

SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI I del 4/6/2025. ①

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1+n^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, pertanto la serie di potenze converge.

2) $I_{\text{def}} = \mathbb{R}$. Nessuna simmetria

intersezioni con assi: $f(0) = -1$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Seguo: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 > 0$
 $\Leftrightarrow x < -1 - \sqrt{2} \approx -2,4 \vee x > -1 + \sqrt{2} \approx 0,4$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Poiché $f(x) \sim x^2 e^x$, non

ammette asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{e^{-x}} = 0$$

$y = 0$
AS. ORIZZONTALE
a $-\infty$.

$$f'(x) = e^x (x^2 + 2x - 1 + 2x + 2) = e^x (x^2 + 4x + 1)$$

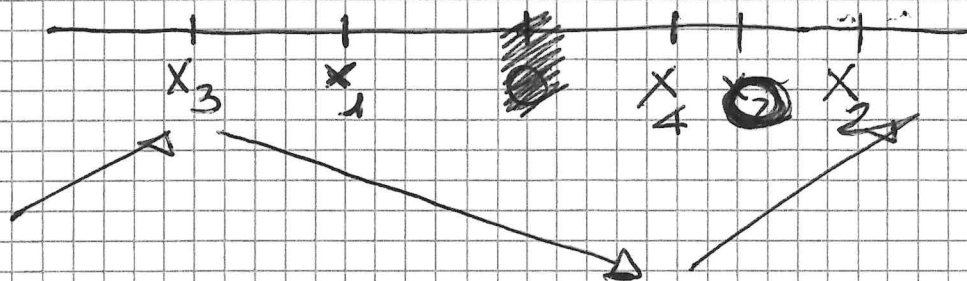
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_3 = -2 - \sqrt{3} \approx -3,4 \vee x > x_4 = -2 + \sqrt{3} \approx 0,3$$

$$f(x_1) = 0$$

$$f(0) = -1 \quad f(x_2) = 0$$

(2)

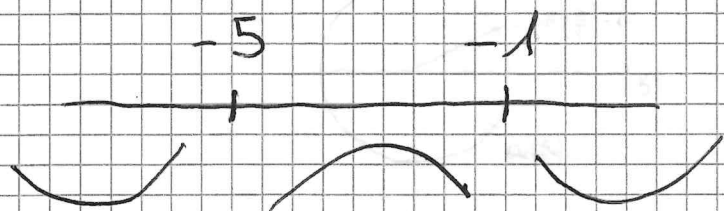


f cresce in $(-\infty, x_3 = -2 - \sqrt{3})$, decresce in $(x_3, x_4) = (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})$, cresce in $(x_4, +\infty) = (-2 + \sqrt{3}, +\infty)$.

Poiché l'uni $f(x) = 0$ e $f(x_4) < 0$, allora
 x_4 è punto di MIN. REL. e ASS.

Poiché l'uni $f(x) = +\infty$, x_3 è solo punto di MAX. REL.

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 1 + 2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 5) = e^x(x + 5)(x + 1)$$



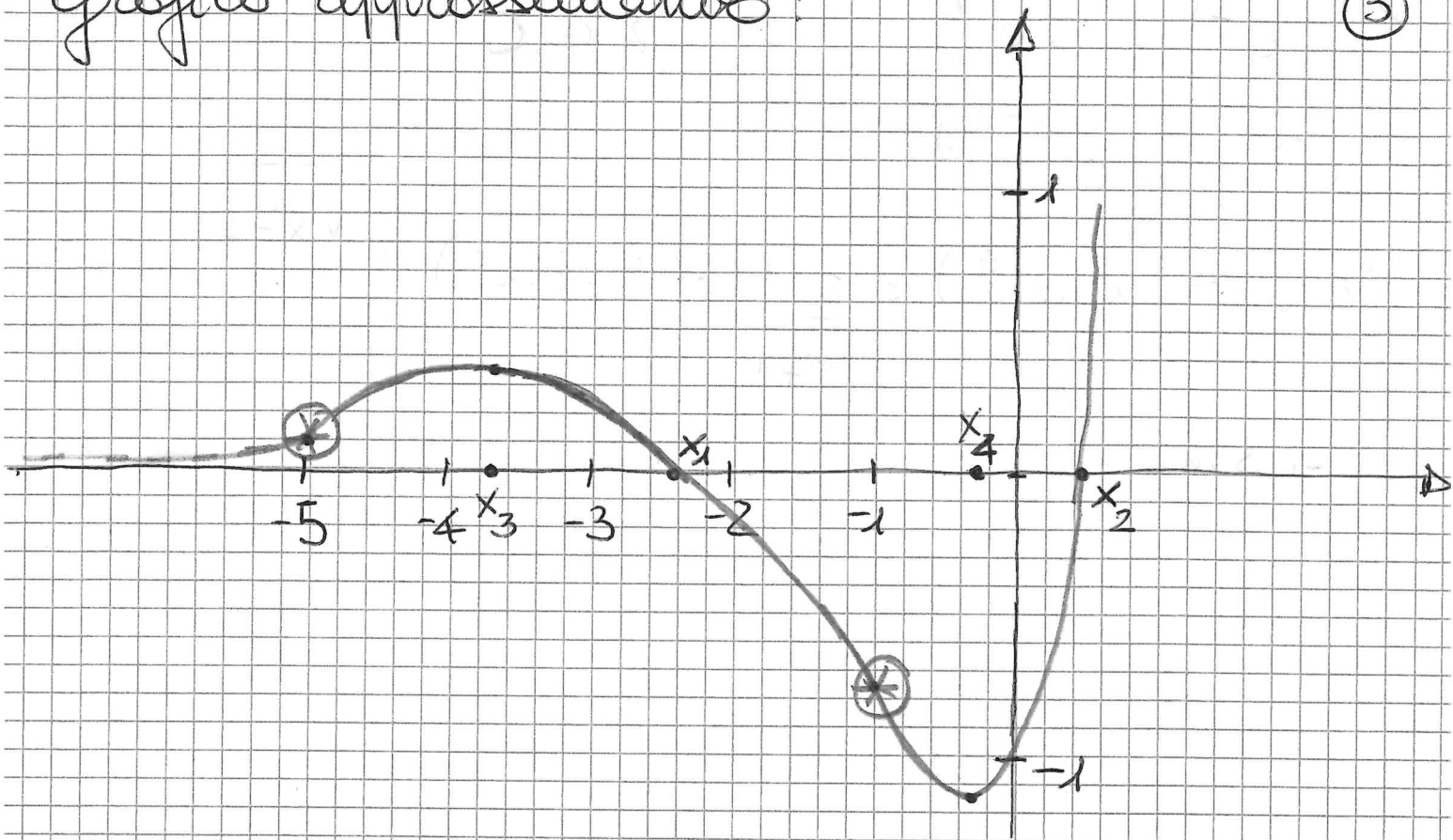
$x_5 = -5$ punto di flesso
obliquo discendente

