SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 dell'8/7/2024

1) CONVERGENZA ASSOLUTA.

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\ln(n^2+5n+4)} \approx \sum \frac{1}{2\ln n}$$

DIVERGENTE.

CONVERGENZA SEMPLICE. Criterio di Leibniz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \ln(n^2+5n+4) \leq \ln\left[(n+1)^2+5(n+1)+4\right]$$

$$\iff \cancel{n^2}+\cancel{5n}+\cancel{4} \leq \cancel{n^2}+2n+1+\cancel{5n}+5+\cancel{4}$$

$$\iff n \geq -3 \quad \text{vero } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie converge semplicemente.

2) DOMINIO: $\begin{cases} x^2+2x \cancel{\geq 0} = x(x+2) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_{def} = (-\infty,-2] \cup (0,+\infty) \qquad \text{NO SIMMETRIE}$$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$

$f(x) = 0 \iff x = -2$

~~NON~~

No intersezione con asse y. ②

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+2}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+2}}{x^{3/2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

AS. VERT. DX $x = 0$.

Attenzione! $f(x)$ si può riscrivere come $\sqrt{x}\sqrt{x+2}$ solo per $x > 0$!

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{|x|}{|x|^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

AS. ORIZZ. a $\pm\infty$: $y = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x+x^2}}(2+2x)x^{\cancel{2}} - \sqrt{2x+x^2}\,2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{\frac{(1+x)x}{\sqrt{2x+x^2}} - 2\sqrt{2x+x^2}}{x^3} = \frac{x^2+x-2(2x+x^2)}{x^3\sqrt{2x+x^2}}$$

$$= \frac{-(x^2+3x)}{x^3\sqrt{2x+x^2}} = \frac{-(x+3)}{x^2\sqrt{2x+x^2}} \geq 0 \iff x \leq -3$$

f cresce in $(-\infty, -3)$; decresce in $(-3, -2]$;
decresce in $(0, +\infty)$.

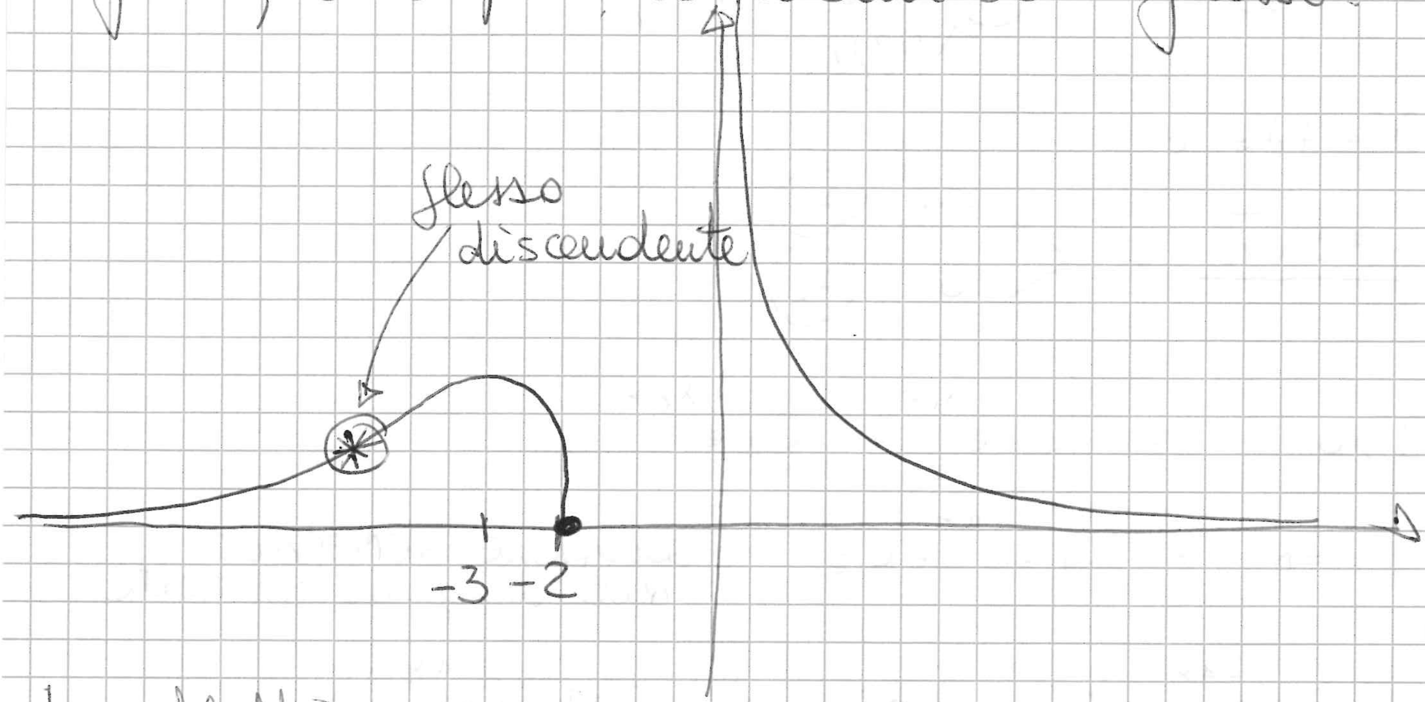
$x = -3$ punto di MAX. REL.: $f(-3) = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \nexists$ MAX. ASS.

