SVOLGIMENTI ~~PROVA SCRITTA~~ ESONERO di ANALISI 1
DEL 19/11/2024 – COMPITO A

A1

1) Le funzioni $f_1(x) = a + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{x}\right)$ e $f_2(x) = |x^2 - 3x + 2| + 2$ sono continue in $x<0$ e in $x \geq 0$ rispettivamente. Occorre solo verificare la continuità in $x=0$.
Poichè $f_2 \in C^0(\mathbb{R})$, allora

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f_2(0) = |2| + 2 = 4.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f_1(x) = a + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{0^+}\right)$$

$$= a + \operatorname{arctg}(+\infty) = a + \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ f è CONTINUA anche in $x=0$ se

$$a + \frac{\pi}{2} = 4 \quad \text{cioè} \quad a = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

2) Pongo $t = e^{iz}$ $\Rightarrow$ $t^2 + t = 0$ $\Rightarrow$ $t(t+1) = 0$

da cui $\quad t = e^{iz} = 0 \quad \vee \quad t = e^{iz} = -1.$

L'esponenziale, anche in $\mathbb{C}$, non può mai annullarsi. Infatti:

$$e^{iz} = e^{ix-y} = \underbrace{e^{-y}}_{\text{reale} > 0}\,\underbrace{e^{ix}}_{\substack{\text{rappresenta}\\ \text{punti tali che}\\ |e^{ix}| = 1 \neq 0.}}$$

Rimane $e^{iz}=-1 \Rightarrow e^{-y}e^{ix}=e^{i\pi}$

A_2

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pi+2k\pi \end{cases}; \ k\in\mathbb{Z}$$

In alternativa: $e^{iz}=-e^{i2z}$

$$\Rightarrow e^{ix-y}=e^{i2x-2y}\cdot e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2x+\pi+2k\pi \\ -y=-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\pi+2k\pi \\ y=0 \end{cases}; \ k\in\mathbb{Z}$$

Si osservi che ~~è~~ l'insieme dei punti $\{x=\pi+2k\pi ;\ k\in\mathbb{Z}\}$ coincide con l'insieme $\{x=-\pi+2k\pi\}$.

3) Convergenza assoluta:

$$|a_n|=\frac{n+2}{n^2+3n+1}$$, in quanto $n^2+3n+1>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Infatti l'equazione $x^2+3x+1>0$ è sempre verificata, avendosi $\Delta<0$.

$|a_n|\sim\frac{1}{n}$. Pertanto $\sum|a_n|\approx\sum\frac{1}{n}$

DIVERGENTE

La serie diverge assolutamente.

Convergenza semplice:

$$\frac{n+2}{n^2+3n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

A_3

$$|a_n| \geq |a_{n+1}| \iff \frac{n+2}{n^2+3n+1} \geq \frac{n+3}{(n+1)^2+3(n+1)+1}$$

$$\iff \left[n^2+2n+1+3n+4\right](n+2) \geq (n+3)(n^2+3n+1)$$

$$\iff \cancel{n^3+4n^2+}\ (n^2+5n+5)(n+2) \geq n^3+6n^2+10n+3$$

$$\iff \cancel{n^3}+7n^2+15n+10-\cancel{n^3}-6n^2-10n-3 \geq 0$$

$$\iff n^2+5n+7 \geq 0$$ sempre verificato,

perchè $\Delta = 25-28 < 0$.

Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.