SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 25/3/2015

1) $i\bar{z} = i(x - iy) = y + ix$; $iz = i(x+iy) = -y + ix$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(i\bar{z}) = y$

$\operatorname{Im}(iz) = x$;

$\cancel{\Rightarrow 2yx}$ $|\bar{z}|^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2xy - x^2 - y^2 = 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x$

Disequazione:

$$2xy - x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \text{tutto } \mathbb{C}.$$

2) $$\frac{3n + e^n}{3^{2n} + \log n} \sim \frac{e^n}{3^{2n}} = \left(\frac{e}{9}\right)^n$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{9}\right)^n$, geometrica, converge

$\Rightarrow$ converge anche la serie data

3) Variabili separabili

$A(x) = x e^{-x^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$B(y) = y^2 - 1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ ESISTENZA e UNICITÀ LOCALE

Soluzioni singolari : $y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1.$

$\Rightarrow$ $y = 1$ risolve il Problema di Cauchy E, COME DETTO, È L'UNICA SOLUZIONE.

4) $$\int_0^1 x^2 \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^x x^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 x \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) \log_{\frac{2}{3}} e - \frac{2}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \left[\frac{1}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^x x \Big|_0^1 - \frac{1}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\log_{\frac{2}{3}} e - 2\log^2_{\frac{2}{3}}(e)\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^x\Big|_0^1\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\log_{\frac{2}{3}} e - \frac{4}{3}\log^2_{\frac{2}{3}}(e) + 2\log^3_{\frac{2}{3}}(e)\left[\frac{2}{3} - 1\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\log_{\left(\frac{2}{3}\right)} e - \frac{4}{3}\log^2_{\left(\frac{2}{3}\right)} e - \frac{2}{3}\log^3_{\left(\frac{2}{e}\right)} e$$

5) $f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin(x)$
$= -[x + \sin(x)] = -f(x)$

FUNZIONE DISPARI

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 1 + \cos(x) \geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow f$ non decrescente.

$\Rightarrow f < 0$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$f > 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f'(x) = 0$ se $\cos(x) = -1$ MAI IN $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

~~NO FL~~ NO FLESSI ORIZZONTALI.

④

MAX. REL. e ASS. in $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$

MIN. REL. e ASS. in $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \frac{\pi}{2}$

$f''(x) = -\sin x \geq 0 \iff \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

CONVESSITÀ

$\Rightarrow$ CONCAVITÀ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = 0$ punto di flesso obliquo $(f'(0) = 2)$

~~ASSE~~ DISCENDENTE

Grafico: