 1 = k^2 - 1$$

dove abbiamo calcolato il determinante lungo la prima riga.

Se $k^2 - 1 \neq 0 \iff k \neq \pm 1$ il sistema ammette una sola soluzione.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{-(-1-k)}{(k+1)(k-1)} = \frac{\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}(k-1)}$$

$$= \frac{1}{k-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{-\begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{(k+1)(k-1)} = \frac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)}(k-1)} = \frac{1}{k-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+1)(k-1)} = \frac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)}(k-1)} = \frac{1}{k-1}$$

Si osservi che $x = y = z$

Se $k = \pm 1$, $\det A = 0$. Studiamo i due casi:

$\underline{k=1}$: $\begin{cases} y - z = 1 \\ x - y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ sommiamo membro a membro

$\begin{cases} y - z = 1 \\ x - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

$k=-1$: $\begin{cases} -y - z = 1 \\ -x - y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ sottraiamo membro a membro

$\begin{cases} -y - z = 1 \\ x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ identiche $\Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 - z \\ x = z \end{cases}$ con $z \in \mathbb{R}$

INFINITE SOLUZIONI: $(z, -1-z, z)$; $z \in \mathbb{R}$

Ad esempio, se $z=0$ $\Rightarrow$ la soluzione è
$(0, -1, 0)$.

Saremmo potuti arrivare alle stesse conclusioni manipolando il sistema di partenza:

$$\begin{cases} ky - z = 1 \\ kx - y = 1 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = x} \\ ky - x = 1 \\ kx - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = kx - 1 \\ k(kx-1) - x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = kx - 1 \\ x(k^2-1) = k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = kx - 1 \\ x(k+1)(k-1) = k+1 \end{cases}$$

Se $k=-1$ $\Rightarrow$ indeterminato $0=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x-1 \\ z = x \end{cases}$$

Se $k \neq -1$: dividiamo ambo i membri per $k+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = kx - 1 \\ x(k-1) = 1 \end{cases}$$

Se $k=1$ $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE: $0=1$

Se $k \neq \pm 1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} z = x \\ x = \dfrac{1}{k-1} \\ y = k\left(\dfrac{1}{k-1}\right) - 1 = \dfrac{k-k+1}{k-1} = \dfrac{1}{k-1} = x \end{cases}$

Si osservi che, per mezzo del <u>TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI</u>, si può stabilire quante soluzioni ammette il sistema. Prese la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la cosiddetta MATRICE COMPLETA, ottenuta aggiungendo alla matrice A la colonna dei termini noti:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 & 1 \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

il teorema sostiene che

a) il sistema è IMPOSSIBILE se $rg(A) < rg(A_c)$

b) il sistema ammette soluzioni se $rg(A) = rg(A_c) = r$

In tal caso, detto n il numero di incognite, le soluzioni sono ∞^{n-r}.

Nel caso in cui $n = r$, $\exists!$ soluzione.

<u>N.B.</u>: poiché A è una sottomatrice di A_c, può accadere solo che $rg(A) \leq rg(A_c)$.

Nel caso di questo esercizio, abbiamo

$$rg(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq \pm 1 \\ 2 & \text{se } k = \pm 1 \end{cases}$$

Nel caso $k \neq \pm 1$, perchè $rg(A_c) \leq 3$, si ha per forza
$$rg(A) = rg(A_c) = r = n = 3 \qquad 3_c$$
$\Rightarrow \exists!$ soluzione.

Nel caso $k = 1$,
$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Orlando tale minore, otteniamo i due minori di A_c
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \det A' = 0$$
$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A'' \underset{\text{lungo la terza riga}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$
$$\Rightarrow rg(A_c) = 3 > rg(A) = 2$$
$\Rightarrow$ SISTEMA IMPOSSIBILE.

Nel caso $k = -1$,
$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice ha rango 2, perchè la 1ª riga è somma delle altre due. Quindi tutti i minori di ordine 3 sono nulli. (3 d)

Poichè però $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, allora

$rg(A) = rg(A_c) = 2 \implies \infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^{1}$

soluzioni, cioè soluzioni che ~~sol~~ dipendono da un parametro libero. Infatti avevamo visto che, nel caso $k=-1$, le soluzioni sono

$$(z, -1-z, z) \; ; \; z \in \mathbb{R}.$$

2) Esercizio 7.19 p. 164

Calcolare il rango delle seguenti matrici.
(Il rango è l'ordine massimo dei minori quadrati a determinante non nullo).

