GHIZZETTI-ROSATI ; Analisi Mat. 2

Dimostrazione – Basta applicare il teorema della divergenza nella forma (6.4.7) con $f = Y$, $g = -X$; si ricava

$$\iint_T \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{+\partial T} X\, dx + Y\, dy = 0\,,$$

non appena si tenga conto che la funzione integranda a primo membro è nulla per la (6.7.2). □

Ciò premesso, sia γ una qualsiasi curva generalmente regolare *semplice e chiusa* contenuta in A (basterebbe prendere una poligonale semplice e chiusa); si può dimostrare, ma su questo non possiamo soffermarci, che γ è la frontiera di un dominio regolare T del piano xy (cosa evidente nel caso di poligonali). In alcuni casi T è contenuto in A, in altri no.

Riferendoci al primo caso, diremo che il campo connesso A è *un campo semplicemente connesso* se ogni curva semplice e chiusa γ tracciata in A è (da sola) la frontiera ∂T di un dominio regolare T contenuto in A [fig. 6.7.1].

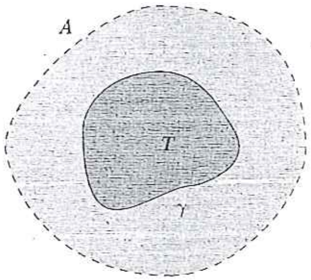

Fig. 6.7.1

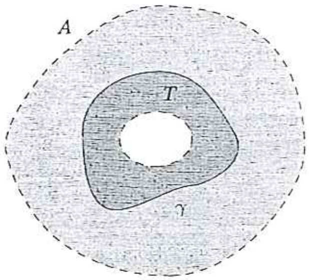

Fig. 6.7.2

Ad esempio un *intervallo aperto*, un campo circolare, l'intero piano xy, sono campi semplicemente connessi.

Invece, una corona circolare aperta, un intervallo aperto privato di un punto, sono campi connessi *non semplicemente*.

In generale si può affermare che un campo semplicemente connesso non presenta lacune (buchi), eventualmente ridotte a punti, o curve. In figura 6.7.2 è rappresentato un campo connesso *non semplicemente*.

Siamo ora in condizione di fornire il richiesto criterio sufficiente di integrabilità della forma differenziale (6.7.1).

Teorema 6.7.II – *Data la forma differenziale $X\,dx + Y\,dy$ con $X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A)$, con A campo connesso di $\mathbb{R}^2$; se la forma è chiusa in A (vale cioè la (6.7.2)) e se il campo A è semplicemente connesso, allora la forma è un differenziale esatto e ogni sua primitiva $F(x,y)$ ha la forma*

$$F(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv \qquad (6.7.4)\,.$$

con c costante arbitraria, ove l'integrale curvilineo è calcolato su una qualsiasi curva generalmente regolare congiungente il punto (fissato) $(x_0, y_0) \in A$ al punto variabile $(x,y) \in A$.

Dimostrazione – A è semplicemente connesso e quindi ogni curva γ semplice e chiusa (generalmente regolare) è frontiera di un dominio $T \subset A$; vale perciò la (6.7.3) con $\gamma = \partial T$ arbitraria. Per il teorema 6.2.III, osservazione II, la forma differenziale data è certamente esatta. La (6.7.4) è poi conseguenza della (6.2.12) con $Z = 0$, $z = 0$. □

Si noti che il caso di A intervallo di $\mathbb{R}^2$ (teorema 6.3.II) rientra come caso particolare in quello dei campi semplicemente connessi.

6.8 Forme differenziali lineari in campi più volte connessi

Se il campo A non è semplicemente connesso, la tesi del teorema 6.7.II in generale non è vera, come mostra l'esempio dato da (6.3.4).

In un campo A connesso (in generale non semplicemente) la (6.7.2) può intendersi come condizione *sufficiente* per l'*integrabilità locale* della forma differenziale lineare, nel senso che, ad ogni fissato punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$, può associarsi un campo semplicemente connesso $A_0 \subset A$ e contenente P_0, nel quale la data forma differenziale risulti integrabile. In A_0 può allora definirsi una *primitiva locale* data da

$$F_0(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv, \quad (x,y) \in A_0\,. \qquad (6.8.1)$$

In generale questa funzione $F_0(x,y)$, definita in A_0, non è prolungabile con continuità in A, in modo tale da far nascere in tutto A un integrale della forma.

Diamo ora delle condizioni atte a garantire tale prolungabilità per campi A di un ben determinato tipo.

Sia T un dominio regolare *ad unico contorno*, cioè la cui frontiera ∂T sia formata da un'unica curva generalmente regolare semplice e chiusa; siano $T_1, T_2, \ldots, T_k$ altri domini ad unico contorno tutti contenuti in $\overset{0}{T}$ e privi a due a due di punti comuni (fig. 6.8.1).

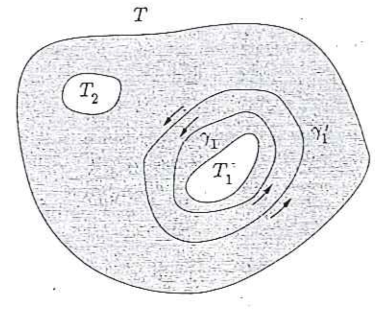

Fig. 6.8.1

Il campo A definito da $A = \overset{0}{T} - (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k)$ dicesi $(k+1)$*-volte connesso*, ovvero *dotato di k lacune* (i domini $T_1, T_2, \ldots, T_k$) o anche a $k+1$ *contorni* $(\partial T, \partial T_1, \partial T_2, \ldots \ldots, \partial T_k)$.

Sia γ_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$ una curva generalmente regolare semplice e chiusa contenuta in A, che lasci da una parte T_h e dall'altra parte tutte le altre lacune. Una tale γ_h si dice una curva (o un ciclo) *contornante la lacuna T_h*. Se γ_h' è un altro qualsiasi ciclo contornante T_h, facciamo vedere che, *sotto l'ipotesi* (6.7.2) si ha

$$\int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy = \int_{+\gamma'_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.8.2}$$

avendo scelto come verso positivo su ciascuno dei cicli γ_h, γ'_h quello che lascia a sinistra la lacuna T_h.

Per provare la (6.8.2) basta osservare che se γ_h e γ'_h non si intrecciano (come in fig. 6.8.1), esse costituiscono la frontiera di un dominio $D_h \subset A$; per il teorema 6.7.I si ha $\int_{+\partial D_h} X\,dx + Y\,dy = 0$ e questa, come è subito visto, equivale alla (6.8.2). Se poi γ_h, γ'_h si intrecciano, basta eseguire il confronto con un ciclo γ''_h che non intrecci né γ_h, né γ'_h.

A ciascuna delle lacune T_h si può dunque associare un ben determinato numero

$$\omega_h = \int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.8.3}$$

(indipendente dalla scelta di γ_h) che dicesi *periodo* della forma data, *relativo a quella lacuna*; si hanno così k periodi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Vale allora il seguente teorema:

Teorema 6.8.I – *Se il campo A è $(k+1)$-volte connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale lineare $X\,dx + Y\,dy$ [con $X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A)$ e $X_y = Y_x$] sia un differenziale esatto in A, è che essa abbia nulli tutti i suoi k periodi.*

Dimostrazione – La necessità è evidente; basta tener conto che ogni ciclo γ_h è una curva semplice e chiusa contenuta in A.

Per la sufficienza, consideriamo una *qualsiasi* curva generalmente regolare, semplice e chiusa $\gamma \subset A$. Se γ è la frontiera completa di un dominio tutto formato da punti di A, si ha $\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy = 0$ (teorema 6.7.I). Nel caso contrario, la curva γ gira attorno a certe m lacune $T_{h1}, T_{h2}, \ldots, T_{hm}$ (con $1 \le m \le k$); considerati allora m cicli $\gamma_{h1}, \gamma_{h2}, \ldots, \gamma_{hm}$ non intersecanti γ e contornanti rispettivamente le m lacune indicate, le curve γ, $\gamma_{h1}, \gamma_{h2}, \ldots, \gamma_{hm}$ costituiscono la frontiera di un dominio regolare $D \subset A$ e si ha $\int_{+\partial D} X\,dx + Y\,dy = 0$, ossia

$$\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{-\gamma_{hj}} X\,dx + Y\,dy = 0\,.$$

Ma per la (6.8.3) e per l'ipotesi che tutti i periodi siano nulli, questa equivale alla

$$\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy = \sum_{j=1}^{m} \omega_{hj} = 0$$

e quindi (teorema 6.2.III, osservazione II) la nostra forma è un differenziale esatto in A. □

Nelle ipotesi di validità di questo teorema 6.8.I, la (6.8.1) fornisce un integrale della forma in tutto A.

* * *

Possiamo ancora aggiungere che, *se qualche periodo non è nullo*, l'integrale $\int_{C(P',P'')} X\,dx + Y\,dy$ ha un valore che dipende dalla scelta della curva $C \subset A$ congiungente i due punti P', P''. Per esempio, se A è 2 *volte connesso* ed è $\omega_1 \neq 0$, si congiungano P' e P'' con due curve C, C_1 in modo che $C \cup C_1$ costituisca un ciclo contornante T_1 (fig. 6.8.2). Si ha allora

$$\int_{C(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + \int_{C_1(P'',P')} X\,dx + Y\,dy = \omega_1\,,$$

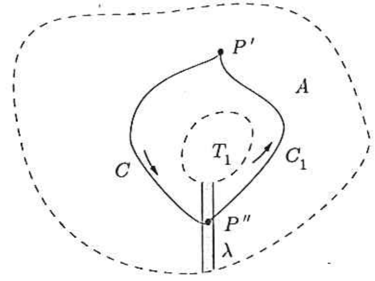

Fig. 6.8.2

onde gli integrali $\int_{C(P',P'')} \ldots$, $\int_{C_1(P',P'')} \ldots$ non sono uguali, perché la loro differenza vale $\omega_1 \neq 0$.

Si può dire, in questo caso, che l'integrale $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv$ non definisce più una funzione ad un solo valore, ma una *funzione polidroma*.

Se con un qualsiasi "taglio" λ [fig. 6.8.2] si individua un campo semplicemente connesso A_0, la corrispondente primitiva presenta valori diversi sui "bordi del taglio". Il salto nella primitiva, nel caso di una sola lacuna T_1, non dipende dalla posizione del taglio, ma solo dal periodo $\omega_1 \neq 0$.

Osservazione I - Le precedenti considerazioni restano evidentemente valide anche quando *le lacune si riducano a punti o curve* oppure *il dominio T sia illimitato* nel qual caso potrebbe mancare il contorno ∂T (se $T \equiv \mathbb{R}^2$).

* * *

Operando in termini vettoriali come alla fine del § 6.3 [vedi in particolare (6.3.7), (6.3.8)], si hanno le seguenti conclusioni nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Dato un *campo vettoriale* $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, di componenti $X(x,y)$, $Y(x,y)$ continui in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$, se X_y e Y_x sono continue e il campo vettoriale è *irrotazionale* (onde $X_y = Y_x$) in A, cioè

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0, \qquad \forall (x,y) \in A\,, \tag{6.8.4}$$

esso è certamente *conservativo* nei due seguenti casi: