Determinare gli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari non omogenei e scriverli in forma di spazio affine

ESERCIZIO 1.3.21

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x - 3y - 2z = -1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.22

$$\begin{cases} -x + 2y + t = 2 \\ x + z + t = 1 \\ -2x + 2y - z = 1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.23

$$\begin{cases} x/5 - y = 2 \\ x/5 + y - z/7 = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.24

$$\begin{cases} x/8 - y/8 + z = 1/5 \\ 3x + 3y = 5 \\ x + 2y - 4z = 2/5 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.25

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x - 2y + z = 3 \\ 3x + 3y + z = -2 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.26

$$\begin{cases} x - y + 2t = 1 \\ 2x - 2y + 4t = 2 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.27

$$\begin{cases} x - y + 2t = 1 \\ x + z + t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.28

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y/7 - z = 0 \\ 3y - z/2 = 1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.29

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+y/2+3z=1 \\ -x+z=2 \\ x+2z=1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 1.3.30

$$\begin{cases} x-y-2z=2 \\ -x+y+2z=0 \\ x+2y+z=-2 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

SOLUZIONI

1.3.21

Metodo A: indichiamo con M_i la cosiddetta matrice incompleta, costituita dai coefficienti delle incognite e con M_c la matrice completa, ottenuta aggiungendo ad M_i la colonna dei termini noti; si ha:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad M_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché la prima e la quarta colonna di M_c sono uguali, $rg(M_i) = rg(M_c)$ e il sistema è compatibile. Basterà dunque studiare il rango di M_i. Poiché $\det(M_i) = 0$ (la terza riga si ottiene sottraendo la seconda alla prima), ma

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

allora $rg(M_i) = rg(M_c) = 2$ e, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, che si otterranno dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+2y=2-2z \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{z}{2} \\ y=-\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è:

$$S=\left\{\left(1-\frac{z}{2},\quad -\frac{z}{2},\quad z\right),\ z\in\Re\right\}$$

ovvero assumendo z come parametro,

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix};\qquad z\in\Re\right\} \qquad [?1]$$

Si ricorda che un insieme di vettori si dice spazio affine quando può essere rappresentato come somma di un fissato vettore (nel nostro caso (1,0,0)) e di un sottospazio dello spazio vettoriale a cui appartengono i vettori (in questo caso, la retta $y(1,1,-2)^T$). Geometricamente, la S rappresenta una retta dello spazio $\Re^3$ non passante per l'origine, ma per il punto (1,0,0).
Metodo B: dalla prima equazione otteniamo

$$x=1+y$$

che, sostituita nella seconda equazione, dà

$$2+2y+2y+2z=2$$

cioè, semplificando,

$$2y+z=0$$

e dunque

$$z=-2y\,.$$

Verifichiamo che la terza equazione si riduce ad un'identità nel caso in cui si sostituiscano ad x e z i valori (funzioni della y) trovati. Si ha:

$$-(1+y)-3y-2(-2y)=-1 \quad\Rightarrow\quad -1-y-3y+4y=-1 \quad\Rightarrow\quad 0=0$$

Dunque, assumendo y come parametro, possiamo scrivere l'insieme delle ∞^1 soluzioni:

$$S=\left\{(1+y,\quad y,\quad -2y),\ y\in\Re\right\}$$

e, in forma di spazio affine,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad y \in \Re \right\}. \qquad [?2]$$

L'attento lettore noterà che la [?1] e la [?2] rappresentano lo stesso insieme (basta porre $y = -\frac{z}{2}$).

1.3.22

$$M_i = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Orlando il minore tale che $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ si può facilemtne verificare che il rango di M_i è 2; infatti

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la prima riga è data dalla somma delle altre due)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la prima riga è data dalla somma delle altre due)}$$

Inoltre, anche il rango della matrice completa

$$M_c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è 2, in quanto è nullo il minore

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

che si ottiene oralndo lo stesso minore $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ con la colonna dei termini noti (unico orlato appartenente a M_c, ma non a M_i). Dunque il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

Per calcolare le soluzioni, ricaviamo dalla prima equazione la variabile x

$$x = 2y + t - 2$$

e, sostituendola nella seconda ed esplicitando rispetto a z,

$$z = 1 - t - x = 1 - t - 2y - t + 2 = 3 - 2y - 2t.$$

Infine, sostituendo nella terza equazione i valori di x e z trovati, otteniamo che tale equazione si riduce all'indentità.