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Tre minori di ordine 2:

$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ (due righe proporzionali)

$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 16-2 = 14 \neq 0$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8-2 = 6 \neq 0$

Non possedendo minori di ordine 3, il rango della matrice è 2.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Qualsiasi minore di ordine 2 ha det $=0$:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Poiché $1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Rango massimo $= 1$

$(1) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 1$

d) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det A = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8(1+1) + 2(-6-2)$
$= 8 \cdot 2 - 8 \cdot 2 = 0$

Infatti la prima riga è data dalla somma delle altre due.

Poiché $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 2$.

N.B.: tutte le matrici di ordine 3 dell'esercizio 7.19 hanno rango 2, perché il loro determinante è nullo

3) Esercizio 7.20

Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro k:

a) $\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$. Se $k=0 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Se $k \neq 0 \Rightarrow rg \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix} = 1$ (rango massimo)

b) $\begin{pmatrix} -k & 4k & 2k \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$k=0$: $rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = 1$ (prima riga nulla)

$k \neq 0$: $\begin{vmatrix} -k & 4k \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4k - 8k = -4k \neq 0$ 6

$\Rightarrow rg(A) = 2$.

c) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & k \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(k+1) + 2(-6-2) = 8(k+1) - 2 \cdot 8$$

$$= 8(k+1-2) = 8(k-1)$$

Se $k \neq 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg\, A = 3$

Se $k = 1$:

$$rg \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

perchè, ad esempio, $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$.

DERIVATE

4) Esercizi 4.1/4.3 p. 89

a) $$\left(\operatorname{arctg}(5-3x^2)\right)' = \frac{1}{1+(5-3x^2)^2}(-6x) = \frac{-6x}{1+(5-3x^2)^2}$$

b) $$\left(\frac{\pi}{x} - \ln(2)\right)' = \frac{-\pi}{x^2}$$

c) $$\left[(\operatorname{sen}x)^x\right]' = \left[e^{x\ln(\operatorname{sen}x)}\right]' = e^{x\ln(\operatorname{sen}x)}\left[x\ln(\operatorname{sen}x)\right]'$$

$$= (\operatorname{sen}x)^x\left[\ln(\operatorname{sen}x) + \frac{x}{\operatorname{sen}x}\cos x\right]$$

$$= (\operatorname{sen}x)^x\left[\ln(\operatorname{sen}x) + \frac{x}{\operatorname{tg}x}\right].$$

d) $$\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]' = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]'$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\left[\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\cdot\left[\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

CALCOLO DI LIMITI

5) Esercizio 4.6 pp. 96/97

a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^4-16} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x^2+4)(x^2-4)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{(x^2+4)(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{0}{8\cdot 4} = \frac{0}{32} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x-x^3)}{x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x-x^3)\left[1-3x^2\right]}{1}$$

$$= \frac{\cos(0)}{1} = \underline{1}$$

d) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

e) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1} = \frac{e^{+\infty}+1}{e^{+\infty}-1} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \underline{1}$$

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x-x^2}{x^4} = \frac{0}{0} \overset{H_1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x-2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} \overset{H_2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} =$$

$$= \frac{1}{6} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\text{LIMITE NOTEVOLE}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$$

GRAFICI

6) $f(x) = \ln(1-e^x)$

$D = \{1-e^x > 0\} = \{e^x < 1\} = \{x < 0\}$

NO intersezione asse y.

Asse x: $\ln(1-e^x) = 0 = \ln 1 \iff 1-e^x = 1$

$\iff e^x = 0$ MAI.

