SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 del 12/7/2023

1) Equazione di 2° grado:

$$z_{1,2} = -1 + \sqrt{1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$= -1 + \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \sqrt{\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \sqrt{e^{i\frac{2}{3}\pi}}$$

$$= \pm e^{i\frac{\pi}{3}} = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

In alternativa (formula del completamento del quadrato, che dà luogo alla formula risolutiva):

$$z^2 + 2z + 1 - 1 + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0$$

$$\Rightarrow \quad (z+1)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\Rightarrow \quad z + 1 = \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} \quad \Rightarrow \quad z = -1 + \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

come sopra.

2) $e^{\frac{1}{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} =$

$$= \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}=$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2n^2} = \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

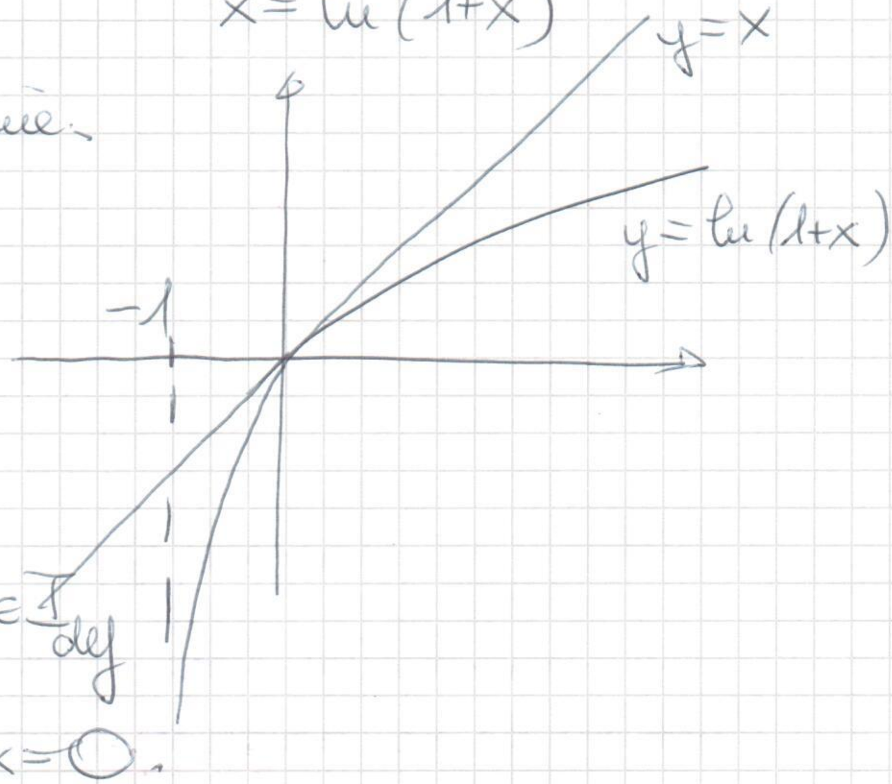
$\Rightarrow \sum a_n \approx \sum \frac{2}{n^2}$ serie convergente.

3) $I_{def} = \{x > -1\}$

$f(0) = 0$ Inoltre $f(x) = 0 \iff x = 0$

$x = \ln(1+x)$

$\Rightarrow$ f interseca gli assi nell'origine.



Si osserva anche che $\forall x > -1$

$x \geq \ln(1+x)$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$

e $f(x) = 0 \iff x = 0$.

Si può arrivare allo studio del segno anche solo tramite l'uso della derivata.

Infatti: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ (3)

$\iff x > 0$ ($x > -1$ già in base a I_{def})

$\Rightarrow f$ decresce in $(-1, 0)$ e cresce in $(0, +\infty)$

Quindi $x = 0$ è punto di MIN. ASS.

$(f(0) = 0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{def}$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 - \ln(0^+) = +\infty$$

AS. VERT. DX: $x = -1$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ (per gli ordini di infinito)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right] = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(-\ln(1+x)\right) = -\infty$$

$\Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo a $+\infty$.

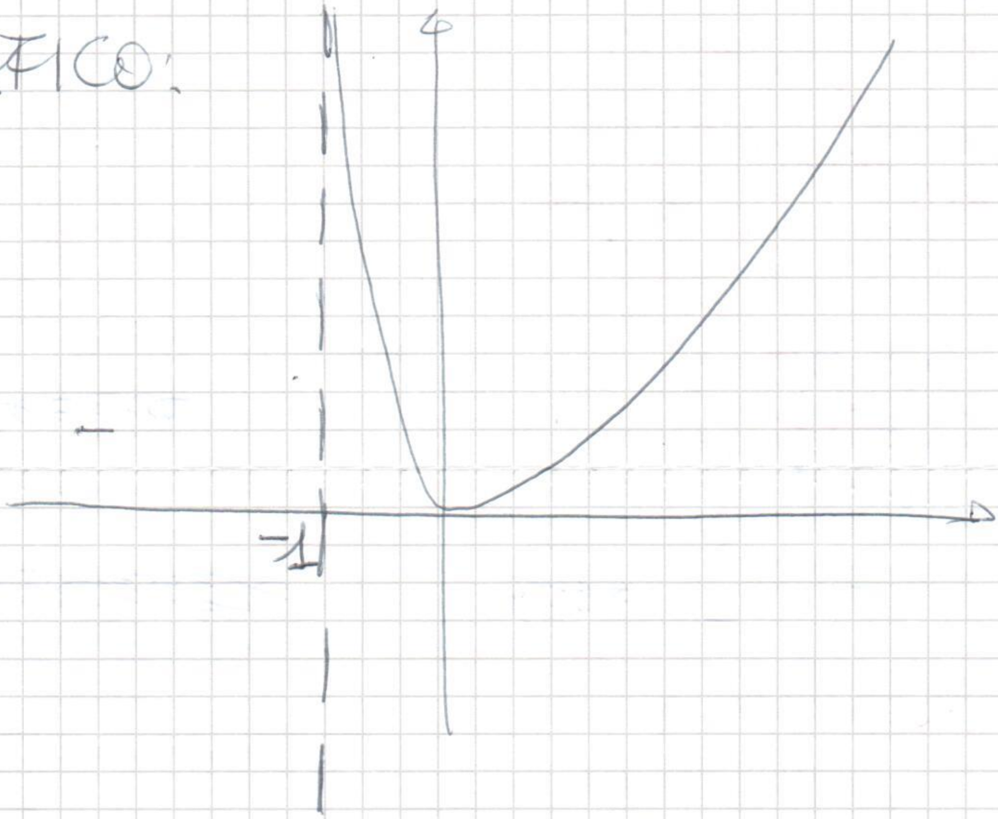
Inoltre

$\nexists$ MAX. REL. e ASS.

$f''(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad \forall x \in I_{def}$

$\Rightarrow f$ sempre convessa.

GRAFICO:



4) Equazione a variabili separabili.

$$a(x) = x \operatorname{arctg} x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$b(y) = e^{-y} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

$\exists!$ sol. y, di natura LOCALE.

$b(y) \neq 0 \Rightarrow$ NO SOL. SINGOLARI.

$$e^{+y} y' = x \operatorname{arctg} x$$

$$\Rightarrow \int e^{+y}\, dy = \int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$e^{y} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left[1 - \frac{1}{1+x^2} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$y(0)=0$

(5)

$\Rightarrow 1 = C$

$\Rightarrow e^{y} = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arctg}x - x\right]+1$

$\Rightarrow y(x) = \ln\left[\frac{1}{2}\left[(x^2+1)\operatorname{arctg}x - x\right]+1\right]$

5)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \qquad \forall a\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b+1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b=-1;\ a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ CONTINUA in 0.

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos x & x<0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) & x>0 \end{cases}$$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = a$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right] = -\frac{1}{2}$

f derivabile in 0 $\Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2};\ b=-1$