Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica
Corso di Analisi - a.a. 2001/02

NOTE AGGIUNTIVE SULL'ESPONENZIALE A ESPONENTE COMPLESSO

Dato l'esponenziale a esponente immaginario

$$e^{iy} \;=\; \cos y + i \sin y \quad ; \quad y \in I\!R \qquad ,$$

valgono le seguenti proprietà:

1)

$$|e^{iy}| \;=\; |\ \cos y + i\sin y\ | = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \;=\; 1\ ,\ \forall y \in I\!R\ .$$

2) (prima proprietà fondamentale delle potenze)

$$e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \;=\; e^{iy_1 + iy_2}\ .$$

Infatti

$$e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \;=\; (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2)$$

ma, per la formula del prodotto tra due numeri complessi, espressi in forma trigonometrica,

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \;=\; \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]\ ,$$

si ha

$$e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} \;=\; [\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \;=\; e^{iy_1+iy_2} \qquad \text{cvd}\ .$$

3) (seconda proprietà fondamentale delle potenze)

$$(e^{iy})^n \;=\; e^{iny}$$

Per mezzo delle *formule di De Moivre*,

$$z^n \;=\; \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]\ ,$$

possiamo scrivere

$$(e^{iy})^n \;=\; [\cos(ny) + i\sin(ny)] \;=\; e^{iny} \qquad \text{cvd}\ .$$

4) (periodicità)

$$e^{i(y+2k\pi)} \;=\; \cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi) \;=\; \cos y + i\sin y$$

(per la periodicità del seno e del coseno).
Dunque, l'esponenziale immaginario è **periodico** di periodo $T = 2\pi i$.

I punti del piano complesso rappresentati da e^{iy} sono, a causa della proprietà 1), tutti e soli quelli appartenenti alla circonferenza unitaria di centro l'origine.
In corrispondenza di $y = 0 \quad , \quad e^{i0} \;=\; \cos 0 + i\sin 0 \;=\; 1$.
Al crescere di y, il punto e^{iy} si muove lungo la circonferenza in senso antiorario, fino a tornare in 1 in corrispondenza del valore $y = 2\pi\ :\ e^{2\pi i} = e^{i0} = 1$, dove si è sfruttata la proprietà 4) di periodicità.
Inoltre, si ha:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; i \quad ; \quad e^{i\pi} \;=\; -1 \quad ; \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} \;=\; -i\ .$$

5) (coniugato dell'esponenziale)

$$\overline{e^{iy}} = e^{-iy} .$$

Infatti,

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos(y) - i\sin(y) = \overline{e^{iy}} .$$

6) (formule di Eulero)

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad ; \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{e^{-iy} - e^{iy}}{2} i .$$

Infatti,

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y ;$$
$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y .$$

Dalle proprietà dell'esponenziale immaginario discendono importanti proprietà dell'esponenziale a esponente complesso $e^z = e^{x+iy}$.

Dalla proprietà 1) discende

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x .$$

Più in generale, data una funzione $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$,

$$|e^{f(z)}| = e^{\mathrm{Re}[f(z)]} .$$

Poiché

$$Re(e^z) = e^x \cos y$$
$$Im(e^z) = e^x \sin y ,$$

dalla definizione di numero coniugato si ha

$$\overline{e^z} = e^x \cos y - ie^x \sin y = e^x[\cos y - i\sin y] = e^x[\cos(-y) + i\sin(-y)] = e^{x-iy} = e^{\overline{z}} .$$

L'eguaglianza $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ può anche essere verificata direttamente, ricordando che $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ e che $|e^z| = e^x$:

$$e^z \cdot e^{\overline{z}} = e^{x+iy} \cdot e^{x-iy} = e^{x+iy+x-iy} = e^{2x} = |e^z|^2 .$$

Grazie alla definizione di esponenziale immaginario, i numeri complessi possono essere espressi in una terza forma - oltre a quella cartesiana e a quella polare (o trigonometrica) - che prende il nome di *forma esponenziale*. Ricordando che $\rho = |z|$, si ha

$$z = |z|\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] = \rho\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] = \rho e^{i\theta}.$$

Per mezzo dell'ultima formula è possibile riottenere facilmente le varie operazioni sui numeri complessi. Ad esempio, se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, si ha

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} .$$

Come semplice applicazione dell'esponenziale complesso, ricaviamo le famose *formule di addizione* per il seno e il coseno.

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \; &= \; [\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)] \cdot [\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)] \; = \\
&= [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)] + i\,[\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)] \; .
\end{aligned}
$$

Poiché

$$
e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \; = \; e^{i(\theta_1+\theta_2)} \; = \; \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \; ,
$$

segue che

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta_1+\theta_2) \; &= \; \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \; ; \\
\sin(\theta_1+\theta_2) \; &= \; \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \; .
\end{aligned}
$$