Segno: $\ln(1-e^x) > 0 \iff 1-e^x > \cancel{0}\ 1$

$\iff e^x < 0$ MAI

$f(x) < 0 \quad \forall x \in D$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln(\underbrace{1-e^{0^-}}_{\to 0}) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ln(1-e^{-\infty}) = \ln 1 = 0$$

AS. ORIZZONTALE a $-\infty$

$y = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1-e^x}(-e^x) = \frac{-e^x}{1-e^x} < 0 \quad \forall x \in D$$

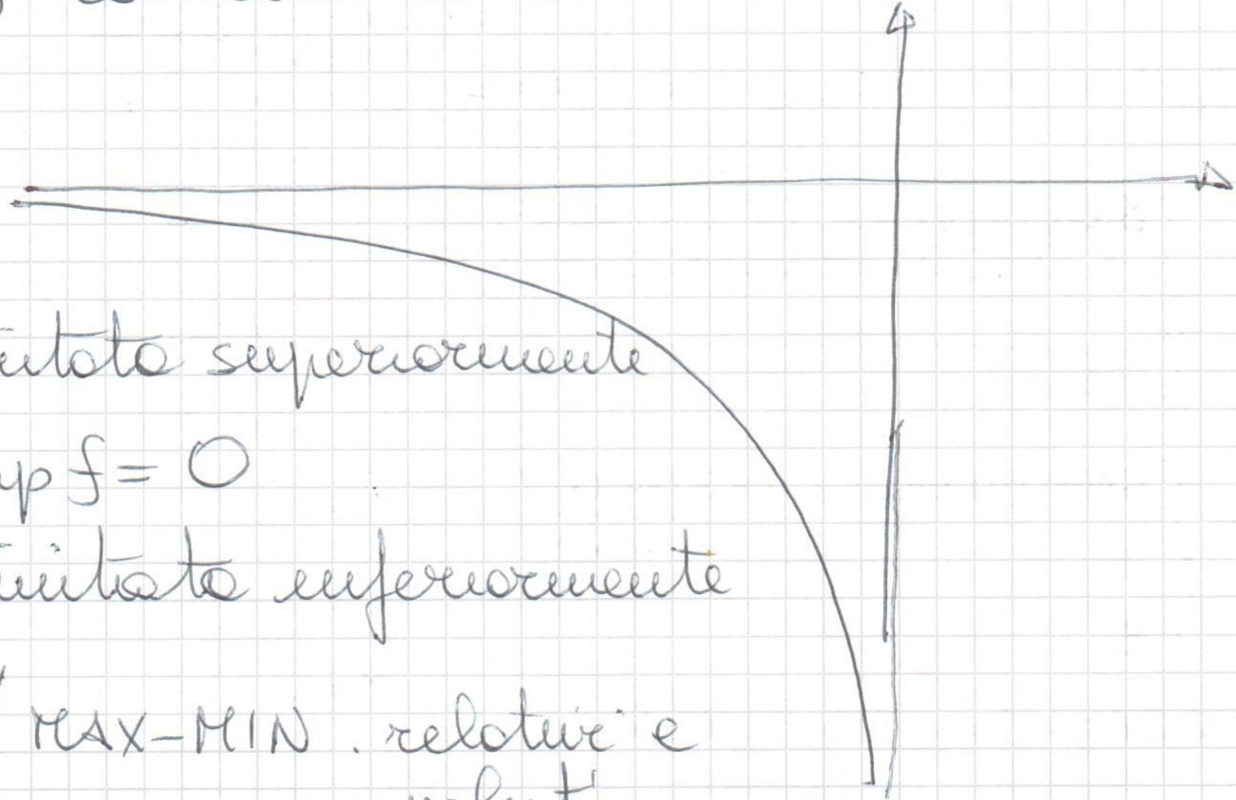
$1-e^x > 0$

f strettamente decrescente in D.

$$f'(x) = \frac{-e^x}{1-e^x} = \frac{1-e^x-1}{1-e^x} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$$ 10

$$f''(x) = \frac{-1}{(e^x-1)^2} e^x < 0 \quad \forall x \in D$$

f concava in D.



limitata superiormente

$\sup f = 0$

illimitata inferiormente

$\nexists$ MAX-MIN relativi e assoluti.

ATTENZIONE!!!

CONTRARIAMENTE A QUANTO PREANNUNCIATO, HO RITENUTO CHE NON VALESSE LA PENA SVOLGERE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $f(x) = \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$

esporato dai limiti d, e) di p. 8, perché alcune parti dello studio sono un po' troppo complesse e oltre gli obiettivi del corso.

INTEGRALI di FUNZIONI RAZIONALI

N.B.: $\underbrace{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}}_{} = \frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$

$[a \neq b]$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\int\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right]}$$

Esercizio 5.13 p. 124

1) $\int \frac{x^2}{2x-3}\,dx$

SOSTITUZIONE:

$2x-3=t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$

$dx = \frac{1}{2}dt \Rightarrow dt = 2dx$

$$= \int \left(\frac{t+3}{2}\right)^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int\left[\frac{t^2+6t+9}{t}\right]dt = \frac{1}{8}\int\left[t+6+\frac{9}{t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{t^2}{2}+6t+9\ln(|t|)\right]+c \Big|_{t=(2x-3)}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2x-3)^2}{2}+6(2x-3)+9\ln(|2x-3|)\right]+c.$$

2) $\int \frac{x-1}{(x+1)^4}\,dx$

SOSTITUZIONE:

$x+1=t \Rightarrow x=t-1$

$dx = dt$

$$= \int \frac{t-2}{t^4}\,dt = \int\left[\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^4}\right]dt = \int\left[t^{-3}-2t^{-4}\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2t^2}+\frac{2}{3t^3}+c \Big|_{t=x+1} = -\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{2}{3(x+1)^3}+c$$

ESERCIZIO 5.14 p. 125

3) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{(x+2)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-(-2))(x-2)}\,dx$

$= \frac{1}{-4}\int\left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right]dx = \frac{1}{4}\left[\ln(|x-2|) - \ln(|x+2|)\right] + c$

$= \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\right) + c$

4) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+7)}\,dx$

1° passo: $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow dx=dt$

$\int \frac{t+2}{t(t+8)}\,dt = \int\left[\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(t+8)} + \frac{2}{t(t+8)}\right]dt$

2° passo

$= \ln(|t+8|) + 2\left[\int \frac{1}{(t-0)(t-(-8))}\,dt\right] =$

$= \ln(|t+8|) + \frac{2}{8}\left[\int\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+8}\right]dt\right.$

$= \ln(|t+8|) + \frac{1}{4}\left[\ln(|t|) - \ln(|t+8|)\right] + c$

$= \frac{1}{4}\left[4\ln(|t+8|) - \ln(|t+8|) + \ln(|t|)\right] + c$

$= \frac{1}{4}\left[3\ln(|t+8|) + \ln(|t|)\right] + c$

$= \frac{1}{4}\left[\ln(|t+8|^3) + \ln(|t|)\right] + c$

$= \frac{1}{4}\left[\ln(|t(t+8)^3|)\right] + c \Big|_{t=x-1}$

12b

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\left|(x-1)(x+7)^3\right|\right) + c.$$

In alternativa, si sarebbe potuto procedere ponendo

$$x+7=t \Rightarrow x = t-7 \Rightarrow dx = dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{t-6}{(t-8)t}\,dt = \int \left[\frac{\cancel{t}}{(t-8)\cancel{t}} - \frac{6}{t(t-8)}\right] dt$$

$$= \ln(|t-8|) + \frac{6}{-8} \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t-8}\right] dt$$

$$\cancel{= \ln(|t-8|) + \frac{3}{4} \ln\left(\left|\frac{t}{t-8}\right|\right) + c}$$

$$= \ln(|t-8|) + \frac{3}{4}\ln(|t|) - \frac{3}{4}\ln(|t-8|) + c$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(|t-8|) + 3\ln(|t|)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left[\left(|t-8||t|^3\right)\right] + c \Big|_{t=x+7}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left[\left|(x-1)\cdot(x+7)^3\right|\right] + c.$$

VERIFICA: $\frac{1}{4}\left[\ln\left|(x-1)(x+7)^3\right|\right]' =$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)(x+7)^{\cancel{3}}}\left[(x+7)^{\cancel{3}} + 3\cancel{(x+7)^2}(x-1)\right] = \frac{1}{4}\,\frac{[x+7+3x-3]}{(x-1)(x+7)}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(4x+4)}{(x-1)(x+7)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+7)}$$

