SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 4/7/2019.

1) L'equazione è a variabili separabili e definita su tutto $\mathbb{R}$.

Poiché $a(x) = x(1+2e^{x^2}) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$b(y) = y^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

e l'equazione è a variabili separabili, si può garantire l'esistenza e unicità a livello solo locale.

$y(x) \equiv 0$ è sol. singolare, ma non soddisfa il Problema di Cauchy. Poniamo $y(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (x + 2xe^{x^2})\,dx$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + e^{x^2} + C.$$

$y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + C \quad \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + e^{x^2}}.$$

2) Poniamo $\sqrt{x} = t \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ ②

$$\Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$t(0) = 0$; $t(1) = 1$;

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{2t^2\,dt}{(1+t^2)} = 2\int_0^1 \left[\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\right] dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left[1 - \frac{1}{t^2+1}\right] dt = 2\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_0^1$$

$$= 2\left[1 - \operatorname{arctg} 1\right] = 2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right].$$

3) $$e^{\frac{z-3}{i}} = e^{-i[x+iy-3]} = e^{+y+i(3-x)}$$

$$\left|e^{\frac{z-3}{i}}\right| = \left|e^{+y+i(3-x)}\right| = \left|e^{+y}\right|\left|e^{i(3-x)}\right| = e^{+y}$$

$$\Rightarrow e^{+y} = 1 \quad \Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow z = x \in \mathbb{R}$$

(INFINITE SOLUZIONI)

4) Poichè $n^2+3n+1 > n^2-2n-2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

il primo radicale è sempre maggiore del secondo $\Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

③

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{(n^2+3n+1)-(n^2-2n-2)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-2}}\right]$$

$$= \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{5n+3}{\sqrt{\quad}+\sqrt{\quad}}\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{5n}{n^\alpha\left[n+n\right]}$$

$$= \frac{5}{2n^\alpha}$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall \alpha > 1$

diverge $\forall \alpha \leq 1$.

5)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(e^{-2x}-1+2x)}{2\left[e^{2x}-1\right]x} & \text{se } x \geq 2 \\[2ex] \dfrac{(2-x)(e^{-2x}-1+2x)}{2(e^{2x}-1)x} & \text{se } 0<x<2 \\[2ex] b & \text{se } x=0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt[5]{1+4x}-1}{e^{ax}-1} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Poichè il modulo è una funzione continua, $f \in C^0((-\infty,0)\cup(0,+\infty))$.

Rimane da verificare la continuità in $x=0$.

$$f(0)=b.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-x)\left[1-2x+\frac{(-2x)^2}{2}-1+2x\right]}{2(2x)x} =$$

④

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(2-x)\cdot 2x^2}{4x^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(1+\frac{4}{5}x\right)-1}{ax} = \frac{4}{5a}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{4}{5a} = f(0) = b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\frac{4}{5}. \end{cases}$$

Per tali valori, $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Studiamo i limiti per $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x-2)(2x-1)}{2xe^{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}e^{2x}} = 0$$ per gli ordini di infinito

$y=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE a $+\infty$.

Poiché $a = \frac{4}{5} > 0$, $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{4}{5}x} - 1 = -1$

5

$$\Rightarrow f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{(4x)^{1/5}}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

NO ASINTOTO ORIZZONTALE.

Poiché f è asintotica a una funzione sublineare, NO ASINTOTO OBLIQUO.