SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA di ANALISI 1 dell'11/6/2024

1) Col criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^{\cancel{2}} \cancel{(n!)^2} n^n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{\infty} = 0 < 1$$

La serie converge. Quindi $a_n \to 0$.

2) $I_{def} = \{x^2-4x+3 = (x-1)(x-3) \neq 0\}$

$= \mathbb{R} - \{1,3\} = (-\infty,1) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$.

$f(x) > 0 \quad \forall x \in I_{def}$ $\qquad f(0) = e^{1/3}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^0 = 1$ $\qquad y=1$ AS. ORIZZ. a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = e^{\frac{1}{2\cdot 0^\pm}} = e^{\pm\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x\to 3^+ \\ 0^+ & \text{se } x \to 3^- \end{cases}$$

$x=3$ AS. VERT. DX.

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = e^{\frac{1}{-2\cdot 0^\pm}} = e^{\mp\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x\to 1^- \\ 0^+ & \text{se } x\to 1^+. \end{cases}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}} \cdot \left[\frac{-(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}\right] = 0 \iff x=2$$

$f'(x)>0 \iff 2x-4<0 \iff x<2$

f cresce in $(-\infty,1)$ e in $(1,2)$; decresce in $(2,3)$ e in $(3,+\infty)$.

Poichè $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty \implies x=2$ è punto di MAX. REL. ma non ASS.

$$f(2)=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Ovviamente, poichè $f(x)>0$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0$, la funzione ammette inf, ma non minimo.

Come già visto, $\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-4x+3)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-1)(x-3)$
$=0^-$

Allora,

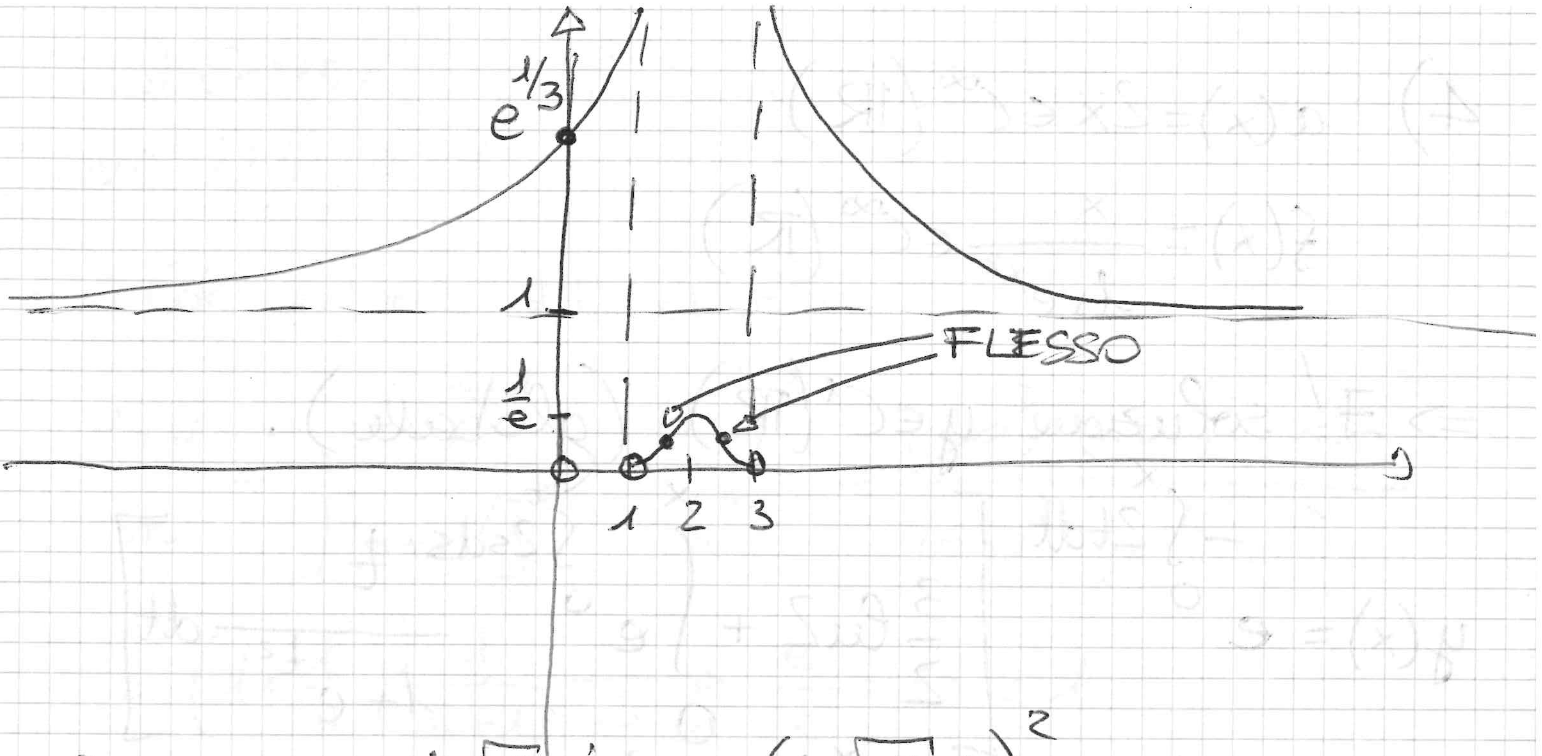
$$\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-}(4-2x)\cdot\lim_{x\to 3^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\left(\text{operando la sostituzione } t=\frac{1}{x^2-4x+3}\right)$$

$$=-2\lim_{t\to -\infty} t^2e^t=0^-$$

Analogamente, per $x\to 1^+$.

Evitando di calcolare $f''(x)$, il grafico, in ipotesi di numero minimo di flessi, è



3) $$z^4 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)^2}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{1+3} = \cancel{\frac{4}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\sqrt[4]{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\frac{1}{4}}$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4) $a(x) = 2x \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{x^2}} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ (globale).

$$y(x) = e^{-\int_0^x 2t\,dt}\left[\frac{3}{2}\ln 2 + \int_0^x e^{\int_0^t 2s\,ds}\frac{t}{1+e^{t^2}}\,dt\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[\frac{3}{2}\ln 2 + \int_0^x \frac{te^{t^2}}{1+e^{t^2}}\,dt\right]$$

Pongo $e^{t^2} = u \Rightarrow du = 2te^{t^2}$

$u(0) = 1$; $u(x) = e^{x^2}$

$$= e^{-x^2}\left[\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_1^{e^{x^2}} \frac{du}{1+u}\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln|1+u|\Big|_1^{e^{x^2}}\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+e^{x^2}) - \ln 2\right]\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(1+e^{x^2})\right]$$

5) Per $x \to 0$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^\alpha (x + o(x))}$$

$$\sim \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)}{x^{\alpha+1-4}} = -\frac{7}{12 x^{\alpha-3}}$$

Quindi f è integrabile se $\alpha - 3 < 1$

cioè se $\alpha < 4$.

Nel caso in cui l'intervallo fosse stato $[1, +\infty)$, l'esercizio sarebbe stato più semplice. OVVIAMENTE non si possono utilizzare gli sviluppi di McLaurin

Per gli ordini di infinito,

$$f(x) \sim \frac{e^{x^2/2}}{\frac{\pi}{2} x^{\alpha}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Quindi f non è mai integrabile.