5) $\int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$ integrale del tipo (13) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|)+c$

[Ponendo $x^2-x=t \Rightarrow dt=(2x-1)\,dx$]

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln(|t|)\Big|_{t=x^2-x} + c = \ln(|x^2-x|)+c$$

Altrimenti: $\int \frac{2x-1}{x(x-1)}\,dx$

$$= \int \left[\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}\right] dx = 2\ln(|x-1|)$$

$$+ \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right] dx = 2\ln(|x-1|) + \ln(|x|) - \ln(|x-1|) + c$$

$$= \ln(|x-1|) + \ln(|x|) + c = \ln(|x(x-1)|) + c.$$

ESERCIZIO 5.16 p. 125

6) $\int x \ln(x^2-1)\,dx$

Prodotto di due funzioni, di cui una composta

$\Rightarrow t = x^2-1 \;;\; dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\int \ln t\,dt}_{\text{per parti}} = \frac{1}{2}\left[t\ln t - \int \cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t \ln t - t\right] + c \Big|_{t=x^2-1} = \frac{1}{2}(x^2-1)\left[\ln(x^2-1) - 1\right] + c$$ 14

7) $$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{2}{e^x - e^{-x}}\right) dx$$

$$= \int \frac{\cosh x}{\sinh x}\,dx$$

$$= \ln(|\sinh x|) + c$$

Integrale del tipo
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c$$

In alternativa:

Osserviamo direttamente che

$(e^x - e^{-x})' = (e^x + e^{-x})$. Quindi abbiamo

$$\int \frac{(e^x - e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})}\,dx = \ln(|e^x - e^{-x}|) + c$$

Apparentemente, il risultato è differente dal precedente, ma osserviamo che

$$\ln(|\sinh x|) + c = \ln\left(\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right|\right) + c$$

$$= \ln(|e^x - e^{-x}|) \underbrace{- \ln 2 + c}_{\text{costante arbitraria}} = \ln(|e^x - e^{-x}|) + c.$$

Ulteriore alternativa:

$$\int \left[\frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} \right] dx = \int \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \right) dx$$

$$\left[e^x = t \qquad dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \right]$$

$$= \int \frac{t^2+1}{(t^2-1)t} dt = \int \frac{t^2+1}{(t+1)(t-1)t} dt$$

RISOLUBILE CON METODO dei FRATTI SEMPLICI (NON SVOLTO).

Diamo in ogni caso un'idea del metodo:

Riscriviamo

$$\underbrace{\frac{t^2+1}{(t+1)(t-1)t}}\; = \underbrace{\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t}}_{\text{fratti semplici}}$$

m.c.d.:

$$= \frac{A(t-1)t + B(t+1)t + C(t+1)(t-1)}{(t+1)(t-1)t}$$

$$= \frac{At^2 - At + Bt^2 + Bt + Ct^2 - C}{(t+1)(t-1)t} = \frac{(A+B+C)t^2 + (B-A)t - C}{(t+1)(t-1)t}$$

Determiniamo A, B, C imponendo l'identità fra i due polinomi a numeratore:

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ B-A = 0 \\ -C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1 \\ A+B = 2 \\ B-A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1 \\ B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^2+1}{(t+1)(t-1)t}\,dt = \int \left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right] dt$$

14c

$$= \ln(|t+1|) + \ln(|t-1|) - \ln(|t|) + c$$

$$= \ln\left(\left|\frac{(t+1)(t-1)}{t}\right|\right) + c = \ln\left(\left|\frac{t^2-1}{t}\right|\right) + c \Bigg|_{t=e^x}$$

$$= \ln\left(\left|\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right|\right) + c = \ln\left(\left|\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right|\right) + c$$

$$= \ln\left(\left|e^x - e^{-x}\right|\right) + c$$

N.B.: il metodo dei fratti semplici si può applicare a ogni quoziente di polinomi, purché il grado del numeratore sia MINORE strettamente del grado del denominatore. In caso contrario, occorre prima dividere il numeratore per il denominatore

