SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA DI ANALISI 1 DEL 2/7/2025

1) Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}} \cdot \frac{e^{n^2}}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}\cancel{e^{n^2}}}{e^{\cancel{n^2}+2n+1}\cancel{\cdot n!}}$$

$$= \frac{n+1}{e^{2n}\cdot e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

per la gerarchia degli infiniti.

La serie converge. Pertanto $a_n \to 0$.

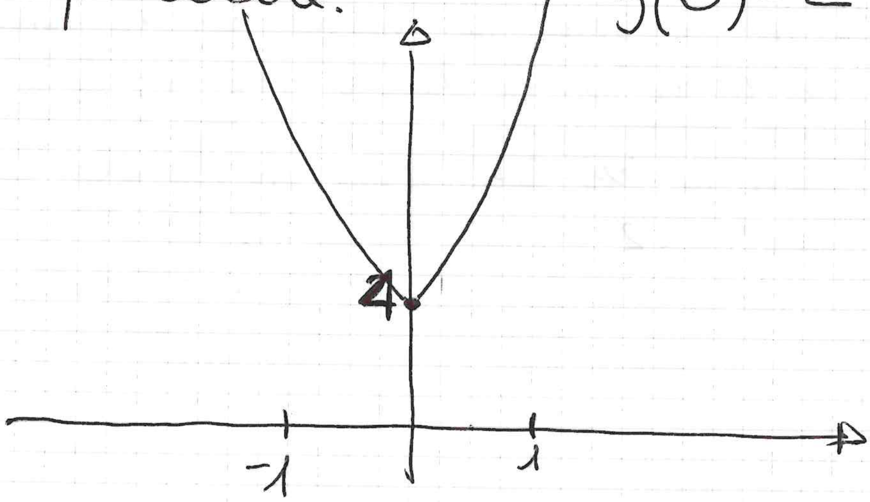
2) $\cancel{f(x) = }$ $f(x) = \underbrace{(|x|+2)^2}_{\geq 4} = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ (2-x)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$I_{dom} = \mathbb{R}$

$f(-x) = (|-x|+2)^2 = (|x|+2)^2 = f(x)$

f pari.

$f \in C^0(\mathbb{R})$. Il grafico è dato dall'unione di due parabole. $f(0) = 2$



$$f'(x)=\begin{cases} 2(x+2) & \text{se } x>0 \\ -2(2-x)=2(x-2) & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$f'_+(0)=4\neq -4=f'_-(0)$$

in $x=0$ punto angoloso.

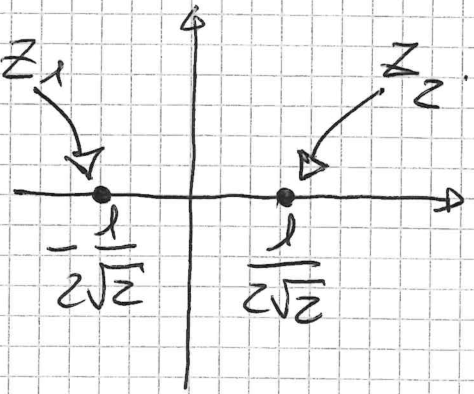
f convessa in $\mathbb{R}$.

3)

$$(x-iy)^2-(x+iy)^2+2|2x|^2-1=0$$

$$\cancel{x^2}-\cancel{y^2}-2ixy-\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2ixy+8x^2-1=0$$

$$\begin{cases} 8x^2-1=0 \\ xy=0 \end{cases}$$



$$\cancel{\begin{cases} x=0 \\ -1=0 \end{cases}} \cup \begin{cases} y=0 \\ x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

4) OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\alpha^2-1=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=\pm 1$$

$$\Rightarrow y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

Principio di sovrapposizione: poichè $\alpha=1$ è radice del polinomio caratteristico, allora

$$y_p(x)=A\sin x+B\cos x+Cxe^x$$

$$y_p' = A\cos x - B\sin x + C(x+1)e^x$$

$$y_p'' = -A\sin x - B\cos x + C(x+2)e^x$$

$$\Rightarrow -A\sin x - B\cos x + C(x+2)e^x$$
$$-A\sin x - B\cos x - Cxe^x = \sin x + e^x$$

$$-2A\sin x - 2B\cos x + 2Ce^x = \sin x + e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$y'(x) = C_1 e^x + C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}(x+1)e^x$$

$$y'(0) = 2C_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(x) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}xe^x}$$

5)
$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 + \frac{x^{2\alpha}}{2} - 1 + \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})}$$

$$= \frac{x^2 + o(x^2)}{x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{2\alpha-2}}$$

Quindi f è integrabile per $2\alpha - 2 < 1$

cioè per $\alpha < \frac{3}{2}$.

f non è integrabile per $\alpha \geq \frac{3}{2}$