SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 5/9/2022

1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{x-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^3}{6}\right)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3} = 0$$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\left[x-\ln(1+x)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

f derivabile in $x=0$.

2) $e^{iz} = t \Rightarrow t^2 + 3it + 4 = 0$ 2

$$t_{1,2} = \frac{-3i + \sqrt{-9-16}}{2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} = \begin{cases} i \\ -4i \end{cases}$$

$\Rightarrow e^{iz_1} = i$; $e^{iz_2} = -4i$

$e^{i(x_1+iy_1)} = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$; $e^{i(x_2+iy_2)} = 4(-i)$

$= 4 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$e^{-y_1+ix_1} = 1 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$; $e^{-y_2+ix_2} = 4 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-y_1} = 1 \\ x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$; $\begin{cases} e^{-y_2} = 4 \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z} \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

soluzioni reali

3) a_n è identico alla $f(x)$ dell'esercizio 1)

$$\Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$$

$\Rightarrow$ la serie è, almeno definitivamente, a termini positivi

$$\sum a_n \approx \frac{1}{3}\sum \frac{1}{n} \quad \text{divergente.}$$

4) I_{def}: $\dfrac{x-1}{x+1} > 0 \implies x < -1 \vee x > 1$

$I_{def} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La funzione è dispari:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x).$$

<u>La studiamo solo per $x > 1$</u>.

Segno: $f(x) > 0 \iff \dfrac{x-1}{x+1} > 1$

Poichè $x > 1 \implies x-1 > x+1$ impossibile

$\Rightarrow f<0$ in $(1,+\infty)$

$f>0$ in $(-\infty,-1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\ln\left(\frac{0^+}{2}\right)=-\infty$$

AS. VERT. da DX $x=1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$$

AS. VERT. da SX $x=-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x}\right)=\ln 1=0$$

AS. ORIZZ. a $+\infty$ $y=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

AS. ORIZZ. a $-\infty$ $y=0$.

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\right]$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}>0 \quad \text{per } x<-1 \vee x>1$$

f crescente in $(-\infty,-1)$ e in $(1,+\infty)$.

A causa dei limiti,

$\nexists$ MAX.-MIN., REL. o ASS.

Anche se non richiesto, completiamo il grafico

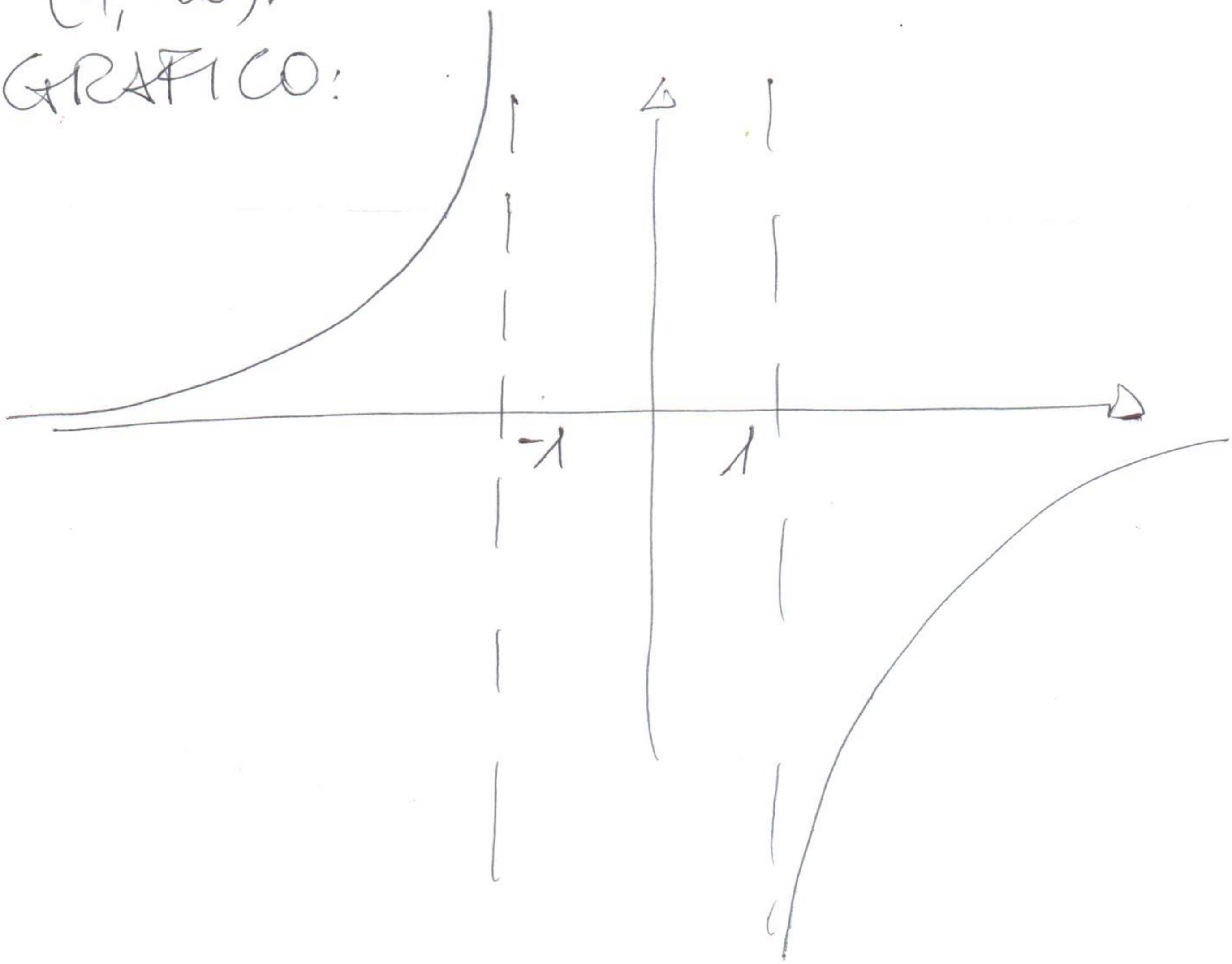
5

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{(x^2-1)}\right)' = \frac{-2}{(x^2-1)^2}\cdot 2x$$

$$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0 \iff x < 0$$

f convessa in $(-\infty,-1)$; concava in $(1,+\infty)$.

GRAFICO:



5) b. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx$

$$= \int \frac{\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{(\sqrt{x}+1)}(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

$\sqrt{x}=t$; $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$t(4)=2$; $t(16)=4$

$$= 2\int \frac{t}{(t-1)}\,dt = 2\int \frac{t-1+1}{t-1}\,dt$$

$$= 2\int \left[1+\frac{1}{t-1}\right]dt = 2\left[t+\ln(|t-1|)\right]+c$$

$$\Rightarrow \int_4^{16} \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx = 2\left[t+\ln(t-1)\right]_2^4$$

$t > 1$

$$= 2\left[4+\ln 3-2\right] = 2(2+\ln 3).$$

5) La risoluzione dell'equazione corrisponde al calcolo dell'integrale indefinito

$$y(x) = \int \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx$$

già risolto in 5_b).

$$\Rightarrow y(x) = 2\left[t + \ln(|t-1|)\right]_{t=\sqrt{x}} + c$$

$=$ (poichè $x_0 = 4 \Rightarrow$ studiamo l'equazione in $(1,+\infty)$)

$$= y(x) = 2\left[\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1)\right] + c$$

$$y(4) = 1 = 2\left[2 + \underbrace{\ln(2-1)}_{=0}\right] + c$$

$$\Rightarrow c = -3$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = 2\left[\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1)\right] - 3}$$