8) $\int x^3 e^{-x}\,dx$ PER PARTI. MEGLIO DERIVARE IL POLINOMIO

3 integrazioni per parti

① $= -e^{-x}x^3 - \int(-e^{-x})3x^2\,dx = -e^{-x}x^3 + 3\int x^2 e^{-x}\,dx$

② $= -e^{-x}x^3 + 3\underbrace{\left[-e^{-x}x^2 - \int(-e^{-x})2x\,dx\right]}_{\text{per parti}} = -e^{-x}x^3 - 3e^{-x}x^2 + 6\int x e^{-x}\,dx$

③ $= -e^{-x}x^3 - 3e^{-x}x^2 + 6\underbrace{\left[-e^{-x}x - \int(-e^{-x})\,dx\right]}_{\text{per parti}} =$

$= -e^{-x}x^3 - 3e^{-x}x^2 - 6e^{-x}x + 6\int e^{-x}\,dx$

$= -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6) + c$

9) $\int \ln^2(x)\,dx$ = per parti $\left(= \int 1\cdot \ln^2(x)\,dx\right)$ $= x\ln^2 x - \int \cancel{x}\, 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$

$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx = x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right]$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x - x + c.$

10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ ← rendiamo elementare questa funzione composta

$t = x+1 \Rightarrow x = t-1 \; ; \; dx = dt$

$= \int \frac{t-2}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left[\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right]dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + c$

$= \int \left[t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}\right]dt$

11) $\int \sqrt{x}\,\log(x)\,dx$ = per parti = SEMPRE MEGLIO DERIVARE IL LOGARITMO

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\right] = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right] + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + c$

<u>In alternativa:</u>

$\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx = \int \sqrt{x}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\ln(x)\,dx =$

$$= \frac{2}{3}\int \sqrt{x} \cdot \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$\left[x^{\frac{3}{2}} = t \Rightarrow dt = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} dt\right.$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \int \frac{2}{3} \ln t \, dt = \frac{4}{9}\Big[t \ln t - t\Big]_{t = x^{\frac{3}{2}}} + c$$

$$= \frac{4}{9}\left[x^{\frac{3}{2}} \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) - x^{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}\ln(x) - 1\right] + c.$$

12) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{1-x^3} dx = -\frac{1}{3}\ln\left(|1-x^3|\right) + c$

$(\cos x)'$

13) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$$= -\ln\left(|\cos x|\right) + c$$

14) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

<u>Più velocemente</u>:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left[\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1\right] dx$$

$$= \int \left[\operatorname{tg}^2 x + 1\right] dx - \int 1 \, dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

15) $\int tg^3 x\, dx = \int tg x \cdot tg^2 x\, dx$

$= \int tg x \left[tg^2 x + 1 - 1 \right] dx =$

$\int tg x (tg^2 x + 1)\, dx - \int tg x\, dx$

$$\boxed{\int f(x) f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2} + c}$$

$= \frac{tg^2(x)}{2} + \ln(|\cos x|) + c$

INTEGRALI DEFINITI

16) Esercizio 5.19 p. 127

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ = per parti = $\left[2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{2\sqrt{x}}{x} dx \right]$

$= \left[2\sqrt{e} \ln(e) - 2 \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right] = 2\sqrt{e} - 2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^e$

$= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e}.$

In alternativa:

$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e 2 \frac{1}{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^e \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

$\left[\sqrt{x} = t \;;\; dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \;;\; t(1) = 1 \;;\; t(e) = \sqrt{e} \right]$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$

$$= 4\int_1^{\sqrt{e}} \ln(t)\,dt = 4\left[t\ln t - t\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= 4\left[\left(\sqrt{e}\,\ln\sqrt{e} - \sqrt{e}\right) - (-1)\right]$$

$$= 4\left[\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{e} + 1\right] = 4\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}\right]$$

b) $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{2+x^2}\,dx$

$$\left[\begin{array}{c} t = 2+x^2 \;;\; dt = 2x\,dx \\ \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \\ t(1) = 3 \;;\; t(3) = \cancel{20}\;11 \end{array}\right]$$

$$= \int_3^{\cancel{20}\;11} \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_3^{\cancel{20}\;11}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\cancel{20}\;11^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right].$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizio 6.15 p. 136