Dunque, assumendo y e t come parametri, possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni nella forma

$$S = \{(2y + t - 2, 3 - 2y - 2t, t),\ y \in \Re,\ t \in \Re\}$$

e, in forma di spazio affine,

$$S=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix};\ y\in\Re,\ t\in\Re\right\}.$$

1.3.23

Poiché

$$\det(M_i)=\begin{vmatrix}1/5 & -1 & 0\\ 1/5 & 1 & -1/7\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=5/7$$

si ha allora $rg(M_i)=rg(M_c)=3$ e il sistema ammette $\infty^{3-3}=1$ soluzione. Otteniamo y dalla prima equazione e sostituiamola nelle altre due:

$$\begin{cases}y=x/5-2\\ x/5+x/5-2-z/7=1\\ x+x/5-2+z=2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y=x/5-2\\ 2x/5-z/7=3\\ z=4-6x/5.\end{cases}$$

Sostituendo la z nella seconda equazione, si ha

$$\frac{2}{5}x-\frac{1}{7}\left(4-\frac{6}{5}x\right)=3$$

da cui

$$\begin{cases}x=25/4\\ y=5/4-2=-3/4\\ z=4-15/2=-7/2.\end{cases}$$

L’insieme delle soluzioni è dato dal solo vettore

$$\left\{\begin{pmatrix}25/4\\-3/4\\-7/2\end{pmatrix}\right\}.$$

1.3.24

Metodo A: poiché

$$\det(M_i)=\begin{vmatrix}1/8 & -1/8 & 1\\ 3 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -4\end{vmatrix}=0$$

e

$$\begin{vmatrix}1/8 & -1/8\\ 3 & 3\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\neq 0 \qquad (?)$$

si ha $rg(M_i)=2$, ma orlando il minore (?) con la terza riga e la colonna dei termini noti, si ha

$$\begin{vmatrix}1/8 & -1/8 & 1/5\\ 3 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 2/5\end{vmatrix}=-\frac{39}{40}\neq 0$$

da cui
$$rg(M_c) = 3 \neq rg(M_i) = 2$$
e il sistema non ammette soluzioni.

Metodo B: ricavando la x dalla terza equazione e sostituendola nelle altre due, si ha
$$\begin{cases} x = 2/5 - 2y + 4z \\ 1/8(2/5 - 2y + 4z) - y/8 + z = 1/5 \\ 3(2/5 - 2y + 4z) + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2/5 - 2y + 4z \\ -3y/8 + 3z/2 = 3/20 \\ -3y + 12z = 19/5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2/5 - 2y + 4z \\ -3y + 12z = 6/5 \\ -3y + 12z = 19/5. \end{cases}$$
Dalla comparazione della seconda e della terza equazione si arriva alla incompatibilità del sistema.

1.3.25

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -1-x \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x \in \Re \right\}.$$

1.3.26

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 - z/2 - t/2 \\ -1/2 - z/2 + 3t/2 \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z \in \Re,\ t \in \Re \right\}.$$

1.3.27

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -z-t \\ -1-z+t \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z \in \Re,\ t \in \Re \right\}.$$

1.3.28

$$S = \left\{ \left(\frac{47}{38}, \frac{21}{38}, \frac{25}{19} \right) \right\}.$$

1.3.29

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Orlando il minore di M_i tale che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0$$

con la terza colonna e la terza riga, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{7}{2}$$

per cui $rg\left(M_i\right) = 3$. Poiché, ovviamente, $rg\left(M_c\right) \geq 3$, verifichiamo direttamente se $rg\left(M_c\right) = 4$, calcolandone il determinante. Ricordando che sostituendo ad una riga la sua combinazione lineare con altre righe (purché nella combinazione lineare il coefficiente della riga sostituita sia 1) non cambia il valore del determinante, possiamo sostituire alla prima riga di M_c
la sua differenza con il doppio della seconda riga; si avrà

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -4 & -1 \\ 2 & 1/2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

In tal modo possiamo applicare la regola di Laplace alla seconda colonna, che ora ha una sola componente non nulla.

$$\det\left(M_c\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(a tale conclusione si poteva giungere anche osservando che, in M_c, la terza colonna è data dalla somma della prima e della quarta).

Dunque,

$$rg\left(M_i\right) = rg\left(M_c\right) = 3$$

e secondo il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette una soluzione, che possiamo ottenere nel seguente modo: sommiamo membro a membro la terza e la quarta equazione e consideriamo solo le prime tre equazioni. Avremo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + (1/2)y + 3z = 1 \\ 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x + y + 2 = 1 \\ 2x + (1/2)y + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = -1 - y \\ -2 - 2y + (1/2)y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

1.3.30

Metodo A:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché la seconda colonna è data dalla somma della prima e della terza, $rg\left(M_i\right) < 3$. Inoltre, poiché si ha, ad esempio,