$x_6 = -1$ punto di flesso
obliquo ascendente.

$$f(-1) = \frac{-2}{e} \approx -0,44$$

Grafico approssimativo:

③



$$3) x^2 - y^2 + 2ixy + 3y^2 = 3 + 2i$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \quad \text{con } x, y \neq 0 \\ x^2 + \frac{2}{x^2} = 3 \end{cases}$$

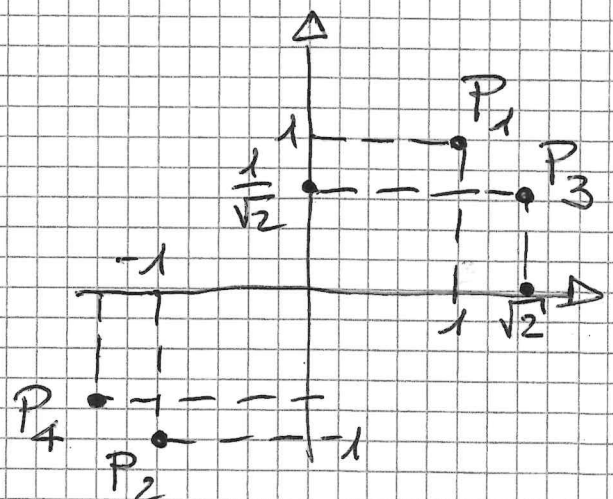
$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0 ; x \neq 0$$

BIQUADRATICA

$$t = x^2 \geq 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y_{1,2} = \pm 1 \end{cases} ; \begin{cases} x_{3,4} = \pm \sqrt{2} \\ y_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



4) $\tan x$ e $\frac{1}{\cos x}$ sono definite nell'insieme

$$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

(4)

Poiché $x_0 = \pi$, allora studiamo l'EDO nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, dove il coseno è negativo.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int \tan x \, dx} \left[\int e^{-\int \tan x \, dx} \frac{1}{\cos x} \, dx + C \right] \\ &= e^{-\ln(|\cos x|)} \cdot \left[\int e^{\ln(|\cos x|)} \frac{1}{\cos x} \, dx + C \right] \\ &= e^{-\ln(-\cos x)} \cdot \left[\int e^{\ln(-\cos x)} \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx + C \right] \\ &= \frac{1}{-\cos x} \left[\int \frac{-\cos x}{\cos x} \, dx + C \right] \\ &= \frac{-1}{\cos x} [-x + C] = \frac{x - C}{\cos x} \end{aligned}$$

$$y(\pi) = \frac{\pi - C}{-1} = -\pi \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x}{\cos x} \in C^\infty\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

Poiché $\tan x, \frac{1}{\cos x} \in C^\infty\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, il teorema di esistenza e unicità è garantito (in grande, trattandosi di EDO lineare).

5) Per $x \rightarrow 0^+$,

5

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - \left[1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right] + 1 + o(x^4)}{\left(\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^\alpha}$$

$$\sim \frac{-x^4}{\left(\frac{x^3}{6}\right)^\alpha} = \frac{-6^\alpha}{x^{3\alpha-4}}$$

la funcție rezultă punctuă integrabilă
în $(0, 1]$ se $3\alpha - 4 < 1$, adică

$$\boxed{\alpha < \frac{5}{3}}$$