$x = -2$ punto di MIN. ASS.: $f(-2) = 0$.

Si osservi che $\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{-1}{4 \cdot 0^+} = -\infty$

Dunque, in ipotesi di numero minimo di flessi, ci aspettiamo un solo flesso:



In effetti,

$$f''(x) = -\left[\frac{\cancel{x^2}\sqrt{2x+x^2} - (x+3)\left[2\cancel{x}\sqrt{2x+x^2} + \frac{x^{\cancel{2}}(1+x)}{\sqrt{2x+x^2}}\right]}{x^{3\cancel{4}}(2x+x^2)}\right]$$

$$= -\left[\frac{x(2x+x^2) - (x+3)\left[2(2x+x^2) + x(1+x)\right]}{x^3(2x+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -\left[\frac{x(2x+x^2) - x(x+3)\left[2(2+x) + 1 + x\right]}{x^3(2x+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -\left[\frac{2x+x^2 - (x+3)(5+3x)}{x^2(2x+x^2)^{3/2}}\right] = -\left[\frac{2x+x^2-5x-3x^2-15-9x}{x^2(2x+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -\left[\frac{-2x^2-12x-15}{x^2(2x+x^2)^{3/2}}\right] = \frac{2x^2+12x+15}{x^2(2x+x^2)^{3/2}} \geq 0$$

$$\iff 2x^2+12x+15 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{2} = -3 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

N.B.: $-2 < x_1 = -3 + \frac{\sqrt{6}}{2} < -\frac{3}{2}$

Quindi $x_1 \notin I_{def}$

$$x_2 = -3 - \frac{\sqrt{6}}{2} < -3.$$

Quindi l'unico flesso si trova prima del punto di MAX. REL., coerentemente col grafico.

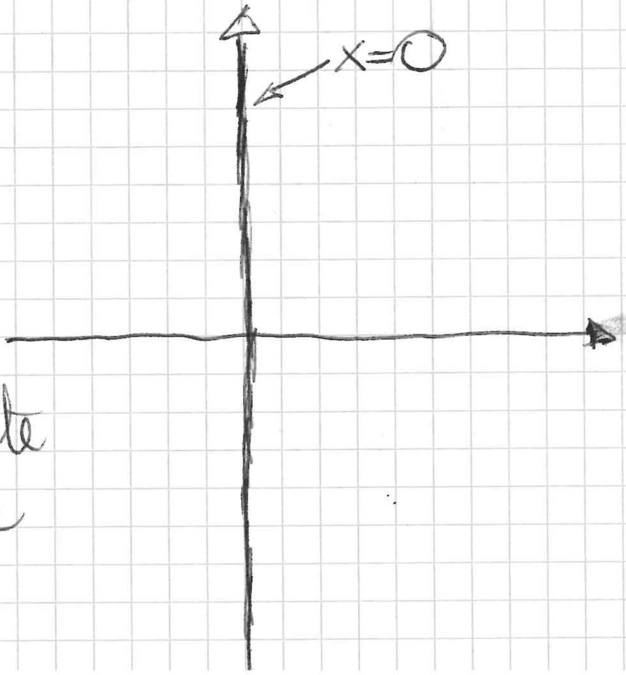
3) $|z|^2 + iz\,\mathrm{Im}\,z = i2k\pi$

$$x^2+y^2+i(x+iy)y = i2k\pi$$

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} = 0 \\ xy = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2k\pi = 0 \end{cases}$$ vero solo per $k=0$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono infinite $z = (0, y)$, cioè l'asse delle y.



4) Tenuto conto delle condizioni iniziali il ~~C.E.D. è definito~~ problema di Cauchy è definito in $(0, \pi)$, dove, tra l'altro $\sin x > 0$.

(5)

OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm i$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Cerchiamo una sol. particolare dell'eq.ne non omogenea col metodo di Lagrange.

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

$$y_P(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

dove $C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\sin x} dx = -x$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| = \ln(\sin x)$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \cdot \ln(\sin x)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = C_2$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cos x - x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

$$y'(x) = -C_1 \sin x \cancel{- \cos x} + x \sin x + \cos x \ln(\sin x) + \cancel{\frac{\sin x}{\sin x} \cos x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = -C_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{y(x) = x \sin x + \cos x \ln(\sin x)}$$

$$y(x) = -x \cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

5) per $x \to 0$:

$$f(x) \underset{x \to 0}{\approx} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Per $x \to 0$ la funzione ha una singolarità eliminabile. Quindi la funzione è integrabile in $x = 0$.

Per $x \to \infty$ $\quad f(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \dfrac{x - \frac{\pi}{2}}{x^3} \sim \dfrac{1}{x^2}$

che è integrabile a $+\infty$.

Quindi $f(x)$ è integrabile in $(0, +\infty)$.