Trovare le soluzioni dei seguenti Problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = te^{t^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Caso particolare di equazione lineare: $y' = \cancel{g(t)y} + h(t)$ $\Longrightarrow \exists!$ soluzione

INTEGRALE GENERALE: $y(t) = \int te^{t^2} dt$

Pongo $t^2 = u \Rightarrow du = 2t\,dt \Rightarrow t\,dt = \frac{1}{2} du$

$$y(t) = \int \frac{1}{2} e^u du \Big|_{u=t^2} = \frac{1}{2} e^u + c \Big|_{u=t^2} = \frac{1}{2} e^{t^2} + c$$

Condizione iniziale: $y(0) = 2 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} e^{t^2} + \frac{3}{2}}$$

Verifica: $y'(t) = \frac{1}{2} e^{t^2} 2t = te^{t^2}$ OK

Esercizio 6.16 p. 136

~~Eq~~ $\begin{cases} y' = \ln(t^2) y \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Equazione lineare omogenea

$$\left[y' = g(t)y + \cancel{h(t)} \Rightarrow y(t) = e^{\int g(t)dt} \cdot \left[C + \cancel{\int h(t) e^{-\int g(t)dt} dt} \right] = Ce^{\int g(t)dt} \right]$$

$$y(t) = e^{\int \ln(t^2)dt} C$$

L'EQUAZIONE È DEFINITA PER $t \neq 0$

POICHÈ $t_0 = 1 \Rightarrow$ cerchiamo la soluzione in $]0, +\infty)$

Calcoliamo $\int \ln(t^2) dt = 2 \int \ln(t) dt$

$$\int \ln(t^2)\,dt = t\ln(t^2) - \int t\,\frac{1}{t^2}\,2t\,dt$$
$$= t\ln(t^2) - \int 2\,dt = t\ln(t^2) - 2t + c$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{t\ln(t^2) - 2t + c}$$
$$= \left[e^{\ln(t^2)}\right]^t \cdot e^{-2t} \cdot e^{c} = K\,(t^2)^t\,e^{-2t}$$

$$y(1) = 1 = K \cdot e^{-2} \Rightarrow K = e^2$$
$$\Rightarrow y(t) = e^{2-2t}\left(t^{2t}\right) = e^{2(1-t)}\,t^{2t}.$$

<u>Esercizio 6.17</u> (<u>EQUAZIONE LINEARE</u>)

p) $\begin{cases} y' = \dfrac{e^t}{t} - \dfrac{y}{t} \\ y(2) = 2 \end{cases}$

$g(t) = -\dfrac{1}{t}$; $h(t) = \dfrac{e^t}{t}$

L'EQUAZIONE E' DEFINITA per $t \neq 0 \Rightarrow$ in $(-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty)$

Poiché $t_0 = 2 > 0$

$\Rightarrow$ cerchiamo la soluzione in $]0, +\infty)$.

$$y(t) = e^{\int -\frac{1}{t}\,dt}\left[\int e^{\int \frac{1}{t}\,dt}\,\frac{e^t}{t}\,dt + C\right]$$
$$= \frac{1}{e^{\int \frac{1}{t}\,dt}}\left[\int e^{\ln t}\,\frac{e^t}{t}\,dt + C\right]$$

$\left(\text{N.B.: } e^{\ln t} = t\right)$

$$= \frac{1}{e^{\ln t}} \left[\int \cancel{t} \frac{e^t}{\cancel{t}} dt + C \right] = \frac{1}{t}\left(e^t + C\right)$$ (21)

$$y(2) = 2 = \frac{1}{2}\left(e^2 + C\right) \Rightarrow 4 = e^2 + C$$

$$\Rightarrow C = -e^2 + 4$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t}\left(e^t - e^2 + 4\right)$$

u) $\begin{cases} y' = t^9 e^t (y-1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI

Soluzioni singolari: $y(t) = 1$

Questa è SOL. del Problema di Cauchy!

Però $y' = \underbrace{t^9 e^t}_{g(t)} y \underbrace{- t^9 e^t}_{h(t)}$ $g, h \in C^0(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione

Tale soluzione è la sol. singolare $y(t) = 1$.